

А. Н. Мардас

ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО
БАКАЛАВРИАТА**

2-е издание, переработанное и дополненное

**Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru**

Москва ■ Юрайт ■ 2017

УДК 336.6(075.8)

ББК 65.26я73

М25

Автор:

Мардас Анатолий Николаевич — доктор военных наук, профессор, кандидат технических наук, профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, профессор кафедры менеджмента и маркетинга факультета экономики и менеджмента Петербургского государственного университета путей сообщения.

Рецензент:

Колесов Д. Н. — доцент, кандидат экономических наук, заведующий кафедрой экономической кибернетики экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Мардас, А. Н.

М25

Основы финансовых вычислений : учеб. пособие для академического бакалавриата / А. Н. Мардас. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 127 с. — Серия : Университеты России.

ISBN 978-5-534-03038-9

Серия «Университеты России» позволит высшим учебным заведениям нашей страны использовать в образовательном процессе учебники и учебные пособия по различным дисциплинам, подготовленные преподавателями лучших университетов России и впервые опубликованные в издательствах университетов. Все представленные в этой серии учебники прошли экспертную оценку учебно-методического отдела издательства и публикуются в оригинальной редакции.

В учебном пособии представлены схемы наращения и дисконтирования, расчеты по операциям с ценными бумагами, а также методология оценки финансовых рисков. Книга содержит иллюстративные примеры и словарь основных финансовых терминов, которые обеспечивают пособие краткими, но содержательными методическими рекомендациями.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям.

УДК 336.6(075.8)

ББК 65.26я73



Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав. Правовую поддержку издательства обеспечивает юридическая компания «Дельфи».

ISBN 978-5-534-03038-9

© Мардас А. Н., 2004

© Мардас А. Н., 2017, с изменениями

© ООО «Издательство Юрайт», 2017

Оглавление

Часть 1. Финансовые вычисления.....	4
Изменение стоимости денег во времени.....	4
Операции наращения и дисконтирования.....	7
Процентные ставки.....	9
Внутригодовые процентные начисления.....	16
Сравнение разновременных сумм. Денежные потоки.....	21
Расчеты по операциям с ценными бумагами.....	24
Расчет параметров кредитных операций в условиях инфляции.....	37
Часть 2. Математика финансовых рисков.....	40
Понятие предпринимательского риска.....	40
Принципы количественной оценки риска.....	41
Необходимые сведения из теории вероятностей.....	46
Оценка финансовых рисков с применением нормального распределения вероятностей.....	54
Общий порядок оценки финансового риска по распределению пуассона.....	57
Определение параметров распределения по статистическим данным.....	60
Доверительные интервалы и доверительные вероятности как характеристики уровня финансового риска.....	62
Статистические гипотезы и критерии их оценки в задачах оценки рисков.....	67
Распределение студента и оценка риска по существенности различий в выборочных данных.....	71
χ^2 -распределение.....	77
Оценка рискованности финансовых операций с помощью распределения фишера.....	78
Оценка риска непараметрическими методами.....	81
Часть 3. Расчеты в комплексной оценке эффективности инвестиционно-инновационной деятельности.....	89
Прогнозная оценка эффективности этапов исследования и разработки новшества.....	89
Прогнозная оценка эффективности коммерциализации новшества.....	92
Заключение.....	100
Приложения.....	101
Основные финансовые термины.....	107
Рекомендуемая литература.....	125
Новые издания по дисциплине «Основы финансовых вычислений» и смежным дисциплинам.....	127

Часть 1. ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Финансовая математика представляет собой количественный анализ финансовых операций и охватывает определенный круг вычислений, необходимость в которых возникает всякий раз при согласовании участниками сделки значений трех видов параметров: стоимостных характеристик (размеры платежей, долговых обязательств, кредитов), временных данных (даты или срока выплат, продолжительности льготных периодов или отсрочки платежей) и процентных ставок. Каждый из перечисленных параметров можно представить в различном виде, и все они важны в рамках одной операции или сделки. Поскольку факторов много и их взаимовлияние определить не всегда просто, требуется количественный анализ. Необходимость учитывать разного рода коммерческие риски создает дополнительные сложности. Изучение этих зависимостей и разработка на их основе методов решения финансовых задач и является предметом финансовой математики.

Изменение стоимости денег во времени

Вкладывая средства в один из выбранных проектов, финансовый менеджер планирует не только вернуть со временем вложенную сумму, но и получить желаемый экономический эффект. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность выплат. Фактор времени, особенно в долгосрочных операциях, играет не меньшую, а иногда даже большую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета временного фактора вытекает из сущности кредитования и выражается в принципе неравноценности денег в разные моменты времени. 1000 руб., полученные через 5 лет, не равноценны этой же сумме, поступившей сегодня, даже если не принимать во внимание инфляцию и риск их неполучения. Таким образом, деньги имеют вре-

менную ценность. Отмеченная неравноценность двух одинаковых сумм связана прежде всего с тем, что имеющиеся сегодня деньги теоретически могут быть инвестированы и принести доход в будущем. Полученный доход, в свою очередь, может быть реинвестирован и т. д.

К примеру, американская компания «Юнион карбайд», на химическом заводе которой в Индии произошла крупная авария, первоначально предлагала в качестве компенсации выплатить пострадавшим 200 млн долл. в течение 35 лет. Определим сумму денег, которую необходимо положить в банк, скажем, под 10 % годовых для того, чтобы полностью обеспечить выплату 200 млн долл. за 35 лет. Оказывается, для этого достаточно выделить 57,6 млн долл. Иначе говоря, 57,6 млн долл., выплаченных сегодня, равнозначны 200 млн долл., погашаемым ежемесячно в равных долях на протяжении 35 лет.

Влияние фактора времени многократно усиливается в период инфляции. Этот фактор часто является инструментом явного или скрытого мошенничества и недобросовестности. Например, умышленная задержка выплат или ситуация, когда «продавец» получает деньги в качестве предоплаты за товар, который он и не собирается поставлять. Обесцененные деньги через некоторый срок возвращаются покупателю. Поэтому следствием принципа неравноценности денег во времени является неправомерность простого суммирования денежных величин в финансовом анализе.

Получение кредита в простейшем случае подразумевает участие двух лиц — кредитора (инвестора) и дебитора (заемщика) при однократном предоставлении ссуды в любой ее форме: наличных денег, продажи товара в кредит, помещении денег на депозитный счет, учете векселя, покупке облигаций и т. д. При этом дебитор обязан вернуть полученную ссуду PV (present value) через точно оговоренный срок и уплатить ее в соответствии с установленным в договоре процентом.

Под процентом, или процентным платежом, понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в кредит, которую будем обозначать IV . Таким образом, возвращенная сумма FV (future value) будет равна:

$$FV = PV + IV. \quad (1.1)$$

Эффективность подобной сделки может быть охарактеризована одним из двух показателей:

темп прироста, рассчитываемый как отношение наращения первоначальной суммы к базовой величине PV

$$r(t) = \frac{FV - PV}{PV} = \frac{IV}{PV}; \quad (1.2)$$

темп снижения, рассчитываемый как отношение наращения к возвращаемой или наращенной величине FV

$$d(t) = \frac{FV - PV}{FV} = \frac{IV}{FV}. \quad (1.3)$$

В финансовых вычислениях первый показатель называется «процентная ставка», «рост», «ставка процента», «норма доходности», а второй — «учетная ставка», «дисконт», «ставка дисконтирования». Очевидно, что обе ставки взаимосвязаны:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{d(t)}{1 - d(t)}; \\ d(t) &= \frac{r(t)}{1 + r(t)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Оба показателя могут выражаться либо в долях единицы, либо в процентах.

Процесс, в котором заданы исходная сумма и процентная ставка, в финансовых вычислениях называется *наращением*. Процесс, в котором заданы возвращаемая сумма и коэффициент дисконтирования, называется *дисконтированием*. В первом случае речь идет о движении денежного потока от настоящего к будущему, во втором — о движении от будущего к настоящему.

Пример 1. Кредит выдан на срок 1 год в сумме $PV = 1$ млн руб. с условием возврата $FV = 2$ млн руб. В этом случае ставка процента и дисконт соответственно равны:

$$r(t) = \frac{2-1}{1} = 1 \text{ (100 \%)};$$

$$d(t) = \frac{2-1}{2} = 0,5 \text{ (50 \%)}.$$

Пример 2. Определить ставку процента при выдаче кредита 2 млн руб. на срок $t = 0,5$ года за плату в 1,2 млн руб.

При расчете получаем полугодовую процентную ставку:

$$r(t) = \frac{IV}{PV} = \frac{1,2}{2} = 0,6 \text{ (60 \%)}.$$

Операции наращения и дисконтирования

Экономический смысл финансовой операции, задаваемой формулой (1.2), состоит в определении величины той суммы, которой будет или желает располагать инвестор по окончании этой операции. Поскольку

$$FV = PV + PV \times r(t),$$

то время генерирует деньги, и величина FV показывает будущую стоимость «сегодняшней» величины PV при заданной норме доходности.

Пример 3. Кредит выдан в сумме $PV = 3$ млн руб. на срок $t = 1$ год под ставку $r(t) = 50 \%$. Тогда через год придется вернуть

$$FV = PV + PV \times r(t) = 3 \times (1 + 0,5) = 4,5 \text{ млн руб.}$$

Коэффициент дисконтирования (1.3) показывает, какой ежегодный процент возврата хочет (или может) иметь инвестор на инвестируемый им капитал. В этом случае искомая величина PV показывает текущую, «сегодняшнюю» стоимость будущей величины FV .

Пример 4. Кредит выдан на срок $t = 1$ год с условием возврата $FV = 3$ млн руб. при дисконте $d = 20 \%$. Определить, какую сумму получит дебитор.

Из формулы (1.3) следует, что дебитор получит:

$$PV = FV(1 - d(t)) = 3 \times (1 - 0,2) = 2,4 \text{ млн руб.}$$

Величину $v = 1 - d(t)$ называют *дисконт-фактором* или коэффициентом дисконтирования.

Операция дисконтирования используется главным образом в операциях по учету векселей.

Вексель — это подписанное обязательство уплатить указанную сумму (номинальная стоимость векселя) в указанный срок с процентами (фактическая или реальная стоимость).

Дисконтирование векселя означает его покупку у владельца до наступления срока оплаты векселя по цене, меньше той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока. Дисконтирование векселя является формой кредитования векселедержателя путем досрочной выплаты ему обозначенной в векселе суммы за вычетом определенных процентов. Часто эта операция называется учетом векселей.

Схема сделки в этом случае может быть следующей. Владелец векселя на сумму FV предъявляет его банку, который соглашается учесть его, т. е. купить, удерживая в свою пользу часть вексельной суммы, которую часто называют дисконтом. В этом случае банк предлагает владельцу сумму (PV), исчисляемую исходя из объявленной банком ставки дисконтирования (d). Расчет этой суммы ведется по формуле, являющейся следствием формулы (1.3):

$$PV = FV(1 - f \times d), \quad (1.5)$$

где f — время до погашения векселя в долях периода (отметим, что операция имеет смысл, если число в скобках не отрицательно).

Пример 5. 13.09.02 векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 5 млн руб. со сроком погашения 28.09.02. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 75 % годовых. Тогда сумма, которую векселедержатель получит от банка, составит:

$$PV = 5 \times \left(1 - \frac{15}{360} \times 0,75\right) = 4,844 \text{ млн руб.}$$

Разность между величинами FV и PV представляет собой комиссионные, удерживаемые банком в свою пользу, за предоставленную услугу. В данном примере она составила 156 тыс. руб., а длина финансового года принята равной 360 суток.

Пример 6. Предприятие поставляет товар на условиях потребительского кредита с оформлением простого векселя номинальной стоимостью 1,5 млн руб. со сроком погашения в 60 дней. Ставка процента за предоставленный кредит — 90 % годовых. Через 45 дней с момента оформления векселя предприятие решило учесть вексель в банке. Банк предложил дисконтную ставку 85 %. Требуется рассчитать суммы, получаемые предприятием и банком.

Будущая стоимость векселя к моменту его погашения составит:

$$FV = 1,5 \times \left(1 + \frac{60}{360} \times 0,9\right) = 1,725 \text{ млн руб.}$$

Срочная (ожидаемая векселедержателем) стоимость векселя в момент учета его банком составляет:

$$FV = 1,5 \times \left(1 + \frac{45}{360} \times 0,9\right) = 1,669 \text{ млн руб.}$$

Очевидно, что банку невыгодно выплачивать предприятию сумму, превышающую 1,669 млн руб. С учетом ставки дисконта банк предложит сумму

$$PV_1 = 1,725 \times \left(1 - \frac{15}{360} \times 0,85\right) = 1,664 \text{ млн руб.}$$

и, таким образом, получит от операции проценты по векселю за оставшиеся 15 дней в размере 56 тыс. руб. $(1,725 - 1,669)$, а также комиссионные за оказанную услугу в размере 5 тыс. руб. $(1,669 - 1,664)$.

Процентные ставки

Стандартным временным интервалом в финансовых операциях является 1 год. При краткосрочных операциях срок инвестиро-

вания, как мы уже убедились, удобно измерять в днях. Поэтому продолжительность года принимают равной либо $360 = 12 \times 30$ дням, либо фактическому числу дней в году. В первом случае проценты называют обычными, во втором — точными.

При подсчете числа дней срока инвестирования t возможны два варианта. Первый вариант: наиболее часто подсчитывают точное число дней с помощью специальной таблицы, в которой приведены порядковые номера каждого дня в году. При этом день выдачи и возврата ссуды считают за один день. Во втором варианте подсчитывают точное число месяцев в сроке и добавляют число оставшихся дней. При этом длительность каждого полного месяца полагают равной 30 дням. Второй вариант дает обычно меньшее значение t . Таким образом, всего имеется четыре схемы расчета процентов.

1. *Точные проценты с точным числом дней ссуды.* В этой схеме при начислении процентов за 6 месяцев срок ссуды полагается равным 182 дням. Эта, наиболее точная схема широко применяется в банках Великобритании.

2. *Обычные проценты с точным числом дней ссуды.* Эта схема дает несколько больший результат при исчислении будущей суммы, чем предыдущая, и используется в банках Франции.

3. *Обычные проценты с приближенным числом дней ссуды.* Это менее точная схема, она применяется в банках Германии.

Четвертая схема — *точные проценты и приближенное число дней ссуды* — не применяется.

Наращение капитала может осуществляться либо в виде *простых* процентов, либо в виде *сложных* процентов.

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление.

Пусть исходный инвестируемый капитал равен P , а установленная норма доходности — r (в долях единицы). Если инвестированный капитал ежегодно увеличивается на величину $P \times r$, тогда говорят, что инвестирование осуществлено на условиях простого процента. Таким образом, размер инвестированного капитала через n периодов (P_n) будет равен:

$$P_n = P + P \times r + \dots + P \times r = P(1 + n \times r). \quad (1.6)$$

Выражение (1.6) часто называют формулой наращенного по простым процентам, а множитель $\frac{P_n}{P} = 1 + n \times r$ — коэффициентом наращенного простых процентов.

При применении простого процента доходы по мере их начисления целесообразно снимать для потребления, использования в других инвестиционных проектах или в текущей деятельности. Поэтому простые проценты применяют в следующих случаях:

- при выдаче краткосрочных ссуд на срок менее года;
- когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются кредитору заемщиком в конце каждого конверсионного периода (конверсионный период — это временной интервал, в конце которого начисляется процент за этот интервал);
- при сберегательных вкладах с ежемесячной выплатой процентов и т. п.

При выдаче краткосрочных ссуд на срок менее года в качестве показателя n берется величина, характеризующая длину периода (дни, месяц, квартал, полугодие) в долях года. При этом длина различных временных интервалов в расчетах, как правило, округляется: месяц — 30 дней, квартал — 90 дней, полугодие — 180 дней, год — 360 дней.

Пример 7. Выдано 3 млн руб. в кредит на 6 месяцев под простые проценты по ставке 10 % в месяц. Найдем наращенное значение долга в конце каждого месяца.

Обозначим через P_n наращенное значение долга в конце каждого месяца. Так как $P = 3$ млн руб. и $r = 0,1$, то в силу формулы (1.6)

$$P_n = 3 \times (1 + 0,1 \times n), \text{ где } n = 1, 2, \dots, 6.$$

Полученные результаты сведем в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

Наращенное значение долга

n	0	1	2	3	4	5	6
P_n	3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8

Из таблицы видно, что последовательность $P_1, P_2, \dots, P_6$ представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом 3 млн руб. и знаменателем 300 тыс. руб.

Пример 8. Ссуда в размере 5 млн руб. выдана на 1 месяц под 130 % годовых. Тогда размер платежа к погашению будет равен:

$$P_n = 5 \times \left(1 + \frac{30}{360} \times 1,3\right) = 5,542 \text{ млн руб.}$$

Схема сложных процентов предполагает их капитализацию, т. е. база начисления процентов постоянно возрастает. Это означает, что инвестиция осуществлена на условиях сложного процента, если очередной годовой доход исчисляется не с исходной величины инвестированного капитала, а с общей суммы, включающей ранее начисленные и не востребованные инвестором проценты. Присоединение начисленных процентов к базовой сумме называется капитализацией процентов.

При начислении сложного процента размер капитала будет равен: к концу первого года

$$F_1 = P + P \times r = P \times (1 + r);$$

к концу второго года

$$F_2 = F_1 + F_1 \times r = F_1 \times (1 + r) = P \times (1 + r)^2;$$

к концу n -го года

$$F_n = P \times (1 + r)^n. \quad (1.7)$$

Использование в расчетах сложного процента более логично со стороны инвестора, поскольку в этом случае капитал, генерирующий доходы, постоянно возрастает.

Пример 9. Определить, какой величины через 5 лет достигнет долг, равный 1 млн руб. при сложной ставке 15,5 % годовых.

Имеем в соответствии с формулой (1.7)

$$F_5 = 10^6 (1 + 0,155)^5 = 2\,055\,464,22 \text{ руб.}$$

Формула (1.7) является одной из базовых в финансовых вычислениях. Множитель $M(r, n) = (1+r)^n$, обеспечивающий наращение стоимости, называют факторным множителем. Значения факторного множителя $M(r, n)$ табулированы для различных значений r и n . С его помощью формула (1.7) переписывается в виде

$$F_n = P \times M(r, n).$$

С экономической точки зрения факторный множитель показывает, чему будет равна одна денежная единица через n периодов при заданной процентной ставке r .

Неустойчивость кредитно-денежного рынка заставляет модернизировать «классическую» схему с помощью применения плавающих ставок. Расчет на перспективу по таким ставкам достаточно условен. Вместе с тем справедлива следующая важная теорема (принцип стабильности рынка): «Если не учитывать налоги и другие накладные расходы, то коэффициент наращения на некотором интервале равен произведению коэффициентов наращения на каждом из составляющих его подынтервалов». Следовательно,

$$F_n = P(1+r_1)^{n_1} \times (1+r_2)^{n_2} \times \dots \times (1+r_k)^{n_k}, \quad (1.8)$$

где

$r_1, r_2, \dots, r_k$ — последовательные во времени значения ставок;

$n_1, n_2, \dots, n_k$ — периоды, в течение которых «работают» соответствующие ставки.

Пример 10. Заключен договор о ссуде на 5 лет. Договорная процентная ставка составляет 12 % годовых с маржой (доплата за накладные расходы, комиссионные) в размере 0,5 % в первые 2 года и 0,75 % — в оставшиеся 3 года.

Используя формулу (1.8), найдем, что коэффициент наращения M в этом случае составит:

$$M = (1 + 0,125)^2 \times (1 + 0,1275)^3 = 1,81407.$$

Для того чтобы сопоставить результаты наращения при простых и сложных процентах, достаточно сравнить соответствующие коэффициенты наращения. Нетрудно убедиться в том, что при

одинаковых уровнях процентных ставок соотношение коэффициентов существенно зависит от срока инвестиции.

Действительно, при сроке инвестиции меньше года простые проценты дают наращение больше, чем сложные:

$$(1 + n \times r) > (1 + r)^n, \text{ т. е. } F_n < P_n, \text{ если } n < 1.$$

Для срока больше года сложные проценты дают наращение больше, чем простые:

$$(1 + n \times r) < (1 + r)^n, \text{ т. е. } F_n > P_n, \text{ если } n > 1.$$

Для срока, равного году, коэффициенты наращения равны друг другу при условии, что ставка начисления процентов одна и та же.

Заметим также, что с увеличением срока (при $n > 1$) различия в последствиях применения простых и сложных процентов усиливаются. Графическая иллюстрация этого утверждения приведена на рис. 1.1. В таблице 1.2 в качестве примера приведены значения ко-

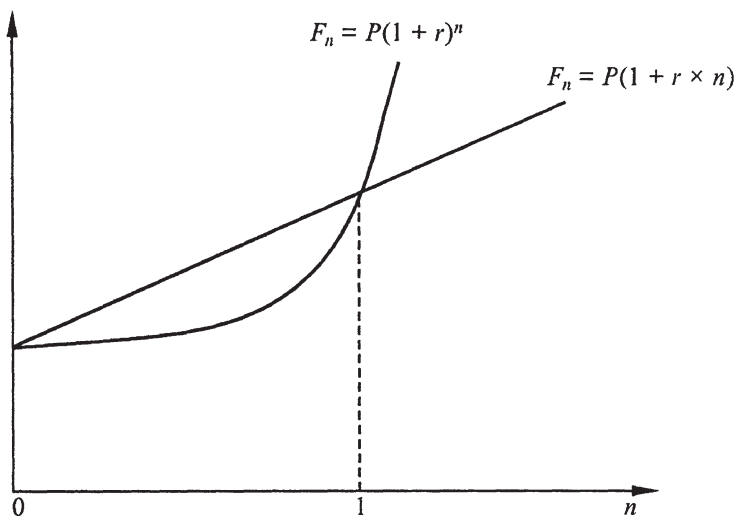


Рис. 1.1. Рост простых и сложных процентов

коэффициентов наращения для $r = 8\%$ годовых и временной базы в 1 год.

Таблица 1.2

Коэффициент наращения	Срок ссуды						
	30 дней	180 дней	1 год	5 лет	10 лет	50 лет	100 лет
$(1+r \times n)$	1,00657	1,00394	1,08	1,4	1,8	5,0	9,0
$(1+r)^n$	1,00635	1,0392	1,08	1,47	2,16	46,9	2200

При начислении процентов за нецелое число лет более эффективна смешанная схема, предусматривающая начисление сложных процентов за целое число лет и простых процентов за дробную часть года:

$$F = P(1+r)^\alpha \times (1+\beta \times r),$$

где

$$\alpha + \beta = n;$$

α — целое число периодов;

β — дробная часть периода.

Различия в последствиях применения простых и сложных процентов наиболее наглядно проявляются при определении времени, необходимого для увеличения суммы в N раз. В этом случае коэффициент наращения, очевидно, равен N и, следовательно, для простых процентов $(1 + n \times r) = N$, откуда

$$n = \frac{(N-1)}{r}; \quad (1.9)$$

для сложных процентов $(1 + r)^n = N$, откуда

$$n = \frac{\ln N}{\ln(1+r)}. \quad (1.10)$$

Пример 11. Определим число лет, необходимых для увеличения первоначального капитала в пять раз соответственно при начислении сложных и простых процентов по ставке 15% годовых