

**СДАЁМ
БЕЗ ПРОБЛЕМ!**



**Г. В. Дорофеев, Е. А. Седова,
С. А. Шестаков, С. В. Пчелинцев**

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ



**Москва
2021**

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
Е28

Об авторах:

Г.В. Дорофеев — доктор физико-математических наук, профессор
Е.А. Седова — кандидат педагогических наук
С.А. Шестаков — заслуженный учитель России
С.В. Пчелинцев — доктор физико-математических наук, профессор

Е28 **ЕГЭ 2022. Математика. Профильный уровень / Г.В. Дорофеев, Е.А. Седова, С.А. Шестаков, С.В. Пчелинцев.** — Москва : Эксмо, 2021. — 288 с. — (ЕГЭ. Сдаем без проблем).

ISBN 978-5-04-122357-1

Книга содержит материалы по основным темам школьного курса математики, приводятся различные алгоритмы решения задач профильного уровня. В разделе «Компендиум» представлена полезная информация для решения задач разного типа.

Издание окажет неоценимую помощь учащимся при подготовке к ЕГЭ по математике, а также может быть использовано учителями при организации учебного процесса.

**УДК 373.5:51
ББК 22.1я721**

ISBN 978-5-04-122357-1

© Дорофеев Г.В., Седова Е.А.,
Шестаков С.А., Пчелинцев С.В., 2021
© Оформление.
ООО «Издательство «Эксмо», 2021

СОДЕРЖАНИЕ

К читателю	4
РАЗДЕЛ I. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА	7
1.1. Делимость и деление с остатком.	7
1.1.1. Простые и составные числа	7
1.1.2. Свойства делимости	10
1.1.3. Деление с остатком	10
1.2. Десятичная запись натуральных чисел	13
1.2.1. Основная теорема арифметики	13
1.2.2. Делимость и остатки	14
1.2.3. Перестановки цифр	16
1.3. Применения натуральных и целых чисел	18
1.3.1. Комбинаторные рассуждения с целыми числами	18
1.3.2. Уравнения в целых числах.	23
1.3.3. Текстовые задачи с целыми неизвестными: логика и алгебра.	26
РАЗДЕЛ II. ФУНКЦИИ	29
2.1. Основные понятия	29
2.1.1. Область определения и множество значений	29
2.1.2. Монотонность и ограниченность	34
2.1.3. Периодичность	36
2.2. Значения функций	39
2.2.1. Подстановки	39
2.2.2. Равенства с неизвестными функциями	41
2.3. Геометрия функций	42
2.3.1. Четность и нечетность	42
2.3.2. Симметрии	44
2.4. Применения функций	47
2.4.1. Монотонность.	47
2.4.2. Ограниченность	48
2.4.3. Периодичность	49
РАЗДЕЛ III. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ	50
РАЗДЕЛ IV. РЕШЕНИЯ И КОММЕНТАРИИ	88
РАЗДЕЛ V. КОМПЕНДИУМ	233

К ЧИТАТЕЛЮ

Какая главная цель у ученика при изучении математики? Правильно — сдать экзамен, а для этого, собственно говоря, и знать ее незачем: можно быстро подзубрить всякие формулы и теоремы до дня сдачи экзамена, а потом они из памяти все равно быстро выветрятся, если, конечно, они не будут нужны в будущей работе. Какому нормальному человеку, в конце концов, нужно уметь складывать обыкновенные дроби, перемножать степени и решать квадратные уравнения, тем более — иррациональные, тригонометрические, логарифмические и прочие уравнения и неравенства? Да и таблица умножения ни к чему — зачем помнить добрую сотню равенств, если под рукой калькулятор?

Нет, тот, кто хочет стать математиком, химиком или инженером, пусть учит, что положено, но остальным-то она зачем, и единственный ответ на этот вопрос — сдать экзамен. Здесь уж ничего не поделаешь, экзамен по математике сделали обязательным для получения аттестата о среднем образовании, а без него в жизни никуда. А без математического можно — ну зачем оно, скажем, будущему хоккеисту, фотомодели или телеведущему? И зачем только в школе их мучают математикой?

Если вы действительно придерживаетесь такого мнения, то только потому, что в школе вы получили искаженное представление о математике как о совокупности теорем и формул, которые надо заучить и применять к решению километров уравнений и неравенств, тождеств

венных преобразований, геометрических задач и прочих «прелестей».

И всегда над душой стоял(а) ваш(а) учитель(ница) (будем политкорректными!), придираясь ко всяким пустякам в ваших рассуждениях — каждому нормальному человеку ясно, что в равнобедренном треугольнике боковые стороны и углы при основании равны, а он(а) требует ответить — по признаку, или по свойству такого треугольника, или, может быть, по определению. И не дай бог просто найти по теореме Пифагора гипотенузу прямоугольного треугольника, не написав, что нашел ее именно по этой теореме, а не как-нибудь еще.

Между тем лучше всех о математике сказал М.В. Ломоносов — она «ум в порядок приводит». А может, ум в порядке, точнее — порядок в уме, представителям вышеупомянутых славных профессий вовсе и не нужен? Надо сказать, что нынешняя школьная математика, конечно, имеет все возможности приводить ум в порядок, но просто их не использует: считать, заучивать, зубрить — учат, а думать, размышлять — нет, или почти нет. И в этой книжке мы попытались научить читателей именно думать, и на наш взгляд, это не так уж неинтересно — впрочем, это наше частное мнение.

Конечно, к экзамену надо готовиться, но эта подготовка лежит через познание математики — только это создаст вам необходимый «запас прочности», гарантирующий сдачу любого экзамена, в любой его форме, тем более в форме ЕГЭ. Если человек не собирается поступать в вуз «с математикой», то ему достаточно сдать ЕГЭ «на школьном уровне», где от него вообще не требуют никаких доказательств.

Но умение доказывать, умение рассуждать, которому вы можете поучиться при подготовке к ЕГЭ, даст вам возможность потратить на рутинную работу, которую от вас ожидают, значительно меньше сил и времени, чем предполагают экзаменаторы, сохранив их для решения «нормальных» задач высокого уровня сложности.

Мы включили в книгу специальный раздел **Компендиум** (по-русски: дополнение), где представлена «лишняя», «нешкольная», но чрезвычайно полезная для вас информация. И особенно хороша эта информация для решений задач с кратким ответом — конечно, приведенных теорем и рассуждений нет в обычных учебниках, так ведь на ЕГЭ никому и не важно, откуда вы их знаете, доказывали или нет соответствующую теорему, почему логически правилен ваш метод рассуждения — проверяется только правильность ответа!

А кратким решениям мы обучаем в первых разделах книжки, где предложены и подробно решены задачи по делимости натуральных и целых чисел и по свойствам функций. Отметим еще, что их «устное» решение многих из приведенных задач на самом деле значительно короче, чем это выглядит в книге: решать задачи проще и быстрее, чем объяснять их решение — многие из них решаются одними «глазами».

Задачи, связанные с делимостью, в настоящее время в ЕГЭ «впрямую» не представлены, но в школе вы все это «проходили», и кто знает, что будет на следующем ЕГЭ или позже? В то же время такие задачи приближают школьную математику к «настоящей», и сейчас этот материал уже включен в программу, так что в будущем он непременно появится и в ЕГЭ.

Остается лишь пожелать вам успехов в изучении математики, и тогда успех на экзамене, тем более если он окажется в форме ЕГЭ, будет зависеть от вашей подготовки, а не от вашей удачи. Но удачи на экзамене тоже нельзя не пожелать...

Авторы

Раздел I. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1.1. Делимость и деление с остатком

1.1.1. Простые и составные числа

1. Доказать, что $1589^2 - 1$ — составное число.
2. Доказать, что $1589^{38} - 1$ — составное число.
3. Является ли число $648732^{38} - 3$ простым?
4. Является ли число $2964764^{38} + 55$ простым?
5. Доказать, что $1113^{11} + 3335^{33} + 5557^{55} + 7779^{77}$ является составным числом.
6. Все числа от 1 до 100 возвели в 1001 степень и сложили. Доказать, что полученная сумма является составным числом.
7. Доказать, что при натуральном n число
$$2n^2 + 4n - 31$$
не может быть равно нулю.
8. Доказать, что при натуральном n число
$$3n^2 + 5n - 31 \neq 0.$$
9. Простым или составным является число
$$28952^8 - 59867^6?$$
10. Простым или составным является число
$$21596^9 - 40957^6?$$
11. Простым или составным является число
$$87351^{18} + 73642^{27}?$$
12. Является ли число $5853^{13} - 742^{13}$ простым числом?
13. Является ли число $742^{85} - 5853^{34}$ простым числом?
14. Простым или составным числом является сумма
$$4654^{37} + 64711^{37}?$$

15. Является ли составным числом сумма

$$555^{222} + 222^{555}?$$

16. Простым или составным числом является сумма

$$64711^{2035} + 64712^{111}?$$

17. Простым или составным является число

$$49863^{11} + 82764^{22}?$$

18. Простым или составным является число

$$9243^{78} + 1736^{44}?$$

19. Простым или составным является число

$$2072301^{66} + 1272326^{22}?$$

20. Простым или составным числом является разность

$$84716^{66} - 49851^{23}?$$

21. Простым или составным числом является разность

$$49854^{36} - 59871^{17}?$$

22. Простым или составным числом является число

$$49854^{37} + 59871^{17}?$$

23. Простым или составным является число

$$1^{11} + 2^{22} + 3^{33} + 4^{44} + 5^{55} + 6^{66}?$$

24. Является ли число вида $2^{131131} - 1$ простым?

25. Доказать, что число вида $2^n - 1$ при составном n является составным.

26. Обязано ли число вида $2^n - 1$ быть составным при простом $n > 5$?

27. Всегда ли число вида $2^{2^n} + 1$ является простым?

28. Может ли сумма квадратов целых чисел быть точным квадратом?

29. Обязана ли сумма квадратов целых чисел быть точным квадратом?

30. Доказать, что если каждое из двух целых чисел является суммой двух точных квадратов, то их произ-

ведение также является суммой двух точных квадратов.

31. Обязана ли сумма кубов двух целых чисел быть точным кубом?

32. Может ли сумма кубов двух натуральных чисел быть точным кубом?

33. Верно ли, что сумма любых двух составных чисел — составное число?

34. Верно ли, что сумма любых двух простых чисел является составным числом?

35. Верно ли, что сумма двух простых чисел является четным числом?

36. Верно ли, что сумма простого и составного числа — составное число?

37. Верно ли, что произведение любых двух натуральных чисел — составное число?

38. Сумма 10 000 натуральных чисел равна 10 001. Найти произведение этих чисел.

39. Можно ли получить число 1 000 000 сложением чисел, в записи которых используются только тройки?

40. Можно ли число 1001 записать в виде суммы двух простых натуральных чисел?

41. Сколькими способами можно записать число 101 010 101 в виде суммы двух простых чисел (суммы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются за одну)?

42. Найдется ли в натуральном ряде «отрезок» длины 1 000 000, состоящий только из составных чисел?

43. Сколько среди трех последовательных натуральных чисел может быть простых?

44. Могут ли три последовательных нечетных числа быть простыми?

45. Найти все тройки последовательных нечетных чисел, каждое из которых является простым.

1.1.2. Свойства делимости

46. Делится ли $7^{13} + 7^{14} + 7^{15}$ на 19?

47. Доказать, что если целое число делится на 5 и на 18, то оно делится на 90.

48. Верно ли, что если натуральное число делится на два других натуральных числа, то оно делится и на их произведение?

49. Верно ли, что если число a делится на 2148 и на 537, то оно делится на произведение 2 148 537.

50. Верно ли, что если целое число делится на 345 и 671, то оно делится на 231 495?

51. Найти наименьшее общее кратное чисел 3674 и 236.

52. Доказать, что если a^2 делится на b^2 ($a, b \in \mathbb{Z}$), то a делится на b .

53. Доказать, что если a^2 делится на b^2 ($a, b \in \mathbb{Z}$), то a^3 делится на b^3 .

54. Доказать, что если a^3 делится на b^3 ($a, b \in \mathbb{Z}$), то a^2 делится на b^2 .

55. Найти натуральное число a , если известно, что из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:

- «Число a составное»,
- « a — делитель числа 2»,
- « a — делитель числа 41».

1.1.3. Деление с остатком

56. Имеется 900 теннисных мячей. Какое наименьшее их число нужно добавить, чтобы мячи можно было поровну распределить между 77 теннисистами?

57. Стаканчик с фруктовым десертом стоит 6 руб. 24 коп. Какое наибольшее число таких стаканчиков можно купить на 55 руб.?

58. Найти остаток от деления натурального числа на 5, если известно, что остаток от деления этого числа на 15 равен 8.

59. Остатки от деления натурального числа m на 7 и 8 равны 5. Найти остаток от деления числа m на 56.

60. Найти наименьшее натуральное число, большее 7, остатки от деления которого на 10 и 17 равны 7.

61. Существует ли натуральное число, остаток от деления которого на 12 равен 8, а остаток от деления на 8 равен 7?

62. Остатки от деления натурального числа n на 6 и 7 равны соответственно 2 и 3. Найти остаток от деления числа n на 42.

63. Остатки от деления натурального числа n на 8 и на 9 равны соответственно 5 и 6. Найти остаток от деления числа n на 72.

64. Найти наименьшее натуральное число, остатки от деления которого на 7 и 17 равны соответственно 3 и 13.

65. Остатки от деления числа k на 5 и 11 равны соответственно 3 и 8. Найти остаток от деления квадрата числа k на 55.

66. Остатки от деления числа k на 13 и 7 равны соответственно 2 и 5. Найти остаток от деления квадрата числа k на 91.

67. Может ли квадрат натурального числа при делении на 6 давать остаток 5?

68. Какой остаток дает точный квадрат при делении на 3?

69. Какие остатки может иметь точный квадрат после деления его на 4?

70. Сколько различных остатков дают точные квадраты при делении на 13?

71. Может ли точный квадрат при делении на 18 давать остаток 4?

72. Может ли точный квадрат при делении на 17 давать остаток 9?

73. Может ли точный квадрат при делении на 325 давать остаток 36?

74. Может ли точный куб при делении на 33 давать остаток 27?

75. Может ли точный куб при делении на 33 давать остаток 32?

76. Может ли точный куб при делении на 33 давать остаток 25?

77. Может ли девятая степень при делении на 444 давать остаток 443?

78. Может ли шестая степень при делении на 444 давать остаток 100?

79. Может ли пятая степень при делении на 444 давать остаток 243?

80. Может ли пятая степень при делении на 444 давать остаток 201?

81. Может ли двадцать пятая степень при делении на 444 давать остаток 1?

82. Может ли точный квадрат при делении на 89 давать остаток 32?

83. Может ли точный квадрат при делении на 39 давать остаток 10?

84. Найти натуральное число a , если известно, что из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:

«Число a делится на 26»,

«Остаток от деления числа a на 13 равен 7»,

« a — одно из чисел 58, 59, 60».

85. При перемножении двух натуральных чисел была допущена ошибка: цифра сотен в произведении увеличена на 2. При делении полученного произведения на меньший из множителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найти множители.

86. При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найти эти числа.

87. При умножении двух натуральных чисел, из которых одно на 94 больше другого, ученик ошибся, уменьшив в произведении число десятков на 4. При делении ошибочного произведения на больший из множителей он получил в частном 52, а в остатке 107. Найти меньшее из перемножаемых чисел.

1.2. Десятичная запись натуральных чисел

1.2.1. Основная теорема арифметики

88. Является ли точным квадратом число
10 000 000 000 000?

89. Является ли точным квадратом число
101 112 131 414 161 734?

90. Является ли точным квадратом число 309... 309, в котором группа цифр 309 повторяется 1309 раз?

91. Может ли быть точным кубом число, составленное только из цифр 4?

92. Может ли быть шестой степенью натурального числа число вида 2525...25?

93. Является ли число 65 875 234 834 степенью натурального числа с показателем, большим 1?

94. Может ли быть степенью натурального числа с показателем степени, большим 1, число вида $181818...18$?

95. Является ли число $98\ 569\ 856\ 985\ 698\ 569\ 856$ степенью натурального числа с показателем, большим 1?

96. Можно ли заменить в выражении

$$П \cdot Л \cdot Ю \cdot С = М \cdot И \cdot Н \cdot У \cdot С$$

буквы цифрами, отличными от нуля, так чтобы получилось верное равенство (различным буквам должны соответствовать разные цифры)?

97. Доказать, что

$$12^{11} + 4 \cdot 12^2 + 1 \neq 743\ 008\ 370\ 111.$$

98. Доказать, что

$$\frac{11\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111}{2\ 071\ 723} \neq 5\ 363\ 222\ 353.$$

99. Доказать, что

$$99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \neq 9\ 806\ 781\ 064\ 320.$$

1.2.2. Делимость и остатки

100. При каких n верно утверждение «Натуральное число делится на n в том и только в том случае, если сумма его цифр делится на n »?

101. Число $777...7$ составлено из 2005 цифр. Найти его однозначные делители.

102. Может ли число, составленное из одинаковых цифр, делиться на все однозначные числа?

103. Существует ли число, составленное из одинаковых цифр, которое делится на все однозначные числа, кроме 5?

104. Найти все пятизначные числа вида $\overline{67m1n}$ (m и n — цифры), которые делятся на 36.

105. Является ли точным квадратом число

1 002 003 004 005 006 007?

106. Является ли точным квадратом число 1308...1308, в котором группа цифр 1308 повторяется 1308 раз?

107. Какие натуральные числа в любой степени оканчиваются на одну и ту же цифру?

108. Верно ли равенство $125^2 = 15\,675$?

109. Для устного возведения в квадрат числа с последней цифрой 5 пользуются следующим приемом: число, записанное остальными цифрами, умножают на число, большее его на 1, и к результату приписывают 25: например, $65^2 = 4225$. Почему этот прием приводит к правильному результату?

110. Является ли точным квадратом число

234 567 891 011 121 314 151 617 181 920 212 223 242 526?

111. Может ли быть точным квадратом число, составленное только из цифр 1, но не равное 1?

112. Является ли точным квадратом число 55 560 156?

113. Является ли точным квадратом число 454545...45, где группа 45 повторяется 2005 раз?

114. Может ли число 747474...74, состоящее из миллиона групп 74, быть 352-й степенью натурального числа?

115. Может ли быть число вида 2525...25, отличное от 25, степенью натурального числа с показателем степени, большим 1?

116. Найти натуральное число a , если известно, что из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:

- 1) «число оканчивается цифрой 1»,
- 2) «число оканчивается цифрой 2»,
- 3) « a — одно из чисел 16 или 19».