

ПРЕДИСЛОВИЕ

На русском языке имеется уже ряд оригинальных и переводных сборников¹, преследующих в общем ту же цель, что и настоящая книга: оживить школьную арифметику введением в нее интересных задач, занимательных упражнений, любопытных теоретических и практических сведений. Знакомым с этой литературой хорошо известно, что большинство подобных книг черпает материал из одного и того же ограниченного фонда, накопленного столетиями; отсюда — близкое сходство этих сочинений, разрабатывающих, с различной детальностью, почти одни и те же темы. Но традиционный инвентарь математических развлечений достаточно уже исчерпан в нашей литературе. Новые книги этого рода должны привлекать новые сюжеты.

«Занимательная арифметика» представляет в большей своей части попытку предложить ряд новых, ранее не разрабатывавшихся сюжетов арифметических развлечений. Подыскание новых тем в столь многосторонне обследованной области — дело нелегкое: составитель не может здесь пользоваться коллективным трудом длинного ряда известных и неизвестных собирателей, а предоставлен лишь собственным силам. Поэтому к «Занимательной арифметике», как к первому опыту обновления традиционного материала подобных сборников, не должна прилагаться слишком строгая мерка.

Забываясь о том, чтобы сборник читался легко, не требуя чрезмерного напряжения, составитель избегал запутанных вопросов и включал преимущественно такой материал, который вполне посилен для большинства читателей.

¹ Среди них известный сборник Е.И. Игнатьева «В царстве смекалки» (из трех книг 2-я и 3-я составлены при моем участии) почти исчерпывает весь «классический» материал арифметических развлечений.

Предисловие

Хотя книга имеет в виду читателей, знакомых лишь с элементами арифметики, в ней найдутся страницы, небезыңтересные, быть может, и для более сведущих.

Я. Перельман



ГЛАВА ПЕРВАЯ

СТАРОЕ И НОВОЕ О ЦИФРАХ И НУМЕРАЦИИ ТАИНСТВЕННЫЕ ЗНАКИ

В марте 1917 г. жители Ленинграда (тогда — Петрограда) были немало озадачены и даже встревожены таинственными знаками, появившимися, неизвестно как, у дверей многих квартир. Молва приписывала этим знакам разнообразные значения. Те, которые мне пришлось видеть, имели форму черточек, чередующихся с крестами.

Пошли зловещие слухи о грабительских шайках, помечающих квартиры будущих жертв. «Комиссар временного правительства по г. Петрограду», успокаивая население, утверждал, что «таинственные знаки, которые чьей-то невидимой рукой делаются на дверях мирных обывателей в виде крестов, букв, фигур, как выяснилось по произведенному дознанию, делаются провокаторами и германскими шпионами»; он приглашал жителей эти знаки стирать и уничтожать, «а в случае обнаружения лиц, занимающихся этой работой, задерживать и направлять по назначению».

Таинственные черточки и зловещие кресты появились также у дверей моей квартиры и квартир моих соседей. Некоторый опыт в распутывании замысловатых задач помог мне, однако, разгадать нехитрый и совсем не страшный секрет этой тайнописи. Своими соображениями я поделился с согражданами, поместив в газете следующую заметку:

Таинственные знаки

«В связи с таинственными знаками, появившимися на стенах многих петроградских домов, небесполезно разъяснить смысл одной категории подобных знаков, которые, несмотря на зловещее начертание, имеют самое невинное значение. Я говорю о знаках такого типа:

+ ||| ++||| ++ +|||



Рис. 1. Таинственные знаки появились у дверей многих квартир.

Подобные знаки замечены во многих домах на черных лестницах у дверей квартир. Обычно знаки этого типа имеются у всех входных дверей данного дома, причем в пределах одного дома двух одинаковых знаков не наблюдается. Их мрачное начертание, естественно, внушает тревогу жильцам. Между тем, смысл их легко раскрывается, если сопоставить их с номерами соответствующих квартир. Так, например, приведенные выше знаки найдены мною у дверей квартир № 12, № 25 и № 33:

+	++	+++
12	25	33

Нетрудно догадаться, что кресты означают десятки, а палочки — единицы; так оказалось во всех без исключения случаях, которые мне приходилось наблюдать. Своеобразная нумерация эта, очевидно, принадлежит дворникам-китайцам¹, не понимавшим наших цифр. Появились эти знаки, конечно, давно, но только в дни Февральской революции обратили на себя внимание граждан².

¹ Их было много тогда в Петрограде. Позднее я узнал, что китайский иероглиф для 10 имеет как раз указанную форму креста (китайцы не употребляют наших «арабских» цифр).

² Читателю наших дней покажется, вероятно, очень странным, что знаки эти оставались до дней Февральской революции незамеченными. Напомню, однако, что большинство живших в квартирах с двумя входами пользовались обычно только парадной лестницей и впервые вышли на черную в дни революции, когда парадные двери были закрыты.

Таинственные знаки такого же очертания, но только не с прямыми, а с косыми крестами, обнаружены были и в таких домах, где дворниками служили пришедшие из деревень русские крестьяне. Здесь уже нетрудно было выяснить истинных авторов «тайнописи», вовсе не подозревавших, что их безыскусственные обозначения номеров квартир только теперь были замечены и вызвали такой переполох.

СТАРИННАЯ НАРОДНАЯ НУМЕРАЦИЯ

Откуда взяли петроградские дворники этот простой способ обозначения чисел: кресты — десятки, палочки — единицы? Конечно, не придумали этих знаков в городе, а привезли их из родных деревень. «Нумерация» эта давно уже в широком употреблении и понятна была каждому, даже неграмотному крестьянину. Восходит она, без сомнения, к глубокой древности и употребительна не только у нас. Не говоря уже о родстве с китайскими обозначениями, бросается в глаза и сходство этой упрощенной нумерации с римской: и в римских цифрах палочки означают единицы, косые кресты — десятки.

Любопытно, что эта народная нумерация была некогда у нас даже узаконена: по такой именно системе, только более развитой, должны были вестись сборщиками податей записи в податной тетради. «Сборщик, — читаем мы в старом «Своде законов», — принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деньги, должен сам, или через писаря, записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставляя количество принятой суммы цифрами и знаками. Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые, а именно:

десять рублей означать знаком	□
рубель	○
десять копеек	×
копейку	
четверть	—

«Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

□□○○○○○○○○××××× |||||≡

В другом месте того же тома «Свода законов» находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для тысячи рублей — в виде шестиконечной звезды с крестом в ней, и для ста рублей — в виде

колеса с 8 спицами. Но обозначения для рубля и десяти копеек здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

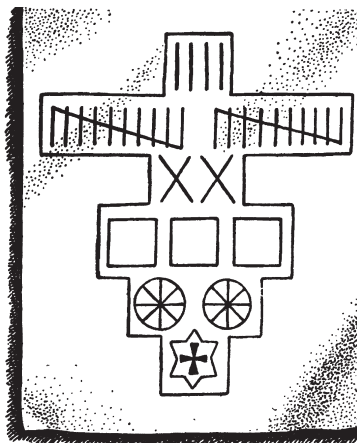


Рис. 2. Старинная запись на квитанции в уплате подати («ясака»).

Эта запись означает сумму 1 232 р. 24 к.

Вот текст закона об этих так называемых «ясачных знаках»:

«Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами, было показываемо особыми знаками число внесенных рублей и копеек так, чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания¹. Употребляемые в квитанции знаки означают: (звезда) тысяча рублей, (колесо) сто рублей, (квадрат) десять рублей, × один рубль, ||||| десять коп., | копейку.

«Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругом прямыми линиями». Например, 1 232 р. 24 к. изображают так, как показано на рис. 2.

Как видите, употребляемые нами арабские и римские цифры — не единственный способ обозначения чисел. В старину применялись у нас, да еще и теперь кое-где по деревням применяются другие системы письменного счисления, отдаленно сходные с римскими и совсем не сходные с арабскими цифрами.

Но и это еще не все способы изображения чисел, какие были в употреблении: многие купцы, например, имели свои секретные

¹ Это показывает, что описанные знаки были в широком употреблении среди населения.

знаки для числовых обозначений — так называемые торговые «меты». О них побеседуем сейчас подробнее.

СЕКРЕТНЫЕ ТОРГОВЫЕ «МЕТЫ»

В дореволюционное время на вещах, купленных у офеней или в частных магазинах, особенно провинциальных, можно было зачастую заметить непонятные буквенные обозначения вроде

а ве *в уо.*

Это не что иное, как цена вещи без запроса, которую торговец обозначал на товаре, но так, однако, чтобы ее не мог разгадать покупатель. Бросив взгляд на эти буквы, торговец сразу проникал в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называл покупателю цену с запросом.

Система обозначений была весьма проста. Торговец выбирал какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливались выбор на словах: *трудолюбие, правосудие, ярославецъ, миролюбецъ, Миралюбовъ*. Первая буква слова обозначала — 1, вторая — 2, третья — 3 и т.д.; десятой буквой обозначался ноль. С помощью этих условных букв-цифр торговец обозначал на товарах их цену, храня в строгом секрете «ключ» к своей системе прибылей.

Если, например, выбрано было слово

п р а в о с у д и е
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

то цена 4 р. 75 к. обозначалась так:

в уо.



Рис. 3. Тайнственные меты на книгах обозначали цену, поставленную предусмотрительным торговцем.

Иногда цена на товаре писалась в виде дроби; например на одной из купленных мною книг имеется обозначение

$$\frac{оe}{тpo}.$$

Это значит, при ключе «трудолюбие», что надо запросить 1 р. 25 к., сама же книга стоила 50 коп.

ПЕШКИ ВМЕСТО ЦИФР

После только что сказанного легко сообразить, что числа можно изображать не только с помощью цифр, но и с помощью любых иных знаков или даже предметов: карандашей, перьев, линеек, резинок и т.п., — надо только условиться приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры. Можно даже, ради курьеза, с помощью таких цифр-предметов изображать действия над числами: складывать, вычитать, умножать, делить.

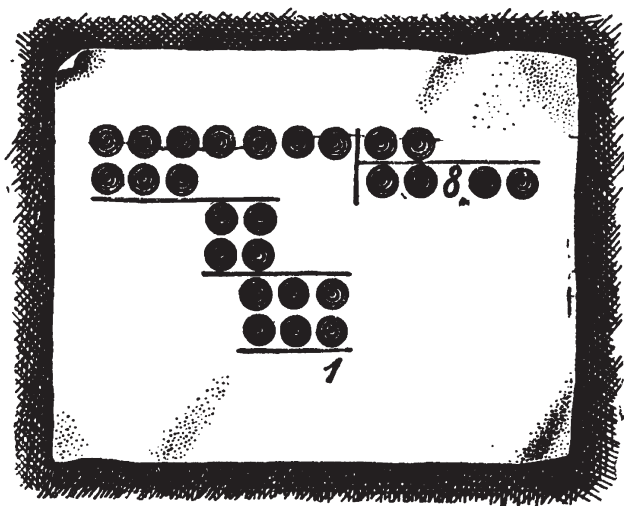


Рис. 4. Нелегко догадаться, какие цифры заменены здесь пешками.

В одном зарубежном шахматном журнале была предложена задача: раскрыть истинный смысл следующего примера деления чисел, в котором почти все цифры заменены пешками (на нашем рис. 4 — черными кружками). Из 28 цифр известны только две: одна (8) в частном и другая (1) в остатке. Казалось бы, доискаться значения прочих 26 цифр, обозначенных кружками, немислимо. Между тем это сравнительно несложная задача для каждого, кто

отчетливо представляет себе смысл отдельных операций, входящих в состав действия деления.

Вот какой ход рассуждений приводит нас к цели. Вторая цифра частного есть, конечно, 0. Это следует из того, что к остатку от первого вычитания снесена не одна цифра, а две: ясно, что после снесения первой цифры составилось число, меньшее делителя; а в таких случаях очередная цифра частного 0.

По сходным основаниям заключаем, что четвертая цифра частного также 0.

Всматриваясь в расположение кружочков, замечаем, что двузначный делитель, будучи умножен на 8, дает число двузначное; когда же его умножают на первую (пока неизвестную) цифру частного, получается число из трех цифр. Значит, эта первая цифра частного больше 8; такой цифрой может быть только 9.

Сходным образом устанавливаем, что и последняя цифра частного — 9.

Теперь частное определилось: 90 809. Остается раскрыть смысл делителя. Делитель состоит, мы знаем, из двух цифр; кроме того, расположение кружков говорит о том, что это двузначное число при умножении на 8 дает также двузначное число; при умножении же на 9 оно дает произведение, состоящее уже из трех цифр. Что же это за число? Производим испытания, начиная с наименьшего двузначного числа — 10:

$$10 \times 8 = 80$$

$$10 \times 9 = 90.$$

Число 10, как видим, не удовлетворяет требуемым условиям: оба произведения двузначные. Испытываем следующее двузначное число — 11:

$$11 \times 8 = 88$$

$$11 \times 9 = 99.$$

Число 11 также, очевидно, не годится: оба произведения снова двузначные. Испытываем 12:

$$12 \times 8 = 96$$

$$12 \times 9 = 108.$$

Число 12 удовлетворяет всем требованиям. Нет ли еще таких чисел? Испытаем 13:

$$13 \times 8 = 104$$

$$13 \times 9 = 117.$$

Оба произведения трехзначные; следовательно, 13 не годится. Ясно, что неподходящим являются и все числа большие, чем 13.

Итак, единственный возможный делитель — 12. Зная делитель, частное и остаток, легко находим делимое и восстанавливаем весь случай деления:

$$\text{итак, делимое} = 90\,809 \times 12 + 1 = 1\,089\,709.$$

Случай деления:

$$\begin{array}{r} 1089709 \quad | \quad 12 \\ \underline{108} \\ 97 \\ \underline{96} \\ 109 \\ \underline{108} \\ 1 \end{array}$$

Как видим, по двум известным цифрам нам удалось установить смысл 26 неизвестных цифр.

АРИФМЕТИКА ЗА ЗАВТРАКОМ

Перед нами ряд действий над числами, обозначенными предметами сервировки стола (рис. 5). Вилка, ложка, нож, кувшинчик, чайник, тарелка — все это знаки, каждый из которых заменяет определенную цифру.

Глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т.п., попробуйте угадать: какие именно числа здесь обозначены?

С первого взгляда задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы, как сделал некогда француз Шамполион. Но ваша задача гораздо легче: вы ведь знаете, что числа здесь хотя и обозначены вилками, ножами, ложками и т.п., но написаны по десятичной системе счисления; т.е. вам известно, что тарелка, стоящая на втором месте (считая справа), есть цифра десятков, что предмет направо от нее — цифра единиц, а по левую сторону — цифра сотен. Кроме того, вы знаете, что расположение

всех этих предметов имеет определенный смысл, который вытекает из сущности арифметических действий, производимых над обозначенными ими числами. Все это может значительно облегчить вам решение предложенной задачи.

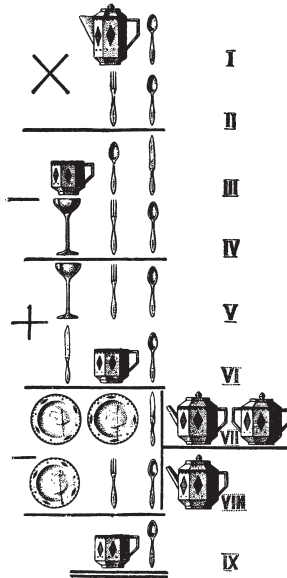


Рис. 5. Чашка, ложка и вилка

также могут быть использованы в арифметике.

Решение. Вот как можно доискаться значения расставленных здесь предметов. Рассматривая первые три ряда на нашем рисунке, вы видите, что «ложка», умноженная на «ложку», дает «нож». А из следующих, рядов видно, что «нож» без «ложки» дает «ложку» или что «ложка» + «ложка» = «ножу». Какая же цифра дает одно и то же и при удвоении и при умножении сама на себя? Это может быть только 2, потому что $2 \times 2 = 2 + 2$. Таким образом узнаем, что «ложка» = 2 и, следовательно, «нож» = 4.

Теперь идем дальше. Какая цифра обозначена «вилкой»? Попробуем разгадать это, присмотревшись к первым трем рядам, где «вилка» участвует в умножении, и к рядам III, IV и V, где та же «вилка» фигурирует в действии вычитания. Из группы вычитания вы видите, что, отнимая в разряде десятков «вилку» от «ложки», получаем в результате «вилку», т.е. при вычитании 2 минус «вилка» получается «вилка». Это может быть в двух случаях: либо «вилка» = 1, и тог-

да $2 - 1 = 1$; либо же «вилка» = 6, и тогда, вычитая 6 из 12 (единица высшего разряда занимается у «чашки»), получаем 6.

Что же выбрать: 1 или 6?

Испытаем, годится ли 6 для «вилки» в других действиях. Обратите внимание на умножение чисел, стоящих в *I* и *II* рядах. Если «вилка» = 6, то во втором ряду стоит число 62 (мы уже знаем, что «ложка» = 2). Нетрудно понять, что в таком случае в *I* ряду должно стоять число 12, т.е. «кувшинчик» обозначает цифру 1. В самом деле, если бы «кувшинчик» обозначал цифру 2, или какую-либо большую цифру, произведение чисел *I* и *II* рядов было бы четырехзначным числом, а не трехзначным, как должно быть. Итак, если «вилка» = 6, то в *I* ряду стоит число 12, а во *II* ряду — 62. Их произведение есть $12 \times 62 = 744$.

Но этого не может быть, так как цифра десятков этого произведения есть «ложка», т.е. 2, а не 4, как получилось у нас. Значит, нельзя было допустить, что «вилка» = 6, а надо было принять ее равной единице.

Узнав путем таких — довольно, правда, долгих — поисков, что «вилка» обозначает цифру 1, мы дальше уже идем более уверенно и быстро. Из действия вычитания в *III* и *IV* рядах видим, что «чашка» обозначает либо 6, либо 8. Но 8 приходится отвергнуть, потому что тогда вышло бы, что «бокальчик» = 4, а мы знаем, что цифра 4 обозначена «ножом». Итак, «чашка» обозначает цифру 6, а следовательно, «бокальчик» — цифру 3.

Какая же цифра обозначена «кувшинчиком» в *I* ряду? Это легко узнать, раз нам известно произведение (*III* ряд, 624) и один из множителей (*II* ряд, 12). Разделив 624 на 12, получаем 52. Следовательно, «кувшинчик» = 5.

Значение «тарелки» определяется просто: в *VII* ряду «тарелка» = «вилке» + «чашка» = «бокальчику» + «нож»; т.е. «тарелка» = $1 + 6 = 3 + 4 = 7$.

Остается разгадать цифровое значение «чайника» и «сахарницы» в *VII* ряду. Так как для цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 предметы уже найдены, то остается выбирать только между 8, 9 и 0. Подставив в действие деления, изображенное в последних трех рядах, соответствующие цифры вместо предметов, получим такое расположение (буквами ч и с обозначены «чайник» и «сахарница»):

$$\begin{array}{r} 774 : cs = c \\ \underline{712} \\ 62 \end{array}$$

Число 712, мы видим, есть произведение двух неизвестных чисел $чс$ и $ч$, которые, конечно, не могут быть ни нулем, ни оканчиваться нулем: значит, ни $ч$, ни $с$ не есть ноль. Остаются два предположения: $ч = 8$ и $с = 9$, или же, наоборот, $ч = 9$ и $с = 8$. Но перемножив 98 на 8, мы не получаем 712; следовательно, «чайник» обозначает 8, а «сахарница» 9 (действительно: $89 \times 8 = 712$).

Итак, мы путем нехитрых арифметических вычислений разгадали иероглифическую надпись из предметов столовой сервировки:

кувшин = 5	чашка = 6	сахарница = 9
ложка = 2	бокальчик = 3	тарелка = 7
вилка = 1	чайник = 8	

А весь ряд арифметических действий, изображенный этой оригинальной сервировкой, приобретает такой смысл:

$$\begin{array}{r}
 \times 52 \\
 \underline{12} \\
 \underline{624} \\
 \underline{312} \\
 + 312 \\
 \underline{462} \\
 774 : 89 = 8 \\
 \underline{712} \\
 62
 \end{array}$$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

То, что я называю арифметическими ребусами, — занимательная игра американских школьников: отгадывание задуманного слова решением задачи вроде той, какую мы решили в предыдущей статье. Загадывающий задумывает слово, состоящее из 10 неповторяющихся букв, например: «трудлюбие», «специально», «просвещать». Приняв буквы задуманного слова за цифры, загадывающий изображает посредством этих букв какой-нибудь случай деления. Если задумано слово «просвещать», то можно взять такой пример деления:

<i>п р о с в е щ а т ь</i>	$123564 \quad \overline{3548}$	<i>п р о в е с</i> $ \overline{овса}$
1 2 3 4 5 6 7 8 0 9	$\underline{10644}$	$\underline{п ь е с с}$ <i>ос</i>
делимое — <i>провес</i> , 123564	17124	<i>п щ п р с</i>
делитель — <i>овса</i> , 3548	$\underline{14192}$	$\underline{п с п т р}$
	2932	<i>р т о р</i>

Можно взять и другие слова:

делимое — *восстать*, 53449890
 делитель — *свет*, 4569

<i>восстать</i>	<i>свет</i>
<i>свет</i>	<i>п п е т а</i>
<i>щ ц в е т</i>	
<i>с в е т</i>	
<i>о п т ь а</i>	
<i>р щ с п с</i>	
<i>с с т с т</i>	
<i>с п п р п</i>	
<i>о а р а ь</i>	
<i>о е в в р</i>	
<i>п щ а</i>	

Буквенное изображение определенного случая деления вручается отгадчику, который и должен по этому, на первый взгляд бессмысленному, набору букв угадать задуманное слово. Как следует в подобных случаях доискиваться числового значения букв, читатель уже знает: мы объяснили это, когда решали задачу предыдущей статьи. При некотором терпении можно успешно разгадывать эти арифметические ребусы, если только пример достаточно длинен и дает необходимый материал для догадок и испытаний. Если же выбраны слова, дающие чересчур короткий случай деления, например:

т р у д о л ю б и е
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
 делимое — *блюдо*, 86745
 делитель — *труд*, 1234

<i>блюдо</i>	<i>труд</i>
<i>б л у б</i>	<i>ю е</i>
<i>у л о</i>	

то разгадывание очень трудно. В подобных случаях надо просить загадывающего продолжить деление до сотых или тысячных долей, т.е. получить в частном еще два или три десятичных знака. Вот пример деления до сотых долей:

с п е ц и а л ь н о
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
 делимое — *палец*, 26734
 делитель — *пила*, 2576

<i>палец</i>	<i>пила</i>
<i>пила</i>	<i>с о , е л</i>
<i>н л ц о</i>	
<i>л л п ь</i>	
<i>п о с п о</i>	
<i>с ь о е п</i>	
<i>п о ь ь</i>	