

И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

Под общей редакцией
академика РАН **В. А. Ильина**

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

**Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru**

Москва ■ Юрайт ■ 2018

Авторы:

Садовничая Инна Викторовна — доцент, доктор физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Фоменко Татьяна Николаевна — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Ответственный редактор:

Ильин Владимир Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, академик МАН ВШ, лауреат Государственной премии СССР и Премии президента Российской Федерации в области образования.

Рецензенты:

Тихомиров В. В. — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики, заместитель декана по учебно-методической работе факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Фомичев В. В. — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Садовничая, И. В.

С14 Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной : учеб. пособие для СПО / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко ; под общ. ред. В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 115 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-06337-0

Данное учебное пособие посвящено теоретическим и практическим аспектам темы «Предел и непрерывность функции одной переменной», изучаемой в рамках программы курса математического анализа.

Пособие содержит разделы, посвященные понятию функции одной переменной, понятию предела функции, непрерывности в точке и на множестве и их применению в различных задачах анализа. Для лучшего усвоения материала приводится ряд иллюстраций, а также набор задач по рассматриваемой теме, часть из которых излагается с полным решением, а часть дается для самостоятельной работы студентов.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, преподавателей и всех, кто желает самостоятельно изучить данную тему или более подробно с ней ознакомиться.

УДК 517(075.32)

ББК 22.161я723



Delphi Law Company

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав. Правовую поддержку издательства обеспечивает юридическая компания «Дельфи».

- © Садовничая И. В., Фоменко Т. Н., 2012
- © Садовничая И. В., Фоменко Т. Н., 2018, с изменениями
- © ООО «Издательство Юрайт», 2018

ISBN 978-5-534-06337-0

Оглавление

Предисловие	4
Глава 1. Предел функции.....	6
§1. Понятие предела функции	6
§2. Асимптотическое сравнение функций. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	17
Глава 2. Непрерывность функции	22
§1. Понятие непрерывности. Локальные свойства непрерывных функций	22
§2. Глобальные свойства непрерывных функций	29
§3. Монотонные функции	31
§4. Основные элементарные функции	36
§5. Замечательные пределы.....	50
§6. Равномерная непрерывность функции.....	54
§7. Графики основных элементарных функций	56
Глава 3. Задачи.....	69
§1. Определения предела (предельного значения) функции	69
§2. Простейшие приемы вычисления пределов.....	76
§3. Вычисление пределов функций с помощью I и II замечательных пределов	80
§4. Вычисление пределов на бесконечности.....	86
§5. Асимптотическое сравнение функций. Символика «о-малое» и «О-большое»	89
§6. Выделение главного члена (главной части) определенного вида у заданной функции.....	94
§7. Отыскание и классификация точек разрыва графика функции	100
§8. Равномерная непрерывность функции.....	105
Список литературы	111
Новые издания по дисциплине «Математический анализ» и смежным дисциплинам	113

Предисловие.

Уважаемые читатели!

Данный учебник содержит материал по теме: «Предел и непрерывность функции одной переменной» в объеме программы курса математического анализа для студентов математических специальностей Ссузов. Предполагается, что читатель знаком с теорией вещественных чисел и последовательностей.

В книге три главы. В каждой главе своя двойная нумерация определений, всех утверждений, а также задач, с указанием номера параграфа.

В первой и второй главах излагается теоретический материал по теме «Предел и непрерывность функции одной переменной». Для лучшего восприятия материала мы поместили несколько рисунков, примеров и замечаний, разъясняющих те или иные понятия и утверждения.

В третьей главе помещены подборки задач по всем разделам первых двух глав. Наряду с вычислительными задачами, приводится ряд задач на доказательство. Мы полагаем, что их решение является одной из наиболее эффективных форм усвоения теоретического материала и будет очень полезным для студентов при подготовке к экзаменам. При этом в каждом параграфе часть задач приводится с подробными решениями, а остальные даются для самостоятельной работы читателей. Все задачи снабжены ответами.

Список литературы в конце книги содержит учебники и задачники, которые использовались при составлении данного учебника, а также некоторые источники для более подробного знакомства с изложенными в книге темами.

Книга написана на основе многолетнего чтения авторами лекций и ведения семинарских занятий по математическому анализу на факультете ВМК МГУ. Предназначена,

в первую очередь, студентам Ссузов и первых курсов ВУЗов, обучающихся по математическим и естественнонаучным специальностям, но может быть полезна и школьникам старших классов, школьным учителям, преподавателям ВУЗов и всем, интересующимся данной темой.

В результате изучения раздела «предел и непрерывность функции одной переменной» дисциплины «математический анализ» читатели будут знать основные термины и факты математического анализа, связанные с понятиями предела и непрерывности функции одной переменной, а также идеи и основные принципы доказательства соответствующих теорем.

Они будут уметь самостоятельно проводить исследования с целью выяснения истинности различных математических утверждений, решать вычислительные задачи, обосновывая свои выкладки строгими логическими заключениями. При этом они будут владеть основными приемами доказательств по данной тематике, терминологией и логикой определений и формулировок теорем.

Желаем удачи и увлекательного путешествия в мир математического анализа!

И.В.Садовничая, Т.Н.Фоменко

В результате изучения раздела «Предел и непрерывность функции одной переменной» студенты должны освоить:

трудовые действия

владеть основными приемами доказательств по данной тематике;

владеть терминологией и логикой определений и формулировок теорем;

необходимые умения

самостоятельно проводить исследования с целью выяснения истинности различных математических утверждений;

необходимые знания

основные термины и факты математического анализа, связанные с понятиями предела и непрерывности функции одной переменной.

Глава 1. Предел функции

§1. Понятие предела функции.

Определение 1.1. Если каждому элементу x из множества $X \subseteq \mathbb{R}$ ставится в соответствие по известному закону f некоторое (единственное) число $y \in \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве X задана **функция** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. При этом обозначают: $y = f(x)$. Часто, говоря о функции f , пишут: «задана функция $y = f(x)$ ».

Число x называется **аргументом** или (**независимой**) **переменной**; множество $X = X_f$ — **областью определения** функции f ; число $y = f(x)$ — (**частным**) **значением** функции f в точке x ; множество $Y = f(X_f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X_f, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}$ — **областью изменения** или **множеством значений** функции f . Часто используются обозначения: $X = D_f$, $Y = E_f$.

Графиком функции называется множество точек плоскости, абсциссы которых равны допустимым значениям аргумента x , а ординаты — соответствующим значениям функции y , то есть график функции f — это множество $\Gamma_f = \{(x, y) \in X_f \times \mathbb{R} \mid x \in X_f, y = f(x)\}$.

Отождествляя функцию f с ее графиком Γ_f , можно понимать ее как **отображение**, т.е. подмножество Γ_f произведения $X_f \times \mathbb{R}$ такое, что для любого $x \in X_f$ существует единственная пара $(x, y) \in \Gamma_f \subseteq X_f \times \mathbb{R}$, где $y = f(x)$ (определение отображения см., например, в [4]).

Определение 1.2. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Множество $U_\delta(a) \setminus \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ будем называть **проколотой δ -окрестностью** точки a и обозначать $\mathring{U}_\delta(a)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X_f , $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка множества X_f .

Определение 1.3 (предел функции по Гейне). Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом** или **предельным значением** функции $y = f(x)$ в точке a , если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\{x_n\}$ сходится к a при $n \rightarrow +\infty$, причем $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b .

Определение 1.4 (предел функции по Коши). Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом** или **предельным значением** функции $y = f(x)$ в точке a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначения: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$.

Теорема 1.1. Определения 1.3 и 1.4 эквивалентны.

Доказательство. 1) Предположим, что выполнено определение предела по Коши. Выберем произвольную последовательность $\{x_n\}$ аргументов, такую, что $\{x_n\}$ сходится к a , но $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое вещественное число. Тогда (в силу определения по Коши) существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, то найдется натуральный номер $N = N(\delta)$ такой, что $0 < |x_n - a| < \delta$, то есть $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ при всех $n \geq N$. Значит, для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, и следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b . Мы показали, что, если выполнено определение предела функции по Коши, то выполнено и определение по Гейне.

2) Предположим теперь, что определение по Коши не

выполнено. Это означает, что существует такое вещественное число $\varepsilon > 0$, что для любого положительного числа $\delta \in \mathbb{R}$ найдется точка $x = x_\delta \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$, для которой будет иметь место неравенство $|f(x) - b| \geq \varepsilon$. Обозначим $\delta_n = 1/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Получим, что для любого натурального n существует точка $x_n \in X_f$ такая, что $0 < |x_n - a| < 1/n$, но $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ аргументов сходится к a , но соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции не сходится к b . Значит, число b не является пределом функции и в смысле определения по Гейне.

Итак, показано, что если определение по Коши не выполнено, то и определение по Гейне тоже не выполнено. Это означает, что если определение по Гейне выполнено, то и определение по Коши тоже выполнено. $\square$

Пример 1.1. Рассмотрим функцию $f(x) = x$. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$, так как для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов, такой, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, будет выполнено равенство: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

Бесконечные пределы, односторонние пределы, пределы на бесконечности

Выше определен предел функции как число $b \in \mathbb{R}$. Определим теперь понятие бесконечного предела.

Определение 1.5 (по Гейне). Предел функции $y = f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$ **равен** $\infty(+\infty$ или $-\infty)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\{x_n\}$ сходится к a при $n \rightarrow +\infty$, и при этом $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции стремится к $\infty(+\infty$ или $-\infty)$. Обозначения: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty(+\infty$ или $-\infty)$ или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty(+\infty$ или $-\infty)$.

Определение 1.6 (по Коши). *Предел функции $y = f(x)$ в точке a равен ∞ ($+\infty$ или $-\infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ выполнено: $|f(x)| > \varepsilon$ ($f(x) > \varepsilon$ или $f(x) < -\varepsilon$). Обозначения: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$) или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$).*

Определения 1.5 и 1.6 эквивалентны. Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 1.1.

Введем понятие правого (левого) предела функции. Потребуем, чтобы для любого $\delta > 0$ множество $(a, a + \delta) \cap X_f$ ($(a - \delta, a) \cap X_f$) содержало хотя бы один элемент.

Определение 1.7 (по Гейне). *Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = \infty, +\infty, -\infty$, называется **правым (левым) пределом** функции $y = f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\{x_n\}$ сходится к a и $x_n > a$ ($x_n < a$) для любого $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b или, соответственно, к $\infty, +\infty, -\infty$.*

Определение 1.8 (по Коши). *Число $b \in \mathbb{R}$ (или $b = \infty, +\infty, -\infty$) называется **правым (левым) пределом** функции $y = f(x)$ в точке a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x из множества $(a, a + \delta) \cap X_f$ ($(a - \delta, a) \cap X_f$) выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ (или $|f(x)| > \varepsilon$, $f(x) > \varepsilon$, $f(x) < -\varepsilon$).*

Обозначения: $f(a \pm 0) = \lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = b$ или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \pm 0} b$.

Определения 1.7 и 1.8 эквивалентны.

Из определений предела по Коши сразу следует

Утверждение 1.1. *Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b. \quad \square$$

Теперь введем понятие предела функции при $x \rightarrow a$ в случае, когда a является не конечным числом, а символической бесконечно удаленной точкой (то есть одной из точек ∞ , $+\infty$, $-\infty$). Напомним, что δ -окрестности таких точек определяются как множества $U_\delta(\infty) = (-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$, $U_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty)$, $U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta)$, $\delta > 0$. Очевидно, что в этом случае проколотые окрестности совпадают с обычными, то есть: $\overset{\circ}{U}_\delta(\infty) = U_\delta(\infty)$, $\overset{\circ}{U}_\delta(+\infty) = U_\delta(+\infty)$, $\overset{\circ}{U}_\delta(-\infty) = U_\delta(-\infty)$. Дадим определение предела в случае бесконечной точки a .

Определение 1.9 (по Гейне). Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = \infty(+\infty, -\infty)$ называется **пределом** функции $y = f(x)$ **при** $x \rightarrow \infty, (x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$), соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b или, соответственно, к $\infty(+\infty, -\infty)$.

Определение 1.10 (по Коши). Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = \infty, +\infty, -\infty$ называется **пределом** функции $y = f(x)$ **при** $x \rightarrow \infty, (x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in X_f$, для которого $|x| > \delta$ ($x > \delta, x < -\delta$), выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ или $|f(x)| > \varepsilon$, $f(x) > \varepsilon$, $f(x) < -\varepsilon$.

Обозначения: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$) или $f(x) \rightarrow b$ ($f(x) \rightarrow b$, $f(x) \rightarrow b$).

Несложно показать, что определения 1.9 и 1.10 эквивалентны.

Объединяя все вышесказанное, можно дать общее определение предела функции в точке (конечной или бесконечной) в терминах окрестностей:

Определение 1.11. Пусть каждая из точек a, b при-

надлежит вещественной прямой или является бесконечно удаленной точкой. Говорят, что **предел** функции $f(x)$ при x , стремящемся к a , **равен** b , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ верно, что $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ (здесь a — предельная точка множества X_f).

Пусть теперь $b \in \mathbb{R}$ и a — предельная точка множества X_f (конечная или бесконечная). Иногда бывает полезно использовать следующие определения:

Определение 1.12 (по Гейне). Если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b и при этом $f(x_n) > b$ ($f(x_n) < b$) для всех $n \in \mathbb{N}$, то пишут: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b + 0$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b - 0$).

Определение 1.13 (по Коши). Говорят, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b + 0$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b - 0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ выполняются неравенства $0 < f(x) - b < \varepsilon$ ($0 < b - f(x) < \varepsilon$).

Определения 1.12 и 1.13 эквивалентны. Доказательство этого факта аналогично общему случаю.

Критерий Коши существования предела функции

Определение 1.14. Функция $y = f(x)$ удовлетворяет в точке a **условию Коши**, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ имеет место неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 1.2 (критерий Коши существования предела функции в точке). Функция $y = f(x)$ имеет в

точке a конечный предел тогда и только тогда, когда она удовлетворяет в этой точке условию Коши.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тогда найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой точки x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ будет выполнено неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon/2$. Пусть $x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$. Тогда $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + b - f(x'')| \leq \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, то есть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a .

Достаточность. Проведем доказательство для случая $a \in \mathbb{R}$ (случай бесконечно удаленной точки a рассматривается аналогично). Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a . Выберем последовательность $\{x_n\}$ аргументов, такую, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда найдется такой номер $N = N(\delta)$, что для любого натурального $n \geq N$ и любого натурального p будут выполняться неравенства: $0 < |x_n - a| < \delta$, $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$. В силу условия Коши имеем: $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$ при всех $n \geq N$ и $p \in \mathbb{N}$. Но это означает, что числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной. Следовательно, она сходится.

Итак, мы показали, что для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов, такой, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции имеет предел. Докажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Пусть $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ — две различные последовательности аргументов $f(x)$, удовлетворяющие условиям: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = a$, $x'_n \neq a$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} x''_n = a$, $x''_n \neq a$. Тогда существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) = b'$ и существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x''_n) = b''$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots, x'_n, x''_n, \dots\}$. Очевидно, что она стремится к a при $n \rightarrow +\infty$, и при этом $x_n \neq a$.

Значит, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Обозначим $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = b$. Так как последовательности $\{f(x'_n)\}$, $\{f(x''_n)\}$ являются подпоследовательностями сходящейся последовательности $\{f(x_n)\}$, то они должны сходиться к тому же самому пределу. Значит, $b' = b'' = b$. Мы показали, что предел последовательности значений функции не зависит от выбора соответствующей последовательности ее аргументов. Это означает, что функция $f(x)$ имеет конечный предел, равный b , в точке a . $\square$

Арифметические операции над функциями, имеющими пределы

Теорема 1.3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, a — предельная точка множества X (конечная или бесконечная), $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ (b, c — конечные числа).

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$,
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ (в случае, если $c \neq 0$).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества X , такая, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = b$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = c$. Значит (по теореме об арифметических операциях над сходящимися последовательностями), $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = b \pm c$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = b \cdot c$. Если $c \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, $g(x_n) \neq 0$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{b}{c}$. Но это означает, в силу определения предела функции по Гейне, что $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ (при $c \neq 0$). $\square$

О пределе сложной функции

Определение 1.15. Пусть функция $x = \varphi(t)$ задана на множестве T ; X — множество ее значений. Если на множестве X задана функция $y = f(x)$, то говорят, что на T определена **сложная функция** $y = f(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t)$ (функцию $f \circ \varphi$ называют также **композицией** функций f и φ).

Замечание 1.1. Можно было бы ожидать, что справедливо следующее утверждение: если $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = l$. Такое утверждение справедливо, например, для непрерывных функций (см. теорему 1.2 главы 2). Однако в общем случае подобная теорема неверна.

Пример 1.2. Пусть $f(x) = 0$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 1$; $\varphi(t) \equiv 0$. Тогда $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi(t)) = 1$.

Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4. Пусть $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Тогда $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0)$ выполнено: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Далее, существует $\delta = \delta(\delta_1) > 0$ такое, что $|\varphi(t) - x_0| < \delta_1$ при всех $t \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(t_0)$. Но тогда получаем, что $\forall t \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(t_0)$ справедливо неравенство $|f(\varphi(t)) - f(x_0)| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$. $\square$

Предельный переход в неравенствах для функций

Теорема 1.5. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на множестве X , а — предельная точка X , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Если существует такое число $\delta > 0$, что

при всех x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$, то $b \geq c$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества X , такая, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, причем $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такое натуральное число $N = N(\delta)$, что для всех $n \geq N$ выполнено: $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$. Значит, $f(x_n) \geq g(x_n) \forall n \geq N$, следовательно, $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = c$ (по теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей). $\square$

Замечание 1.2. Если $f(x) > g(x)$, то в пределе возможно равенство: $b = c$. Например, пусть $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/(x+1)$. Тогда $f(x) > g(x)$ при $x > 0$, но $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Теорема 1.6. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены на множестве X , а — предельная точка X , причем $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$. Если существует такое число $\delta > 0$, что при всех x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ выполняется двойное неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, то существует $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества X , такая, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = b$ и найдется такое натуральное $N = N(\delta)$, что для всех $n \geq N$ выполнено: $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$. Значит, по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве для последовательностей, последовательность $\{h(x_n)\}$ сходится и $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) = b$. Согласно определению предела функции по Гейне, это означает, что $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$. $\square$