

УДК 373.5:514  
ББК 22.151я721  
В49

**Виноградова, Татьяна Михайловна.**

В49 Геометрия. 7—11 классы / Т. М. Виноградова. — Москва : Эксмо, 2019. — 112 с. — (В помощь старшекласснику. Алгоритмы решения задач).

ISBN 978-5-04-093534-5

В пособии представлены алгоритмы решения типовых задач и примеров по геометрии, изучаемых в 7—11-х классах. Перед каждым алгоритмом помещен краткий теоретический блок по теме с необходимыми правилами и формулами. После алгоритма приведен пример решения задачи или примера, а также задания для самостоятельного решения.

Пособие адресовано учащимся 7—11-х классов, учителям и родителям, помогающим ребенку в выполнении домашних заданий.

УДК 373.5:514  
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-04-093534-5

© Виноградова Т.М., 2019  
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2019

Все права защищены. Книга или любая ее часть не может быть скопирована, воспроизведена в электронной или механической форме, в виде фотокопии, записи в память ЭВМ, репродукции или каким-либо иным способом, а также использована в любой информационной системе без получения разрешения от издателя. Копирование, воспроизведение и иное использование книги или ее части без согласия издателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.

Справочное издание  
анықтамалық баспа

Для старшего школьного возраста  
мектеп жасындағы ересек балаларға арналған

В ПОМОЩЬ СТАРШЕКЛАССНИКУ. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Виноградова Татьяна Михайловна**

**ГЕОМЕТРИЯ**

**7—11 классы**

(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*  
Ведущий редактор *Т. Судакова*  
Художественный редактор *И. Успенский*

**ООО «Издательство «Эксмо»**

123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел.: 8 (495) 411-68-86.

Home page: [www.eksmo.ru](http://www.eksmo.ru) E-mail: [info@eksmo.ru](mailto:info@eksmo.ru)

Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.

Тел.: 8 (495) 411-68-86.

Home page: [www.eksmo.ru](http://www.eksmo.ru) E-mail: [info@eksmo.ru](mailto:info@eksmo.ru).

Тауар белгісі: «Эксмо»

**Интернет-магазин** : [www.book24.ru](http://www.book24.ru)

**Интернет-дуken** : [www.book24.kz](http://www.book24.kz)

Импортер в Республику Казахстан ТОО «РДЦ-Алматы».

Қазақстан Республикасындағы импорттаушы «РДЦ-Алматы» ЖШС.

Дистрибьютор и представитель по приему претензий на продукцию,  
в Республике Казахстан: ТОО «РДЦ-Алматы»

Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды  
қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС.

Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.

Тел.: 8 (727) 251-59-90/91/92; E-mail: [RDC-Almaty@eksmo.kz](mailto:RDC-Almaty@eksmo.kz)

Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.

Сертификация туралы ақпарат сайтта: [www.eksmo.ru/certification](http://www.eksmo.ru/certification)

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ  
о техническом регулировании можно получить на сайте Издательства «Эксмо»  
[www.eksmo.ru/certification](http://www.eksmo.ru/certification)

Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Продукция соответствует требованиям ТР ТС 007/2011

Дата изготовления / Подписано в печать 19.12.2018. Формат 70x100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,07.

Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-04-093534-5  
  
9 785040 935345 >



EKSMO.RU  
новинки издательства



# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР</b> . . . 5	
Точка и прямая. Отрезок. Измерение отрезков . . . . .	5
Полуплоскости. Полупрямая. Угол. Откладывание отрезков и углов . . .	12
Треугольник. Существование треугольника, равного данному . . . . .	18
Параллельные прямые. Смежные и вертикальные углы. Свойство смежных и вертикальных углов . . . . .	19
Виды треугольников. Высота, биссектриса и медиана треугольника . . .	24
Сумма углов треугольника. . . . .	30
Внешний угол треугольника . . . . .	31
Признаки и свойства параллельности прямых . . . . .	34
Окружность, вписанная в треугольник и описанная около треугольника . . . . .	36
Четырехугольники . . . . .	41
<b>ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА</b> . . . . .	45
Прямоугольный треугольник . . . . .	45
Теорема Пифагора . . . . .	45
<b>ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ</b> . . . . .	48
Декартова система координат на плоскости . . . . .	48
Декартова система координат в пространстве . . . . .	50
<b>УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ</b> . . . . .	51
Уравнение прямой . . . . .	51
Уравнение окружности на плоскости . . . . .	51
Взаимное расположение прямых по их уравнениям . . . . .	53
<b>ВЕКТОРЫ</b> . . . . .	55
Векторы на плоскости . . . . .	55
<b>ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ</b> . . . . .	58
Признаки подобия треугольников . . . . .	58
Свойства подобных треугольников . . . . .	58
Свойства преобразования подобия . . . . .	59
<b>ВПИСАННЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ УГЛЫ</b> . . . . .	62
Плоский угол . . . . .	62
Дополнительный угол . . . . .	62
Центральный угол . . . . .	62
Дуга окружности . . . . .	64
<b>РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ</b> . . . . .	65
Теорема косинусов . . . . .	65
Теорема синусов . . . . .	66

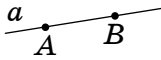
<b>ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ</b> .....	69
Площадь треугольника .....	69
Площади четырехугольников .....	71
<b>ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ</b> .....	74
Призма .....	74
Параллелепипед .....	75
Пирамида .....	77
<b>ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ</b> .....	80
Цилиндр .....	80
Конус .....	81
Шар. Сфера .....	82
<b>ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ «ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО»</b> .....	85
<b>СПИСОК АЛГОРИТМОВ</b> .....	91
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b> .....	95

# ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР



## ТОЧКА И ПРЯМАЯ. ОТРЕЗОК. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ


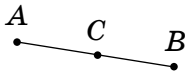
Основные геометрические фигуры на плоскости — это точка и прямая.

Точка $A$	Прямая $a$ , или прямая $AB$ , или прямая $BA$
$\cdot A$	

**Аксиома** — утверждение, которое принимается без доказательства.

<p><b>Аксиома I.</b> Основные свойства принадлежности точек и прямых на плоскости</p>
<p>Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, которые ей не принадлежат. Через любые две точки можно провести прямую и только одну.</p>

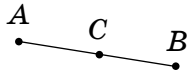
**Отрезок** — часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих между двумя ее данными точками — концами отрезка.

Отрезок $MN$ , или отрезок $NM$	$C \in AB$ (точка $C$ принадлежит отрезку $AB$ ), или точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$
	

<p><b>Аксиома II.</b> Основные свойства расположения точек на прямой</p>
<p>Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.</p>

**Аксиома III.****Основные свойства измерения отрезков**

Каждый отрезок имеет определенную длину, бóльшую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой своей точкой.



$$AB = AC + BC$$

**1****Нахождение длины отрезка, если известны длины его частей****АЛГОРИТМ****1**

Найти длину отрезка, сложив длины его частей (согласно аксиоме III).

**2**

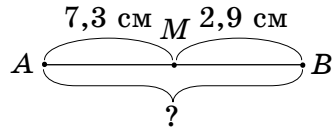
Записать ответ.

**ПРИМЕР**

Найти длину отрезка  $AB$ , если точка  $M$  делит его на две части длиной 7,3 см и 2,9 см.

*Решение.*

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad AB &= AM + MB; \\ AB &= 7,3 + 2,9 = 10,2 \text{ (см)}. \end{aligned}$$



$$\textcircled{2} \quad \text{Ответ: } 10,2 \text{ см.}$$

**ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО**

- Точка  $E$  делит отрезок  $OP$  на части длиной 10 дм и 1,1 дм. Найти длину отрезка  $OP$ .
- Найти длину отрезка  $EF$ , если точка  $K$  лежит между точками  $E$  и  $F$ ,  $EK = 8,7$  м,  $KF = 3,5$  м.
- Отрезок  $AB$  разделен точкой  $X$  на части длиной 0,875 дм и 1,007 дм. Найти длину  $AB$ .
- На отрезке  $QM$  взята точка  $F$ ,  $QF = 801$  м,  $FM = 19$  м. Найти длину  $QM$ .

## Нахождение длины части отрезка, если известна длина всего отрезка и одной из его частей

# 2

### АЛГОРИТМ

1 Записать основные свойства измерения отрезков.



2 Выразить из записанного равенства длину неизвестной части.



3 Вычислить длину неизвестной части отрезка.



4 Записать ответ.

### ПРИМЕР



На отрезке  $AB$  взяли точку  $M$  так, что  $AM = 7,3$  см. Найти длину отрезка  $MB$ , если  $AB = 11,7$  см.

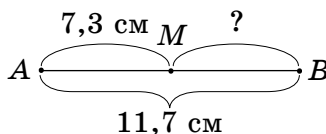
*Решение.*

1  $AB = AM + MB;$

2  $MB = AB - AM.$

3  $MB = 11,7 - 7,3 = 4,4$  (см).

4 *Ответ:* 4,4 см.



### ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО



1. Найти длину отрезка  $KE$ , если точка  $K$  принадлежит отрезку  $NE$ ,  $NE = 18$  м,  $EK = 7,2$  м.
2. На отрезке  $CD$  взяли точку  $B$  так, что  $BC = 9,7$  дм. Найти длину отрезка  $BD$ , если  $CD = 11,3$  дм.
3. Точка  $A$  делит отрезок  $DP$  на две части. Найти длину отрезка  $AD$ , если  $AP = 5,9$  см,  $DP = 6,3$  см.
4. Найти длину отрезка  $KN$ , если  $N \in KO$ ,  $KO = 29$  дм,  $NO = 18$  дм.

# 3

## Определение расположения точек на прямой

### АЛГОРИТМ

①

Из данных отрезков выбрать тот, длина которого равна сумме длин двух других.



②

Сделать вывод о точке, лежащей между двумя другими, опираясь на аксиому III.



③

Записать ответ.



### ПРИМЕР

Три точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат на одной прямой. Известно, что  $BC = 3,5$  см,  $BD = 4,6$  см,  $CD = 8,1$  см. Какая из трех точек  $B$ ,  $C$ ,  $D$  лежит между двумя другими?

*Решение.*

①

Очевидно, что  $3,5 + 4,6 = 8,1$  (см).

②

Значит,  $BC + BD = CD$ . Поэтому точка  $B$  принадлежит отрезку  $CD$ , так как выполняется аксиома III. Следовательно, точка  $B$  лежит между точками  $C$  и  $D$ .

③

**Ответ:** точка  $B$  лежит между точками  $C$  и  $D$ .



### ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Определить, какая из трех точек  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , принадлежащих одной прямой, лежит между двумя другими, если  $KL = 10,9$  дм;  $KM = 3,8$  дм;  $ML = 7,1$  дм.
2. Точки  $E$ ,  $A$ ,  $B$  лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими, если  $EB = 3,9$  м;  $EA = 0,2$  м;  $AB = 3,7$  м?
3. Известно, что  $AB = 0,027$  дм,  $AC = 0,1$  дм,  $BC = 0,073$  дм. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?



**Нахождение длин частей отрезка с помощью уравнения, если в условии указано, что они сравниваются**

**4**

**АЛГОРИТМ**

① Записать основное свойство измерения отрезков для условия данной задачи.



② Длину меньшей части обозначить  $x$ .



③ Выразить длину большей части отрезка через  $x$  (если она *больше на* некоторую величину, то длина большей части отрезка равна сумме  $x$  и этой величины, а если она *больше в несколько раз* меньшей части, то длина большей части отрезка равна произведению  $x$  и этого количества раз).



④ Составить уравнение.



⑤ Решить полученное уравнение.



⑥ Записать длину меньшей части отрезка и вычислить длину большей части.



⑦ Записать ответ.

**ПРИМЕР**

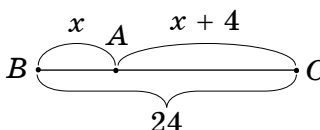


Точка  $A$  принадлежит отрезку  $BC$ , длина которого равна 24 см. Найти длину отрезков  $AB$  и  $AC$ , если:

- 1) отрезок  $AB$  на 4 см меньше отрезка  $AC$ ;
- 2) отрезок  $AB$  в 3 раза больше отрезка  $AC$ .

**Решение. Условие 1**

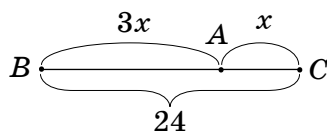
- ①  $BC = AB + AC$  (аксиома III).
- ② Пусть  $AB = x$  см.
- ③ Тогда  $AC = (x + 4)$  см.



- ④  $x + x + 4 = 24$ .  
 ⑤  $2x = 24 - 4$ ;  $2x = 20$ ;  $x = 20 : 2$ ;  $x = 10$ .  
 ⑥ Итак,  $AB = 10$  см,  $AC = 10 + 4 = 14$  (см).  
 ⑦ **Ответ:** 10 см; 14 см.

**Условие 2**

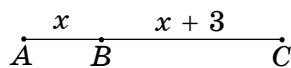
- ①  $BC = AB + AC$  (аксиома III).  
 ② Пусть  $AC = x$  см.  
 ③ Тогда  $AB = 3x$  см.  
 ④  $x + 3x = 24$ .  
 ⑤  $4x = 24$ ;  $x = 24 : 4$ ;  $x = 6$ .  
 ⑥ Итак,  $AC = 6$  см,  $AB = 3 \cdot 6 = 18$  (см).  
 ⑦ **Ответ:** 18 см; 6 см.



**ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО**

- Точка  $E$  принадлежит отрезку  $AB$  длиной 25 дм. Найти длины отрезков  $AE$  и  $BE$ , если длина отрезка  $AE$  на 7 см больше длины отрезка  $BE$ .
- Точка  $K$  принадлежит отрезку  $AC$  длиной 36 м. Найти длины отрезков  $AK$  и  $CK$ , если длина отрезка  $AK$  в 8 раз меньше длины отрезка  $CK$ .
- На отрезке  $DN$  отметили точку  $F$ . Разность длин отрезков  $NF$  и  $DF$  равна 8 мм. Найти  $NF$  и  $DF$ , если  $DN = 32$  мм.

**Помни!**



$AB$  меньше  $BC$  на 3,  
 или  $BC$  больше  $AB$  на 3,  
 или разность  $BC$  и  $AB$  равна 3.

**5**

**Нахождение длин частей отрезка, если он делится своей точкой на части, пропорциональные данным числам**

**АЛГОРИТМ**

- ① Записать основное свойство измерения отрезков (аксиома III) для условия данной задачи.



- ② Обозначить за  $x$  величину одной части отрезка.



**3**

Выразить длину частей отрезка через  $x$ , умножив  $x$  на соответствующие пропорциональные числа.

**4**

Составить уравнение.

**5**

Решить уравнение.

**6**

Вычислить длины частей отрезка.

**7**

Записать ответ.

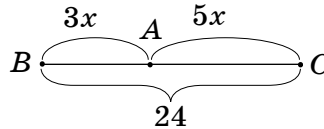
**ПРИМЕР**

Точка  $A$  принадлежит отрезку  $BC$ , длина которого равна 24 см. Найти длины отрезков  $AB$  и  $AC$ , если  $AB : AC = 3 : 5$ .

*Решение.*

①  $BC = AB + AC$  (аксиома III).

② Пусть  $x$  см — величина одной части.



③ Тогда  $AB = 3x$  см,  $AC = 5x$  см.

④  $3x + 5x = 24$ .

⑤  $8x = 24$ ;  $x = 24 : 8$ ;  $x = 3$ .

⑥ Итак,  $AB = 3 \cdot 3 = 9$  (см);  $AC = 5 \cdot 3 = 15$  (см).

⑦ **Ответ:** 9 см; 15 см.

**ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО**

1. На отрезке  $AB$  отметили точку  $D$  так, что  $AD : DB = 7 : 11$ . Найти длины отрезков  $AD$  и  $DB$ , если  $AB = 54$  см.
2. Точка  $N$  принадлежит отрезку  $EF$  длиной 88 дм. Известно, что длины отрезков  $EN$  и  $FN$  относятся как  $7 : 4$ . Найти  $EN$  и  $FN$ .
3. Точка  $M$  делит отрезок  $AK$  в отношении  $11 : 15$ . Найти длины отрезков  $AM$  и  $KM$ , если  $AK = 130$  мм.