УДК 373(075.3)
ББК 74.26
В84

Авторский коллектив:
И.В. Павлова, Н.А. Пасько, Е.С. Каневский, И.В. Третьяк, Н.Э. Варавва, Н.Р. Парфеня, Л.И. Мицай, В.В. Петухов, Е.И. Шевченко, И.Н. Нечетова, Э.И. Завадовская, О.В. Черная, О.Е. Жукова

В84 **Все** домашние задания: 9 класс: решения, пояснения, рекомендации. — 10-е изд., испр. и доп. — Москва : Эксмо, 2016. — 960 с. — (Все домашние задания).

ISBN 978-5-699-89038-5

Пособие содержит подробные решения, комментарии, пояснения всех домашних заданий ко всем основным учебникам, рекомендованным Министерством образования и науки РФ, по русскому языку, математике, химии, физике, английскому и немецкому языкам.

Эта книга поможет родителям и репетиторам проконтролировать правильность выполнения учащимся домашнего задания.

Имена авторов и названия цитируемых изданий указаны на титульном листе данной книги. Условия заданий приводятся исключительно в учебных целях и в необходимом объеме — как иллюстративный материал (подпункт 2 пункта 1 статьи 1274 Гражданского кодекса Российской Федерации).

УДК 373(075.3)
ББК 74.26

ISBN 978-5-699-89038-5

СОДЕРЖАНИЕ

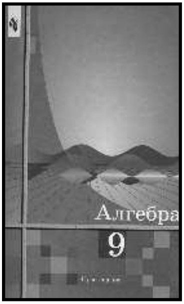
В данной книге представлены подробные решения и выполненные упражнения всех домашних заданий и самостоятельных работ к самым распространенным школьным учебникам за 9 класс.
Издание предназначено в первую очередь для проверки учениками собственных решений, а также для прослеживания алгоритмов выполнения наиболее сложных заданий. Книга также будет полезна родителям, которые хотят помочь детям и проконтролировать выполнение домашних заданий. Даже учителю издание может принести ощутимую пользу, так как разнообразие подходов к решению задач, предложенных в книге, можно использовать для того, чтобы стимулировать учеников к поиску новых путей решения.

Желаем успехов!

АЛГЕБРА

Решение упражнений к учебнику

Ш. А. Алимова и др.



1. 1)
$$\begin{array}{l|l} x^2-2x-35 & x-7 \\ \underline{x^2-7x} & \overline{x+5} \\ \quad 5x-35 & \\ \quad \underline{5x-35} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$M_1(x)=x+5$; $Q_1(x)=x-7$; $P_2(x)=x^2-2x-35$.

Проверяем результат:

$M_1(x)Q_1(x)=(x+5)(x-7)=x^2-2x-35=P_2(x)$. *Ответ:* $x+5$.

2)
$$\begin{array}{l|l} -4x^2-x+5 & 4x+5 \\ \underline{-4x^2-5x} & \overline{-x+1} \\ \quad 4x+5 & \\ \quad \underline{4x+5} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$M_1(x)=-x+1$; $Q_1(x)=4x+5$; $P_2(x)=-4x^2-x+5$.

Проверяем результат:

$M_1(x)Q_1(x)=(-x+1)(4x+5)=-4x^2-x+5=P_2(x)$.

Ответ: $-x+1$.

3)
$$\begin{array}{l|l} 6x^2+7x-3 & 2x+3 \\ \underline{6x^2+9x} & \overline{3x-1} \\ \quad -2x-3 & \\ \quad \underline{-2x-3} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$M_1(x)=3x-1$; $Q_1(x)=2x+3$; $P_2(x)=6x^2+7x-3$.

Проверяем результат:
$M_1(x)Q_1(x)=6x^2+7x-3=P_2(x)$.
Ответ: $3x-1$.

4)
$$\begin{array}{l|l} 6x^3+7x^2-6x+1 & 3x-1 \\ \underline{6x^3-2x^2} & \overline{2x^2+3x-1} \\ \quad 9x^2-6x & \\ \quad \underline{9x^2-3x} & \\ \qquad -3x+1 & \\ \qquad \underline{-3x+1} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$M_2(x)=2x^2+3x-1$; $Q_1(x)=3x-1$; $P_3(x)=6x^3+7x^2-6x+1$.
Проверяем результат:
$M_2(x)Q_1(x)=6x^3+7x^2-6x+1=P_3(x)$.
Ответ: $2x^2+3x-1$.

5)
$$\begin{array}{l|l} 6x^3+11x^2-1 & 2x^2+3x-1 \\ \underline{6x^3+9x^2-3x} & \overline{3x+1} \\ \quad 2x^2+3x-1 & \\ \quad \underline{2x^2+3x-1} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$M_1(x)=3x+1$; $Q_2(x)=2x^2+3x-1$; $P_3(x)=6x^3+11x^2-1$.
Проверяем результат:
$M_1(x)Q_2(x)=6x^3+11x^2-1=P_3(x)$.
Ответ: $3x+1$.

6)
$$\begin{array}{l|l} 15x^3-x^2+8x-4 & 3x^2+x+2 \\ \underline{15x^3+5x^2+10x} & \overline{5x-2} \\ \quad -6x^2-2x-4 & \\ \quad \underline{-6x^2-2x-4} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$M_1(x)=5x-2$; $Q_2(x)=3x^2+x+2$; $P_3(x)=15x^3-x^2+8x-4$.
Проверяем результат:
$M_1(x)Q_2(x)=15x^3-x^2+8x-4=P_3(x)$.
Ответ: $5x-2$.

2. 1)
$$\begin{array}{l|l} 6x^4+x^3-6x^2+1 & 2x^2+x-1 \\ \underline{6x^4+3x^3-3x^2} & \overline{3x^2-x-1} \\ \quad -2x^3-3x^2 & \\ \quad \underline{-2x^3-x^2+x} & \\ \qquad -2x^2-x+1 & \\ \qquad \underline{-2x^2-x+1} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Ответ: $3x^2-x-1$.

2)
$$\begin{array}{l|l} 9x^4-7x^2+6x-2 & 3x^2-2x+1 \\ \underline{9x^4-6x^3+3x^2} & \overline{3x^2+2x-2} \\ \quad 6x^3-10x^2+6x & \\ \quad \underline{6x^3+4x^2+2x} & \\ \qquad -6x^2+4x-2 & \\ \qquad \underline{-6x^2+4x-2} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Ответ: $3x^2+2x-2$.

3)
$$\begin{array}{l|l} 15x^5+6x^4-20x^2-8x & 3x^3-4 \\ \underline{15x^5\qquad\quad -20x^2} & \overline{5x^2+2x} \\ \quad 6x^4\qquad\quad -8x & \\ \quad \underline{6x^4\qquad\quad -8x} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Ответ: $5x^2+2x$.

4)
$$\begin{array}{l|l} 12x^5-9x^4+8x^2-6x & 4x^2-3x \\ \underline{12x^5-9x^4} & \overline{3x^3+2} \\ \quad 8x^2-6x & \\ \quad \underline{8x^2-6x} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Ответ: $3x^3+2$.

3. $P_n(x) = M_m(x)Q_k(x) + R_l(x)$; $m = n - k$, $l < k$

1) $n = 2$, $k = 1$, значит, $m = 1$; $l = 0$ $(0 < 1)$; $P_2(x) = M_1(x)Q_1(x) + R_0(x)$;

2) $n = 2$, $k = 1$, значит, $m = 1$; $l = 0$ $(0 < 1)$; $P_2(x) = M_1(x)Q_1(x) + R_0(x)$;

3) $n = 3$, $k = 1$, значит, $m = 2$; $l = 0$ $(0 < 1)$; $P_3(x) = M_2(x)Q_1(x) + R_0(x)$;

4) $n = 3$, $k = 2$, значит, $m = 1$; $l = 1$ $(1 < 2)$; $P_3(x) = M_1(x)Q_2(x) + R_1(x)$.

4. 1)
$$\begin{array}{r|l}
3x^3+4x^2 & 3x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3+2x^2} & x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{9} \\
2x^2 & \\
\underline{2x^2+\frac{4}{3}x} & \\
-\frac{4}{3}x & \\
\underline{-\frac{4}{3}x-\frac{8}{9}} & \\
\frac{8}{9} &
\end{array}$$

$M(x) = x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}$, $R(x) = \frac{8}{9}$;

2)
$$\begin{array}{r|l}
x^3-3x^2 & 2x^2+5 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+\frac{5}{2}x} & \frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \\
-3x^2-\frac{5}{2}x & \\
\underline{-3x^2-\frac{15}{2}} & \\
-\frac{5}{2}x+\frac{15}{2} &
\end{array}$$

$M(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, $R(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{15}{2}$;

3)
$$\begin{array}{r|l}
3x^4+6x^3-2x^2-x+7 & x^3+2x^2-4x \\ \cline{2-2}
\underline{3x^4+6x^3-12x^2} & 3x \\
10x^2-x+7 &
\end{array}$$

$M(x) = 3x$, $R(x) = 10x^2 - x + 7$;

4)
$$\begin{array}{r|l}
2x^4+3x^3-x & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4+2x^3+2x^2} & 2x^2+x-3 \\
x^3-2x^2-x & \\
\underline{x^3+x^2+x} & \\
-3x^2-2x & \\
\underline{-3x^2-3x-3} & \\
x+3 &
\end{array}$$

$M(x) = 2x^2 + x - 3$, $R(x) = x + 3$.

5. 1)
$$\begin{array}{r|l}
x^5+1 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5+x^4} & x^4-x^3+x^2-x+1 \\
-x^4 & \\
\underline{-x^4-x^3} & \\
x^3 & \\
\underline{x^3+x^2} & \\
-x^2 & \\
\underline{-x^2-x} & \\
x+1 & \\
\underline{x+1} & \\
0 &
\end{array}$$

Ответ: $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

2)
$$\begin{array}{r|l}
x^6-1 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^6-x^5} & x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\
x^5 & \\
\underline{x^5-x^4} & \\
x^4 & \\
\underline{x^4-x^3} & \\
x^3 & \\
\underline{x^3-x^2} & \\
x^2 & \\
\underline{x^2-x} & \\
x-1 & \\
\underline{x-1} & \\
0 &
\end{array}$$

Ответ: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

3)
$$\begin{array}{r|l}
3x^5-10x^3-7 & 3x^2+2 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^5+2x^3} & x^3-4x \\
-12x^3 & \\
\underline{-12x^3-8x} & \\
8x-7 &
\end{array}$$

Ответ: частое $x^3 - 4x$, остаток $8x - 7$.

4)
$$\begin{array}{r|l}
6x^6+x^4+x & 2x^4-3x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^6-9x^4} & 3x^2+5 \\
10x^4+x & \\
\underline{10x^4-15x^2} & \\
15x^2+x &
\end{array}$$

Ответ: частное $3x^2 + 5$, остаток $15x^2 + x$.

6. 1)
$$\begin{array}{r|l}
8x^5+2x^4-10x^3-15x^2 & 4x^2-5 \\ \cline{2-2}
8x^5-10x^3 & 2x^3+\frac{1}{2}x^2-3\frac{1}{8} \\ \cline{1-1}
2x^4-15x^2 & \\
2x^4-\frac{5}{2}x^2 & \\ \cline{1-1}
-12,5x^2 & \\
-12,5x^2+\frac{125}{8} & \\ \cline{1-1}
-\frac{125}{8} &
\end{array}$$

Ответ: нацело не делится.

2)
$$\begin{array}{r|l}
3x^5+x^4-6x^3+7x & 3x^2+x \\ \cline{2-2}
3x^5+x^4 & x^3-2x+\frac{2}{3} \\ \cline{1-1}
-6x^3 & \\
-6x^3-2x^2 & \\ \cline{1-1}
2x^2+7x & \\
2x^2+\frac{2}{3}x & \\ \cline{1-1}
\frac{19}{3}x &
\end{array}$$

Ответ: нацело не делится.

3)
$$\begin{array}{r|l}
x^6-4x^4+6x & x^2-2x \\ \cline{2-2}
x^6-2x^5 & x^4+2x^3 \\ \cline{1-1}
2x^5-4x^4 & \\
2x^5-4x^4 & \\ \cline{1-1}
6x &
\end{array}$$

Ответ: нацело не делится.

4)
$$\begin{array}{r|l}
x^6-3x^4-x^3+2x^2+x & x^3+2x^2+x \\ \cline{2-2}
x^6+2x^5+x^4 & x^3-2x^2+2 \\ \cline{1-1}
-2x^5-4x^4 & \\
-2x^5-4x^4-2x^3 & \\ \cline{1-1}
2x^3+2x^2+x & \\
2x^3+4x^2+2x & \\ \cline{1-1}
-2x^2-x &
\end{array}$$

Ответ: нацело не делится.

7. 1)
$$\begin{array}{r|l}
5x^3-9x^2+13x+a & 5x+1 \\ \cline{2-2}
5x^3+x^2 & x^2-2x+3 \\ \cline{1-1}
-10x^2+13x & \\
-10x^2-2x & \\ \cline{1-1}
15x+a & \\
15x+3 & \\ \cline{1-1}
a-3 &
\end{array}$$

$a-3=0$, $a=3$.
Ответ: $a=3$.

2)
$$\begin{array}{r|l}
7x^3-22x^2+ax-1 & x^2-3x+1 \\ \cline{2-2}
7x^3-21x^2+7x & 7x-1 \\ \cline{1-1}
-x^2+(a-7)x-1 & \\
-x^2+3x-1 & \\ \cline{1-1}
(a-10)x &
\end{array}$$

$(a-10)x=0$, $a=10$.
Ответ: $a=10$.

3)
$$\begin{array}{r|l}
2x^4+8x^3-5x^2-4ax+a & x^2+4x-1 \\ \cline{2-2}
2x^4+8x^3-2x^2 & 2x^2-3 \\ \cline{1-1}
-3x^2-4ax+a & \\
-3x^2-12x+3 & \\ \cline{1-1}
(12-4a)x+a-3 &
\end{array}$$

$(12-4a)x+a-3=0$; $4(3-a)x+a-3=0$; $a=3$.
Ответ: $a=3$.

4)
$$\begin{array}{r|l}
3x^5-3x^4+ax^2-ax & 3x^3+2 \\ \cline{2-2}
3x^5+2x^2 & x^2-x \\ \cline{1-1}
-3x^4+(a-2)x^2-ax & \\
-3x^4-2x & \\ \cline{1-1}
(a-2)x^2-(a-2)x &
\end{array}$$

$(a-2)x^2-(a-2)x=0$; $(a-2)(x^2-x)=0$; $a=2$.
Ответ: $a=2$.

8. По формуле деления нацело должно выполняться равенство $P_n(x)=M_m(x)Q_k(x)$.
Задача сводится к нахождению делителя $Q(x)$ по известному делимому и частному.

1)
$$\begin{array}{r|l}
4x^3-5x^2+6x+9 & x^2-2x+3 \\ \cline{2-2}
4x^3-8x^2+12x & 4x+3 \\ \cline{1-1}
3x^2-6x+9 & \\
3x^2-6x+9 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Ответ: $Q(x)=4x+3$.

2)
$$\begin{array}{r|l}
12x^4+9x^3-8x^2-6x & 3x^2-2 \\ \cline{2-2}
12x^4-8x^2 & 4x^2+3x \\ \cline{1-1}
9x^3-6x & \\
9x^3-6x & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Ответ: $Q(x)=4x^2+3x$.

3)
$$\begin{array}{r|l}
2x^5+3x^3-2x & x^2+2 \\ \cline{2-2}
2x^5+4x^3 & 2x^3-x \\ \cline{1-1}
-x^3-2x & \\
-x^3-2x & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Ответ: $Q(x)=2x^3-x$.

4)
$$\begin{array}{r|l}
3x^6+6x^4-x^2-2 & 3x^4-1 \\ \cline{2-2}
3x^6-x^2 & x^2+2 \\ \cline{1-1}
6x^4-2 & \\
6x^4-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Ответ: $Q(x)=x^2+2$.

* Решения и ответы приводятся к учебникам указанных годов.

9. По формуле деления должно выполняться равенство $P_n(x) = M_m(x)Q_k(x) + R_l(x)$.
Задача сводится к нахождению делителя $Q(x)$ по известному делимому, частному и остатку.
Следовательно, $Q_k(x) = \dfrac{P_n(x) - R_l(x)}{M_m(x)}$.

1) $$\begin{array}{l|l} x^2 - 5x - 36 & x - 9 \\ \hline x^2 - 9x & x + 4 \\ \hline \quad 4x - 36 & \\ \quad 4x - 36 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Ответ: $Q(x) = x + 4$.

2) $(2x^3 - 8x) : (2x - 4) = (x^3 - 4x) : (x - 2)$
$$\begin{array}{l|l} x^3 - 4x & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 + 2x \\ \hline \quad 2x^2 - 4x & \\ \quad 2x^2 - 4x & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Ответ: $Q(x) = x^3 + 2x$.

3) $$\begin{array}{l|l} 2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 10x^2 & 2x^2 - 5 \\ \hline 2x^5 - 5x^3 & x^3 + 2x^2 \\ \hline \quad 4x^4 - 10x^2 & \\ \quad 4x^4 - 10x^2 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Ответ: $Q(x) = x^3 + 2x^2$.

4) $$\begin{array}{l|l} 15x^6 - 5x^4 + 6x^3 - 2x & 5x^3 + 2 \\ \hline 15x^6 + 6x^3 & 3x^3 - x \\ \hline \quad -5x^4 - 2x & \\ \quad -5x^4 - 2x & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Ответ: $Q(x) = 3x^3 - x$.

10. 1) $x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$.
Обозначим $x^3 - x^2 - 8x + 6 = P_3(x)$. Найдем все целые корни уравнения. Целый корень уравнения должен быть делителем свободного члена. Делителями числа являются: 1; −1; 2; −2; 3; −3. Проверим: $P_3(1) \neq 0$, $P_3(-1) \neq 0$, $P_3(2) \neq 0$, $P_3(-2) \neq 0$, $P_3(3) = 0$, $P_3(-3) \neq 0$. Поэтому $P_3(x) = (x - 3)M_2(x)$. Находим $M_2(x)$:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - 8x + 6 & x - 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 & x^2 + 2x - 2 \\ \hline \quad 2x^2 - 8x & \\ \quad 2x^2 - 6x & \\ \hline \qquad -2x + 6 & \\ \qquad -2x + 6 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$M_2(x) = x^2 + 2x - 2$.
Найдем корни уравнения $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Для этого воспользуемся формулой для приведенного квадратного уравнения: $x = -\dfrac{P}{2} \pm \sqrt{\dfrac{P^2}{4} - q}$. Тогда $x = -1 \pm \sqrt{3}$. *Ответ:* $x_1 = 3$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$.

2) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$.
Найдем все целые корни уравнения. Делителями числа 4 являются числа: 1; −1; 2; −2. Проверим: $P_4(1) = 0$, $P_4(-1) \neq 0$, $P_4(2) \neq 0$, $P_4(-2) \neq \neq 0$. Поэтому $P_4(x) = (x - 1)M_3(x)$. Находим $M_3(x)$:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 & x - 1 \\ \hline x^4 - x^3 & x^3 + 2x^2 - 2x - 4 \\ \hline \quad 2x^3 - 4x^2 & \\ \quad 2x^3 - 2x^2 & \\ \hline \qquad -2x^2 - 2x & \\ \qquad -2x^2 + 2x & \\ \hline \qquad\qquad -4x + 4 & \\ \qquad\qquad -4x + 4 & \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$M_3(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4$.
Найдем корни уравнения $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$.
$x^2(x + 2) - 2(x + 2) = 0$; $(x + 2)(x^2 - 2) = 0$;
$(x + 2)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

3) $6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 = 0$.

Найдем все целые корни уравнения. Делителями числа -2 являются числа: -1, 1, -2, 2. $P_3(-1) \neq 0$, $P_3(1) \neq 0$, $P_3(-2) = 0$, $P_3(2) \neq 0$. Поэтому $P_3(x) = (x + 2)M_2(x)$. Находим $M_2(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3+11x^2-3x-2 & x+2 \\
\underline{6x^3+12x^2} & \overline{6x^2-x-1} \\
\qquad -x^2-3x & \\
\qquad \underline{-x^2-2x} & \\
\qquad\qquad -x-2 & \\
\qquad\qquad \underline{-x-2} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$M_2(x) = 6x^2 - x - 1$.

Решим уравнение: $6x^2 - x - 1 = 0$; $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$.

По теореме Виета находим корни: $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

4) $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Делителями числа -1 являются -1; 1.

Проверим: $P_4(-1) \neq 0$, $P_4(1) = 0$.

$P_4(x) = (x - 1)M_3(x)$. Находим $M_3(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4-8x^3+3x^2+2x-1 & x-1 \\
\underline{4x^4-4x^3} & \overline{4x^3-4x^2-x+1} \\
\qquad -4x^3+3x^2 & \\
\qquad \underline{-4x^3+4x^2} & \\
\qquad\qquad -x^2+2x & \\
\qquad\qquad \underline{-x^2+x} & \\
\qquad\qquad\qquad x-1 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{x-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$M_3(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$.

Решим уравнение: $4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$

$4x^2(x - 1) - (x - 1) = 0$; $(x - 1)(4x^2 - 1) = 0$;

$(x - 1)(2x - 1)(2x + 1) = 0$;

$4(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$.

Отсюда $x = 1$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x_{1,2} = 1$; $x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$.

11. 1) $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$.

Найдем все целые корни уравнения. Делителями числа -6 являются числа: -1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6. Обозначим $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = P_3(x)$. При этом $P_3(-1) \neq 0$; $P_3(1) \neq 0$; $P_3(-2) \neq 0$; $P_3(2) \neq 0$; $P_3(-3) \neq 0$; $P_3(3) = = 0$; $P_3(-6) \neq 0$; $P_3(6) \neq 0$. Поэтому $P_3(x) = (x - 3)M_2(x)$. Найдем $M_2(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-5x^2+8x-6 & x-3 \\
\underline{x^3-3x^2} & \overline{x^2-2x+2} \\
\quad -2x^2+8x & \\
\quad \underline{-2x^2+6x} & \\
\qquad\quad 2x-6 & \\
\qquad\quad \underline{2x-6} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$M_2(x) = x^2 - 2x + 2$.

Решим уравнение: $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Воспользовавшись формулой для приведенного квадратного уравнения, узнаем, что корни $M_2(x) = 0$ комплексные. Таким образом, исходное уравнение имеет один действительный корень.

Ответ: $x = 3$.

2) $9x^3 + 12x^2 - 10x + 4 = 0$.

Найдем все целые корни уравнения. Делителями числа 4 являются числа: -1; 2; -2; 2; -4; 4. Проверим: $P_3(-1) \neq 0$, $P_3(1) \neq 0$, $P_3(-2) = 0$, $P_3(2) \neq 0$, $P_3(-4) \neq 0$, $P_3(4) \neq 0$. Поэтому $P_3(x) = (x + 2)M_2(x)$. Найдем $M_2(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
9x^3+12x^2-10x+4 & x+2 \\
\underline{9x^3+18x^2} & \overline{9x^2-6x-2} \\
\qquad -6x^2+10x & \\
\qquad \underline{-6x^2-8x} & \\
\qquad\qquad -2x+4 & \\
\qquad\qquad \underline{-2x+4} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$M_2(x) = 9x^2 - 6x - 2$.
Решая уравнение $M_2(x) = 0$, видим, что оно имеет только комплексные корни.
Таким образом, исходное уравнение имеет один действительный корень.
Ответ: $x = -2$.

3) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$.
Найдем все целые корни уравнения. Делителями числа -6 являются числа: -1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6. Проверим: $P_4(-1) \neq 0$, $P_4(1) \neq 0$, $P_4(-2) \neq \neq 0$, $P_4(2) = 0$, $P_4(-3) = 0$, $P_4(3) \neq 0$, $P_4(-6) \neq 0$, $P_4(6) = 0$. Поэтому $P_4(x) = = (x-2)(x+3)M_2(x) = (x^2 + x - 6)M_2(x)$. Найдем $M_2(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 & x^2 + x - 6 \\ \underline{x^4 + x^3 - 6x^2 \phantom{{}+x-6}} & x^2 + 1 \\ x^2 + x - 6 & \\ \underline{x^2 + x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$M_2(x) = x^2 + 1$.
Решая уравнение $M_2(x) = 0$, узнаем, что оно имеет комплексные корни.
Таким образом, исходное уравнение имеет только два действительных корня.
Ответ: $x = 2$, $x = -3$.

4) $2x^4 - 2x^3 - 11x^2 - x - 6 = 0$.
Найдем все целые корни уравнения. Делителями числа -6 являются числа: -1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6. Проверим: $P_4(-1) \neq 0$, $P_4(1) \neq 0$, $P_4(-2) = = 0$, $P_4(2) \neq 0$, $P_4(-3) \neq 0$, $P_4(3) = 0$, $P_4(-6) \neq \neq 0$, $P_4(6) = 0$. Поэтому $P_4(x) = (x+2)(x-3)M_2(x) = (x^2 - x - 6)M_2(x)$. Найдем $M_2(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 2x^3 - 11x^2 - x - 6 & x^2 - x - 6 \\ \underline{2x^4 - 2x^3 - 12x^2 \phantom{{}-x-6}} & 2x^2 + 1 \\ x^2 - x - 6 & \\ \underline{x^2 - x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$M_2(x) = 2x^2 + 1$.
Уравнение $M_2(x) = 0$ имеет комплексные корни.
Следовательно, исходное уравнение имеет только два действительных корня.
Ответ: $x = -2$; $x = 3$.

12. 1) $6x^3 - 25x^2 + 3x + 4 = P_3(x)$.
Найдем целые корни многочлена $P_3(x)$. Делителями числа 4 являются: -1; 1; -2; 2; -4; 4. Проверим: $P_3(-1) \neq 0$, $P_3(1) \neq 0$, $P_3(-2) \neq 0$, $P_3(2) \neq \neq 0$, $P_3(-4) \neq 0$, $P_3(4) = 0$. Поэтому $P_3(x) = (x-4)M_2(x)$. Найдем $M_2(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 25x^2 + 3x + 4 & x - 4 \\ \underline{6x^3 - 24x^2 \phantom{{}+3x+4}} & 6x^2 - x - 1 \\ -x^2 + 3x \phantom{{}+4} & \\ \underline{-x^2 + 4x} \phantom{{}+4} & \\ -x + 4 & \\ \underline{-x + 4} & \\ 0 & \end{array}$$

$M_2(x) = 6x^2 - x - 1$.

$6x^2 - x - 1 = 0$; $6\left(x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right) = 0$.

По теореме Виета $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$.

Таким образом, $P_3(x) = 6(x-4)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

2) $4x^3 + 12x^2 - 3x - 9 = P_3(x)$.
Сгруппируем слагаемые: первое со вторым, третье с четвертым: $P_3(x) = (4x^3 + 12x^2) - (3x + 9)$. Вынесем общие множители за скобки и разложим двучлен на множители: $P_3(x) = 4x^2(x+3) - - 3(x+3) = (x + + 3)(4x^2 - 3) = (x+3)\left(2x - \sqrt{3}\right)\left(2x + \sqrt{3}\right)$.

3) $4x^4 + 4x^3 - 25x^2 - x + 6 = P_4(x)$.
Найдем целые корни многочлена $P_4(x)$. Делителями числа 6 являются числа: -1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6.
Проверим: $P_4(-1) \neq 0$, $P_4(1) \neq 0$, $P_4(-2) \neq 0$, $P_4(2) = 0$, $P_4(-3) = 0$, $P_4(3) \neq 0$, $P_4(-6) \neq 0$, $P_4(6) \neq 0$. Поэтому $P_4(x) = (x-2)(x+3)M_2(x) = (x^2 + x - 6)M_2(x)$. Найдем $M_2(x)$:

$$\begin{array}{l|l}
4x^4+4x^3-25x^2-x+6 & x^2+x-6 \\
\underline{4x^4+4x^3-24x^2} & \overline{4x^2-1} \\
\qquad\qquad -x^2-x+6 & \\
\qquad\qquad \underline{-x^2-x+6} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$M_2(x)=4x^2-1$. $P_4(x)=(x-2)(x+3)(4x^2-1)=(x-2)(x+3)(2x-1)(2x+1)$.

4) $x^4-2x^3-14x^2-6x+5=P_4(x)$.

Найдем целые корни многочлена $P_4(x)$. Делителями числа 5 являются числа: -1; 1; -5; 5. Проверим: $P_4(-1)=0$, $P_4(1)\neq 0$, $P_4(-5)\neq 0$, $P_4(5)=0$. Поэтому $P_4(x)=(x+1)(x-5)M_2(x)=$ $=(x^2-4x-5)(M_2(x)$. Найдем $M_2(x)$:

$$\begin{array}{l|l}
x^4-2x^3-14x^2-6x+5 & x^2-4x-5 \\
\underline{x^4-4x^3-5x^2} & \overline{x^2+2x-1} \\
\qquad 2x^3-9x^2-6x & \\
\qquad \underline{2x^3-8x^2-10x} & \\
\qquad\qquad -x^2+4x+5 & \\
\qquad\qquad \underline{-x^2+4x+5} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$M_2(x)=x^2+2x-1$. $P_4(x)=(x+1)(x-5)(x^2+2x-1)$; $x^2+2x-1=0$.

Используя формулу для приведенного квадратного уравнения

$x=-\dfrac{P}{2}\pm\sqrt{\dfrac{P^2}{4}-q}$, получаем $x=-1\pm\sqrt{2}$. $P_4(x)=(x+1)(x-5)\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)$.

13. 1) $\dfrac{x^3+2x^2+9}{x^3-2x^2+4x-3}$.

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби. Перебирая делители числа 9, находим целый корень числителя: -3.

$x^3+2x^2+9=(x+3)M_2^4(x)$

$$\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2+9 & x+3 \\
\underline{x^3+3x^2} & \overline{x^2-x+3} \\
\quad -x^2+9 & \\
\quad \underline{-x^2-3x} & \\
\qquad\quad 3x+9 & \\
\qquad\quad \underline{3x+9} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$M_2^4(x)=x^2-x+3$.

Перебирая делители числа -3, находим целые корни знаменателя 1 и 3. Удобно использовать только $x=1$.

$x^3-2x^2+4x-3=(x-1)M_2^3(x)$ $\dfrac{x^3-2x^2+9}{x^3-2x^2+4x-3}=\dfrac{(x+3)(x^2-x+3)}{(x-1)(x^2-x+3)}=\dfrac{x+3}{x-1}$.

2) $\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{2x^3+x^2+1}$.

Рассмотрим числитель. Сгруппируем в нем слагаемые: первое с четвертым, второе с третьим. Вынесем за скобки общий множитель и используем формулу сокращенного умножения

$x^3+2x^2+2x+1=(x^3+1)+(2x^2+2x)=(x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)==(x+1)(x^2+x+1)$.

Рассмотрим знаменатель. Число -1 является его целым корнем. $2x^3+x^2+1=(x+1)M_2(x)$.

Найдем $M_2(x)$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3+2x^2} & 2x^2-x+1 \\ \quad -x^2 & \\ \quad \underline{-x^2-x} & \\ \qquad\quad x+1 & \\ \qquad\quad \underline{x+1} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$M_2(x)=2x^2-x+1$ $\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{2x^3+x^2+1}=\dfrac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(2x^2-x+1)}=\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$.

3) $\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{2x^4-3x^3-x-6}$.

Рассмотрим числитель. Сгруппируем слагаемые: первое со вторым, третье с четвертым. Вынесем за скобки общие множители и используем формулу сокращенного умножения.
$2x^4-3x^3-x-6=(x+1)(x-2)M_2(x)=(x^2-x-2)M_2(x)$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4-3x^3-x-6 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2} \underline{2x^4-2x^3-4x^2} & 2x^2-x+3 \\ \quad -x^3+4x^2-x & \\ \quad \underline{-x^3+x^2+2x} & \\ \qquad\quad 3x^2-3x-6 & \\ \qquad\quad \underline{3x^2-3x-6} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$M_2(x)=2x^2-x+3$. Следовательно, можем записать:

$$\frac{x^4-2x^3+x-2}{2x^4-3x^3-x-6}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-2)(2x^2-x+3)}=\frac{x^2-x+1}{2x^2-x+3}.$$

4) $\dfrac{2x^4-3x^3-7x^2-5x-3}{2x^3-5x^2-2x-3}$.

Рассмотрим числитель. Среди делителей числа −3 находим целые корни числителя −1 и 3. То есть $2x^4-3x^3-7x^2-5x-3=(x+1)(x-3)M_2(x)=(x^2-2x-3)M_2(x)$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4-3x^3-7x^2-5x-3 & x^2-2x-3 \\ \cline{2-2} \underline{2x^4-4x^3-6x^2} & 2x^2+x+1 \\ \qquad x^3-\ \ x^2-5x & \\ \qquad \underline{x^3-2x^2-3x} & \\ \qquad\qquad x^2-2x-3 & \\ \qquad\qquad \underline{x^2-2x-3} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$2x^4-3x^3-7x^2-5x-3=(x+1)(x-3)(2x^2+x+1)$.
Рассмотрим знаменатель. Среди делителей числа −3 находим целый корень знаменателя 3. Поэтому $2x^3-5x^2-2x-3=(x-3)N_2(x)$.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-5x^2-2x-3 & x-3 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3-6x^2} & 2x^2+x+1 \\ \qquad x^2-2x & \\ \qquad \underline{x^2-3x} & \\ \qquad\qquad x-3 & \end{array}$$

$N_2(x)=2x^2+x+1$. Следовательно, можем записать дробь:

$$\frac{2x^4-3x^3-7x^2-5x-3}{2x^3-5x^2-2x-3}=\frac{(x+1)(x-3)(2x^2+x+1)}{(x-3)(2x^2+x+1)}=x+1.$$

14. 1) $x^5-x^4-7x^3+7x^2+12x-12=0$.
Сгруппируем слагаемые парами попорядку и вынесем общие множители:
$(x^5-x^4)-(7x^3-7x^2)+(12x-12)=0$; $x^4(x-1)-7x^2(x-1)+12(x-1)=0$;

$(x-1)(x^4-7x^2+12)=0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, $x_1=1$.
$x^4-7x^2+12=0$.
Введем замену: $x^2=y$. Подставив в уравнение, получаем приведенное квадратное уравнение $y^2-7y+12=0$.

По теореме Виета $y=3$ и $y=4$. Учитывая замену, получаем $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm 2$.

Ответ: 1; $\pm\sqrt{3}$; ± 2.

2) $2x^5-3x^4-7x^3+8x^2+6x-4=0$.
Среди делителей числа -4 находим целый корень уравнения -1.
Поэтому $2x^5-3x^4-7x^3+8x^2+6x-4=(x+1)M_4(x)$.
Найдем $M_4(x)$:

$$\begin{array}{l|l}
2x^5-3x^4-7x^3+8x^2+6x-4 & x+1 \\
\underline{2x^5+2x^4} & \overline{2x^4-5x^3-2x^2+10x-4} \\
\quad -5x^4-7x^3 & \\
\quad \underline{-5x^4-5x^3} & \\
\qquad -2x^3+8x^2 & \\
\qquad \underline{-2x^3-2x^2} & \\
\qquad\quad 10x^2+6x & \\
\qquad\quad \underline{10x^2+10x} & \\
\qquad\qquad -4x-4 & \\
\qquad\qquad \underline{-4x-4} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$M_4(x)=2x^4-5x^3-2x^2+10x-4$. $2x^4-5x^3-2x^2+10x-4=0$.
Сгруппируем слагаемые: первое с третьим и пятым, второе с четвертым и вынесем общие множители за скобки.
$(2x^4-2x^2-4)-(5x^3-10x)=0$; $2(x^4-x^2-2)-5x(x^2-2)=0$;
$2(x^2-2)(x^2+1)-5x(x^2-2)=0$; $(x^2-2)(2x^2-5x+2)=0$;

$2\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-2)=0$; $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$, $x_4=\dfrac{1}{2}$, $x_5=2$. *Ответ:* -1; $\pm\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{2}$; 2.

3) $x^6+x^5-7x^4-5x^3+16x^2+6x-12=0$.
Среди делителей числа -12 находим целые корни уравнения: -2; 4; 1.
Поэтому $x^6+x^5-7x^4-5x^3+16x^2+6x-12=(x+1)(x-1)M_4(x)==(x^2+x-2)M_4(x)$

$$\begin{array}{l|l}
x^6+x^5-7x^4-5x^3+16x^2+6x-12 & x^2+x-2 \\
\underline{x^6+x^5-2x^4} & \overline{x^4-5x^2+6} \\
\quad -5x^4-5x^3+16x^2 & \\
\quad \underline{-5x^4-5x^3+10x^2} & \\
\qquad 6x^2+6x-12 & \\
\qquad \underline{6x^2+6x-12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$M_4(x)=x^4-5x^2+6$. $x^4-5x^2+6=0$.
Введем замену $x^2=y$. Тогда $y^2-5y+6=0$. По теореме Виета $y=2$, $y=3$.

Учитывая замену, получим $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$, $x_{5,6}=\pm\sqrt{3}$. *Ответ:* -2; 1; $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{3}$.

4) $9x^6+6x^5-17x^4-12x^3+7x^2+6x+1=0$
Среди делителей числа 1 находим целые корни уравнения -1 и 1.
$9x^6+6x^5-17x^4-12x^3+7x^2+6x+1=(x-1)(x+1)M_4(x)$. Найдем $M_4(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
9x^6+6x^5-17x^4-12x^3+7x^2+6x+1 & x^2-1 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^6-9x^4} & 9x^4+6x^3-8x^2-6x-1 \\
\quad 6x^5-8x^4-12x^3 & \\
\quad \underline{6x^5-6x^3} & \\
\qquad -8x^4-6x^3+7x^2 & \\
\qquad \underline{-8x^4+8x^3} & \\
\qquad\quad -6x^3-x^2+6x & \\
\qquad\quad \underline{-6x^3+6x} & \\
\qquad\qquad -x^2+1 & \\
\qquad\qquad \underline{-x^2+1} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$M_4(x) = 9x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 6x - 1$. $9x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 6x - 1 = 0$

Среди делителей числа -1 находим целые корни уравнения -1 и 1.

$9x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 6x - 1 = (x - 1)(x + 1)M_2(x)$. Найдем $M_2(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
9x^4+6x^3-8x^2-6x-1 & x^2-1 \\ \cline{2-2}
\underline{9x^4-9x^2} & 9x^2+6x+1 \\
\quad 6x^3+x^2-6x & \\
\quad \underline{6x^3-6x} & \\
\qquad\quad x^2-1 & \\
\qquad\quad \underline{x^2-1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$M_2(x) = 9x^2 + 6x + 1$. $9x^2 + 6x + 1 = 0$; $9\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)=0$; $9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=0$; $x=-\frac{1}{3}$.

Видно, что в скобках стоит одна из формул сокращенного умножения.

Ответ: -1; $-\frac{1}{3}$; 1.

15. $ax^3 - 2x^2 - 5x + b = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Поскольку x_1 и x_2 — корни уравнения, то они превращают его в верное равенство. Подставляя их в уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} a-2-5+b=0; \\ -8a-8+10+b=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a+b-7=0; \\ -8a+b+2=0. \end{cases}$$

Из первого уравнения $b = 7 - a$.

Подставим это во второе уравнение: $-8a + 7 - a + 2 = 0$; $-9a + 9 = 0$; $a = 1$; $b = 6$.

Следовательно, исходное уравнение принимает вид $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

Среди делителей числа 6 находим третий корень уравнения $x_3 = 3$.

Ответ: $a = 1$, $b = 6$, $x_3 = 3$.

16. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$; $x_1 + x_2 + x_3 = -a$; $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b$; $x_1x_2x_3 = -c$

Подставим в уравнение один из его корней x_1 и выражения для a, b и c. Тогда получим:

$$x_1^3-(x_1+x_2+x_3)x_1^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x_1-x_1x_2x_3=0;$$

$$x_1^3-x_1^3-x_2x_1^2-x_3x_1^2+x_1^2x_2+x_1x_2x_3+x_1^2x_3-x_1x_2x_3=0.$$

Подобные слагаемые взаимно уничтожаются и в левой части уравнения получается 0. Это верное равенство. Следовательно, теорема Виета доказана.

17. $x^3 + ax + b = 0$

x_1, x_2, x_3 — корни уравнения.

Используя теорему Виета для кубического уравнения, получим:

$0 = x_1 + x_2 + x_3$; $a = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$; $b = -x_1x_2x_3$.

Подставляя корни, получим систему трех уравнений:

$$\begin{cases} x_1^3+ax_1+b=0; \\ x_2^3+ax_2+b=0; \\ x_3^3+ax_3+b=0. \end{cases}$$