МАТЕМАТИКА
ДЛЯ КОЛЛЕДЖЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

Под редакцией профессора **Н. Ш. Кремера**

10-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для слушателей подготовительных отделений высших учебных заведений экономического профиля

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
К79

***Авторы*:**

Кремер Наум Шевелевич (предисловие, гл. 1, 2 (§ 2.6), 3, 4, 5 (§ 5.10), 6—8, 10—18);

Константинова Ольга Григорьевна (гл. 5 (кроме § 5.10));

Фридман Мира Нисоновна (гл. 2 (кроме § 2.6), 9).

***Рецензент*:**

кафедра высшей математики Московского государственного университета экономики, статистики и информатики (заведующий кафедрой — профессор *В. А. Никишкин*).

Кремер, Н. Ш.

К79 Математика для колледжей : учеб. пособие для СПО / под ред. Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 344 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-9916-8702-7

Пособие предназначено для учащихся образовательных учебных заведений среднего профессионального образования (колледжей и техникумов), а также абитуриентов, слушателей подготовительных отделений и курсов, готовящихся к поступлению в экономические и другие вузы.

Каждая глава пособия содержит справочный материал, методические рекомендации и задачи с решениями и для самостоятельной работы.

Большое число задач (более 2200) и удачная структура учебного пособия позволяют использовать его не только для контроля знаний, но и для обучения навыкам решения задач различного уровня сложности.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов среднего профессионального образования.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

ISBN 978-5-9916-8702-7

Оглавление

Предисловие

Данное пособие предназначено для учащихся образовательных учебных заведений среднего профессионального образования (колледжей и техникумов), а также абитуриентов, слушателей подготовительных отделений и курсов, готовящихся к поступлению в экономические и другие вузы.

Изучение представленного в пособии материала направлено на выполнение требований, обусловленных Федеральными образовательными стандартами СПО по направлениям экономики и управления (менеджмента), согласно которым в результате изучения обязательной части математического и общего естественнонаучного цикла обучающийся должен освоить:

трудовые действия

- арифметические вычисления;
- использование методов решения алгебраических выражений и уравнений и неравенств;
- применение способов определения значений логарифмических, показательных, тригонометрических функций;
- применение способов решения планометрических и стереометрических задач;
- дифференцирование и интегрирование;
- использование методов вычисления теории вероятности;

необходимые умения

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

необходимые знания

- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Авторы предлагают учащимся пройти путь от решения простейших школьных задач к решению достаточно сложных конкурсных. Большое внимание уделяется выполнению «стандартных» преобразований и операций, «технике» решения типовых задач. Наряду с традиционным материалом в пособии рассмотрены наиболее трудные для абитуриентов разделы и темы из практики проведения единого государственного экзамена и вступительных испытаний в экономические вузы, но недостаточно полно рассматриваемые в школах и колледжах (задачи с параметрами, примеры с абсолютными величинами, обратные тригонометрические функции, текстовые задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений и т.п.).

В пособии приведен обширный учебный материал, включающий арифметические вычисления и преобразования алгебраических, тригонометрических и логарифмических выражений; алгебраические, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения, неравенства и их системы; прогрессии и задачи с параметрами; функции и графики; производную, первообразную и интеграл; векторы и метод координат; планиметрию и стереометрию; элементы теории вероятностей.

Каждая глава пособия содержит справочный материал, методические рекомендации и задачи с решениями и для самостоятельной работы.

При подготовке пособия были использованы школьные учебники, различные сборники задач и справочники для поступающих в ссузы и вузы. Часть задач составлена авторами специально для пособия.

Большое число задач (более 2200) и удачная структура учебного пособия позволяют использовать его не только для контроля знаний, но и для обучения навыкам решения задач различного уровня сложности.

Часть I.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА. ГЕОМЕТРИЯ

- Выражения и преобразования
- Уравнения и неравенства
- Функции
- Числа и вычисления
- Геометрические фигуры

Глава 1. Арифметические вычисления. Преобразование алгебраических выражений

Формулы для справок

Действия со степенями ($a > 0, b > 0$):

$(abc)^n = a^n b^n c^n$. **(1.1)**

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. **(1.2)**

$a^m a^n = a^{m+n}$. **(1.3)**

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. **(1.4)**

$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ **(1.5)**

$a^0 = 1$. **(1.6)**

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. **(1.7)**

Действия с корнями и дробными степенями ($a > 0, b > 0; m, n, p \in N$, $m > 1, n > 1$)[1]:

$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$. **(1.8)**

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. **(1.9)**

$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$. **(1.10)**

$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$. **(1.11)**

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ **(1.12)**

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$. **(1.12′)**

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. **(1.13)**

$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$. **(1.13′)**

Формулы сокращенного умножения:

$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$. **(1.14)**

$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$. **(1.15)**

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. **(1.16)**

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. **(1.17)**

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. **(1.18)**

---

[1] Запись $n \in N$ означает, что число n принадлежит множеству натуральных чисел.

Разложение квадратного трехчлена на множители:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2), \qquad \textbf{(1.19)}$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad \textbf{(1.20)}$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Абсолютная величина действительного числа:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \qquad \textbf{(1.21)}$$

1.1. Арифметические вычисления

1.1. Вычислить: $\dfrac{\left(152\dfrac{3}{4} - 148\dfrac{3}{8}\right) \cdot 0{,}3}{0{,}2}$.

Р е ш е н и е. Следует напомнить порядок действий: первыми осуществляются операции умножения и деления, затем — сложения и вычитания. Если нужно изменить порядок, то ставятся скобки. Таким образом, в нашем примере первой осуществляется операция вычитания, стоящая в скобках, а затем — действия в указанном порядке, т.е. сначала умножение, затем деление.

1) $152\dfrac{3}{4} - 148\dfrac{3}{8} = 4\dfrac{3}{8}$. 2) $4\dfrac{3}{8} \cdot 0{,}3 = \dfrac{35}{8} \cdot 0{,}3 = 4{,}375 \cdot 0{,}3 = 1{,}3125$.

3) $1{,}3125 : 0{,}2 = 6{,}5625$.

О т в е т: 6,5625.

1.2. Вычислить:

$$\frac{\left(4{,}5 \cdot 1\dfrac{2}{3} - 6{,}75\right) \cdot 0{,}66\ldots}{\left(3{,}(3) \cdot 0{,}3 + 0{,}(2) + \dfrac{4}{9}\right) : 2\dfrac{2}{3}} + \frac{0{,}4166\ldots \cdot 0{,}72 : 0{,}3 - 0{,}96}{\left(0{,}2 - \dfrac{3}{40}\right) \cdot 1{,}6}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем имеющиеся в примере периодические десятичные дроби в обыкновенные. Напомним: чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо в числителе записать разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом. Поэтому:

$$0{,}66\ldots = 0{,}(6) = \frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \qquad 3{,}(3) = \frac{33-3}{9} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3};$$

$$0{,}(2) = \frac{2-0}{9} = \frac{2}{9}; \qquad 0{,}4166\ldots = 0{,}41(6) = \frac{416-41}{900} = \frac{5}{12}.$$

Выполним теперь указанные в примере действия:

1) $4{,}5 \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{45}{6} = 7{,}5$.

2) $7{,}5 - 6{,}75 = 0{,}75$.

3) $0{,}75 \cdot 0{,}66\ldots = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

4) $3{,}(3) \cdot 0{,}3 = \frac{10}{3} \cdot 0{,}3 = 1$.

5) $1 + 0{,}(2) = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$.

6) $\frac{11}{9} + \frac{4}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$.

7) $\frac{5}{3} : 2\frac{2}{3} = \frac{5}{3} : \frac{8}{3} = \frac{5}{8}$.

8) $0{,}5 : \frac{5}{8} = \frac{5}{10} \cdot \frac{8}{5} = 0{,}8$.

9) $\frac{5}{12} \cdot 0{,}72 = \frac{5}{12} \cdot \frac{72}{100} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

10) $0{,}3 : 0{,}3 = 1$.

11) $1 - 0{,}96 = 0{,}04$.

12) $0{,}2 - \frac{3}{40} = \frac{2}{10} - \frac{3}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$.

13) $\frac{1}{8} \cdot 1{,}6 = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{10} = 0{,}2$.

14) $0{,}04 : 0{,}2 = 0{,}2$.

15) $0{,}8 + 0{,}2 = 1$.

Ответ: 1.

Вычислить:

1.3. $$\frac{172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12}}{0{,}8 \cdot 0{,}25}.$$

1.4. $$\frac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{0{,}0001 : 0{,}005}.$$

1.5. $$\frac{\left(95\frac{7}{30} - 93\frac{5}{18}\right) \cdot 2\frac{1}{4} + 0{,}373}{0{,}2}.$$

1.6. $$\frac{\left(49\frac{5}{24} - 46\frac{7}{20}\right) \cdot 2\frac{1}{3} + 0{,}6}{0{,}2}.$$

1.7. $\dfrac{\left(0{,}666...+\dfrac{1}{3}\right)\ :\ 0{,}25}{0{,}12333...:0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64$.

1.8. $\dfrac{[(7-6{,}35):6{,}5+9{,}8999...]\cdot\dfrac{1}{12{,}8}}{\left[(1{,}2:36)+\left(1\dfrac{1}{5}:0{,}25\right)-1{,}8(3)\right]\cdot 1\dfrac{1}{4}}\ :\ 0{,}125$.

1.9. $\dfrac{\left[\left(4{,}625-\dfrac{13}{18}\cdot\dfrac{9}{26}\right)\ :\dfrac{9}{4}+2{,}5\ :\ 1{,}25\ :\ 6{,}75\right]\ :\ 1\dfrac{53}{68}}{\left(\dfrac{1}{2}-0{,}375\right)\ :\ 0{,}125+\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{7}{12}\right)\ :(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}$.

1.2. Преобразование рациональных выражений

При решении задач этого параграфа необходимо обратить внимание на правила действий со степенями (см. формулы **(1.1)—(1.5)**). Следует помнить, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями их показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении в степень — перемножаются.

Приведем несколько простых примеров с решениями, полученными с помощью формул **(1.1)—(1.18)**.

1.10. $\left(\dfrac{2a^3b^2c^{-1}}{d^2}\right)^6=\dfrac{64a^{18}b^{12}c^{-6}}{d^{12}}$.

1.11. $(3a^{-2}b^2c^{-3})(0{,}8ab^{-3}c^4)=2{,}4a^{-1}b^{-1}c$.

1.12. $\left(x^{-1}y^3z^2\right):(5x^2y^{-2}z^{-5})=\dfrac{1}{5}x^{-3}y^5z^7$.

1.13. $(a^{-2}+b^{-3})(a^{-2}-b^{-3})=a^{-4}-b^{-6}$.

1.14. $(x^{-2}-y^{-1})^2=x^{-4}-2x^{-2}y^{-1}+y^{-2}$.

1.15. $(x^{-3}-2y^2)^3=x^{-9}-6x^{-6}y^2+12x^{-3}y^4-8y^6$.

1.16. $(x^{-3}+8y^6)=(x^{-1}+2y^2)(x^{-2}-2x^{-1}y^2+4y^4)$.

1.17. Разложить на множители:

$$90x^{2n-3} - 225x^{2n-1}.$$

Р е ш е н и е. Выносим общий множитель: чисел 90 и 225 — число 45 и выражений x^{2n-3} и x^{2n-1} — выражение x^{2n-3} (с наименьшим показателем степени).

Получим: $90x^{2n-3} - 225x^{2n-1} = 45x^{2n-3}\left(2 - 5x^2\right)$.

Ответ: $45x^{2n-3}(2 - 5x^2)$.

1.18. Разложить на множители:

$$18a^2 - 27ab + 14ac - 21bc.$$

Р е ш е н и е. Используем способ группировки:

$18a^2 - 27ab + 14ac - 21bc = (18a^2 - 27ab) + (14ac - 21bc) =$

$= 9a(2a - 3b) + 7c(2a - 3b) = (2a - 3b)(9a + 7c).$

Ответ: $(2a - 3b)(9a + 7c)$.

1.19. Разложить на множители: $a^6 - b^6$.

Р е ш е н и е.

$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) =$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2).$

Ответ: $(a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

1.20. Разложить на множители: $c^2 - a^2 + 8ab^2 - 16b^4$.

Р е ш е н и е. Группируя отдельно первый член и три последних члена, получим:

$c^2 - a^2 + 8ab^2 - 16b^4 = c^2 - (a^2 - 8ab^2 + 16b^4) =$

$= c^2 - (a - 4b^2)^2 = [c - (a - 4b^2)][c + (a - 4b^2)].$

Ответ: $(c - a + 4b^2)(c + a - 4b^2)$.

1.21. Разложить на множители: $4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$.

Р е ш е н и е. Раскладываем выражение на множители как разность квадратов и после группировки членов в каждой скобке вновь применяем формулу разности квадратов:

$4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = [2ac - (a^2 + c^2 - b^2)] \times$

$\times [2ac + (a^2 + c^2 - b^2)] = [b^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - b^2] =$

$= [b - (a - c)][b + (a - c)][(a + c) - b][(a + c) + b].$

Ответ: $(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)$.

1.22. Разложить на множители: $-3x^2+10x-3$.

Р е ш е н и е. *I способ.* Корни квадратного трехчлена находим из уравнения $-3x^2+10x-3=0$ по формулам **(2.12)** и **(2.13)**: $x_1=\frac{1}{3}$ и $x_2=3$.

По формуле **(1.20)**: $-3x^2+10x-3=-3(x-\frac{1}{3})(x-3)$.

II способ. Если представить второе слагаемое квадратного трехчлена в виде $10x = 9x + x$, то разложение на множители легко провести способом группировки:

$$-3x^2+10x-3=-3x^2+9x+x-3=-3x(x-3)+(x-3)=$$
$$=(x-3)(1-3x).$$

Ответ: $-3(x-\frac{1}{3})(x-3)$.

Разложить на множители:

1.23. $24a^{3n-2}b^{-2}+108a^{3n+1}b$.

1.24. $10a^2+21xy-14ax-15ay$.

1.25. $x^3+y^3-x^2y-xy^2$.

1.26. x^4-x^2+2x-1.

1.27. $-5x^2+26x-5$.

1.28. $2a^2+ab-15b^2$.

1.29. $x^3+2x^4+4x^2+x+2$.

1.30. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

1.31. Упростить выражение:

$$\left(\frac{m+2}{1-m}-\frac{8m^2-8}{m^3-1}:\frac{4m+4}{m^2+m+1}\right):m+\frac{2+m}{m-1}.$$

Р е ш е н и е. Обращаясь к формулам сокращенного умножения, можем представить $8m^2-8=8(m^2-1)$, где m^2-1 — разность квадратов, т.е. $8(m^2-1)=8(m-1)(m+1)$. Далее, m^3-1 представляет собой разность кубов. Тогда $m^3-1=(m-1)(m^2+m+1)$. Выполняя далее действия в указанном порядке и учитывая сказанное выше, получим:

1) $\frac{8(m^2-1)}{m^3-1}:\frac{4(m+1)}{m^2+m+1}=\frac{8(m-1)(m+1)(m^2+m+1)}{(m-1)(m^2+m+1)\cdot 4(m+1)}=2$;

2) $\frac{m+2}{1-m}-2=\frac{m+2-2+2m}{1-m}=\frac{3m}{1-m}$.

Мы привели к общему знаменателю и сделали приведение подобных членов в числителе.

3) $\dfrac{3m}{1-m} : m = \dfrac{3m}{m(1-m)} = \dfrac{3}{1-m}$;

4) $\dfrac{3}{1-m} + \dfrac{2+m}{m-1} = -\dfrac{3}{m-1} + \dfrac{2+m}{m-1} = \dfrac{-3+2+m}{m-1} = \dfrac{m-1}{m-1} = 1$.

Ответ: 1.

Упростить выражения:

1.32. $\left(\dfrac{2}{9+3a} - \dfrac{4}{9-a^2} + \dfrac{1}{9-3a}\right) \cdot (9-6a+a^2)$.

1.33. $\left(\dfrac{3a}{a-4} + \dfrac{10a}{a^2-8a+16}\right) : \dfrac{3a-2}{a^2-16} - \dfrac{4(a+4)}{a-4}$.

1.34. $\left(\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{10}{x^2-3x-4} + \dfrac{3x}{x-4}\right) : \dfrac{3x+2}{3} - \dfrac{x-13}{3(4-x)}$.

1.35. $\left(\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{4}{x^2-5x+6} + \dfrac{2x}{x-2}\right) : \dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{x-12}{3(3-x)}$.

1.36. $\left(\dfrac{a^3+b^3}{a+b} - ab\right) : (a^2-b^2) + \dfrac{2b}{a+b}$.

1.37. $\left(\dfrac{a-1}{a+1} + \dfrac{a^3+1}{a^2-2a+1} : \dfrac{a^2-a+1}{1-a}\right) \cdot (1+a) + \dfrac{3a+1}{a-1}$.

1.38. $\dfrac{1-a^2}{(1+ax)^2 - (a+x)^2} \cdot \dfrac{x+x^2}{1-x}$.

1.39. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

1.40. $\dfrac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3} : \dfrac{3a^4+7a^2b^2+4b^4}{4a^4+7a^2b^2+3b^4}$.

В примерах с отрицательными и нулевыми показателями степеней необходимо правильно пользоваться их определениями (см. формулы **(1.6)**, **(1.7)**). Нужно четко представлять, что, например, $2a^{-1} = \dfrac{2}{a}$, а не $\dfrac{1}{2a}$, что $(a^{-1}+b^{-1})^{-1} = \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^{-1} =$

$= \dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$, а не $(a+b)$, и т.п.

1.41. Упростить выражение:

$$\left[\frac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b(4b^2-a^2)^{-1}\right]:\left(2a^n b\ +3a^{n+1}-\frac{6a^{n+2}}{2a-b}\right)^{-1}.$$

Р е ш е н и е. Обозначим выражение в квадратных скобках через A, в круглых – через B:

$$A:B^{-1}=A:\frac{1}{B}=A\cdot B.$$

Далее обратимся к A:

$$A=\frac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b(4b^2-a^2)^{-1}.$$

1) $\dfrac{2+ba^{-1}}{a+2b}=\dfrac{2+\dfrac{b}{a}}{a+2b}=\dfrac{2a+b}{a(a+2b)};$

2) $6b(4b^2-a^2)^{-1}=\dfrac{6b}{4b^2-a^2}=\dfrac{6b}{(2b-a)(2b+a)}.$

Здесь мы раскладывали $4b^2-a^2$ как разность квадратов:

3) $\dfrac{2a+b}{a(a+2b)}-\dfrac{6b}{(2b-a)(2b+a)}.$

Приводя к общему знаменателю и умножая первую дробь на $(2b-a)$, а вторую — на a, получим

$$\frac{4ab-2a^2+2b^2-ab-6ab}{a(4b^2-a^2)}=\frac{2b^2-3ab-2a^2}{a(4b^2-a^2)}=$$

$$=\frac{(b-2a)(2b+a)}{a(a+2b)(2b-a)}=\frac{b-2a}{a(2b-a)}.$$

Итак, $A=\dfrac{b-2a}{a(2b-a)}.$

Теперь преобразуем B:

$$B=2a^nb+3a^{n+1}-\frac{6a^{n+2}}{2a-b}=a^n\left(2b+3a-\frac{6a^2}{2a-b}\right)=$$

$$=a^n\,\frac{4ab-2b^2+6a^2-3ab-6a^2}{2a-b}=a^n\,\frac{b(a-2b)}{2a-b}.$$

Окончательно получаем

$$A \cdot B = \frac{b-2a}{a(2b-a)} \cdot \frac{a^n b(a-2b)}{2a-b} = a^{n-1}b.$$

Ответ: $a^{n-1}b$.

Упростить выражения:

1.42. $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}} \cdot \left[1 - \dfrac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]$.

Результат вычислить при $x = \dfrac{1}{a-1}$.

1.43. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab} \cdot \left(\dfrac{a^{-1}}{b} + \dfrac{b^{-1}}{2a}\right)^{-1}$.

1.44. $\left(\left(\dfrac{x}{y-x}\right)^{-2} - \dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2 \cdot \dfrac{x^4}{x^2y^2-y^4}$.

1.45. $\dfrac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}} \cdot \dfrac{x^2}{4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - \dfrac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$.

1.3. Действия над радикалами

Рассмотрим и дадим решения нескольких простых примеров, в которых с помощью формул **(1.8)—(1.11)** необходимо привести радикалы к простейшему виду.

1.46. $\sqrt[3]{\dfrac{64p^{-12}q^{-6}}{m^9}} = \dfrac{4p^{-4}q^{-2}}{m^3}$.

1.47. $\dfrac{2ab^2}{x}\sqrt[3]{\dfrac{3x}{4ab}} = \dfrac{b}{x}\sqrt[3]{\dfrac{(2ab)^3 \cdot 3x}{4ab}} = \dfrac{b}{x}\sqrt[3]{6a^2b^2x}$.

1.48. $\dfrac{3}{2a+1}\sqrt{8a^3+12a^2+6a+1} = \dfrac{3}{2a+1}\sqrt{(2a+1)^3} =$

$$= \frac{3(2a+1)\sqrt{2a+1}}{2a+1} = 3\sqrt{2a+1}.$$

1.49. $\sqrt{\sqrt[3]{256a^4b^{28}}} = \sqrt[6]{2^8a^4b^{28}} = \sqrt[3]{2^4a^2b^{14}} = 2b^4\sqrt[3]{2a^2b^2}.$

При сложении и вычитании корней (если это возможно) все они приводятся к простейшему виду, а затем общий множитель выносится за скобки.

1.50. Разложить на множители:

$$\sqrt[4]{81a^5b} - \sqrt[8]{256a^2b^{10}} = 3a\sqrt[4]{ab} - 2b\sqrt[4]{ab} =$$
$$= \sqrt[4]{ab}(3a - 2b),\ (a \ge 0;\ b \ge 0).$$

Следует отметить, что рассмотренные выше правила действий над корнями **(1.8)—(1.11)** безоговорочно верны только для их арифметических (неотрицательных) значений. Например, для произведения $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}$ применение формул **(1.8)**, **(1.11)** приводит к неверному результату: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{(-3)^2} = \sqrt[6]{72}$; правильное решение имеет вид: так как $\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$, то $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3} = -(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}) = -\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2} = -\sqrt[6]{72}.$

Необходимо помнить, что под корнем четной степени из неотрицательного числа понимается только его арифметическое (неотрицательное) значение. Так, например, $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$; $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = -(-5)$, т.е. $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0; \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ или $\sqrt{x^2} = |x|$, и вообще корень четной степени $\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$. Действия над абсолютными величинами рассмотрены в § 1.4.

Привести радикалы к простейшему виду:

1.51. $\dfrac{3ab^2}{2}\sqrt[3]{\dfrac{8}{ab}}.$ **1.52.** $\sqrt{x^3 - y^3 + x^2y - xy^2}\ (x \ge y \ge 0).$

1.53. $\dfrac{m}{n}\sqrt{n^3 - mn^2}\ (n > 0).$ **1.54.** $\sqrt[3]{8x^6y^3 - 24x^9y^6}.$

1.55. $\dfrac{a+b}{2}\sqrt[3]{\dfrac{a^5b^6 - a^6b^5}{b^2 + 2ab + a^2}}.$ **1.56.** $\sqrt{\dfrac{1}{x^3 + x^2 - x - 1}}.$

1.57. $5a^n\sqrt[3]{\dfrac{bc^4}{25a^{3n+2}}}.$ **1.58.** $\dfrac{x-y}{x+y}\sqrt[m+n]{\dfrac{(x+y)^{m+n}}{a^m(x-y)^{2m+2n}}}\ (a > 0, x > 0, y > 0).$

Приведем простые примеры (с решениями), в которых необходимо освободиться от иррациональности в знаменателе.

1.59. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}-1.$

1.60. $\dfrac{1}{(2-\sqrt{2})^3}=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^3(\sqrt{2}-1)^3}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^3}{(\sqrt{2})^4\left[(\sqrt{2})^2-1^2\right]^3}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^3}{4}.$

1.61. $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{3}}=\dfrac{2^2+2\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2}{2^3-(\sqrt[3]{3})^3}=\dfrac{4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{5}.$

Освободиться от иррациональности в знаменателе:

1.62. $\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}.$ **1.63.** $\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}.$

1.64. $\dfrac{81}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^4}.$ **1.65.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}}.$ **1.66.** $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}}.$

При преобразовании более сложных иррациональных выражений успех решения часто зависит от умения «увидеть» ту или иную формулу сокращенного умножения, записанную в обозначениях радикалов. Например, при решении одной задачи целесообразно заметить, что $a-b$ представляет разность квадратов: $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, где $a\ge 0, b\ge 0$; при решении другой — разность кубов: $a-b=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$; а при решении третьей задачи следует использовать определение радикала $a-b=\sqrt{(a-b)^2}$ (при $a\ge b$) или $a-b=\sqrt[3]{(a-b)^3}$, или вообще $a-b=\sqrt[n]{(a-b)^n}$ и т.д.

1.67. Упростить выражение:

$$\frac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$$

Решение. Рассмотрим сначала числитель уменьшаемого. Обращаемся к формулам сокращенного умножения. Учитывая, что $a+x=(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{x})^3$, т.е. представляет собой сумму кубов, имеем $a+x=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2})$. Аналогично представим $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}$ как разность квадратов, т.е. $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2})=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})$ и $\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2$.

Тогда имеем

$$\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})}=\frac{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})};$$

$$\frac{(\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x})}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{ax}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2}=\frac{-\sqrt[3]{ax}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}.$$

Окончательно числитель уменьшаемого запишем

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\frac{\sqrt[3]{ax}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{ax}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}.$$

Рассмотрим все уменьшаемое, учитывая, что

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{x^2}=(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x}).$$

Итак, $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}=\dfrac{(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x})}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x}.$

Окончательно имеем $\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{a}.$

Ответ: $\sqrt[6]{a}.$

1.68. Упростить выражение:

$$\left[\left(\frac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):(a+\sqrt[6]{a^3b^2})-\sqrt[3]{b}\right]^2.$$

Решение. Обозначим делимое буквой A, а делитель — B. Вынесем в делимом $\sqrt{a}$. Получим:

$$A=\frac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}=\sqrt{a}\left(\frac{a\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\right).$$

Выражение $(a\sqrt{a}-b)$ можно рассматривать как разность кубов:

$$\left(a\sqrt{a}-b\right)=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(a+\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right).$$

Сокращая на $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})$ числитель и знаменатель дроби, получим

$$A=\sqrt{a}(a+\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b})=\sqrt{a}(a+2\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}).$$

Можно заметить, что выражение в скобках есть полный квадрат, т.е. $\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b})^2$. Вынесем в делителе $\sqrt{a}$; получим

$$B=(a+\sqrt[6]{a^3b^2})=\sqrt{a^2}+\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}).$$

Теперь искомое выражение имеет вид:

$$\left(\frac{A}{B}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b})^2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b})}-\sqrt[3]{b}\right]^2=(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b})^2=(\sqrt{a})^2=a.$$

Ответ: a.

Упростить выражения:

1.69. $\dfrac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}}+\dfrac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{a+2+\sqrt{a^2-4}}.$

1.70. $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right)+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}.$

1.71. $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$

1.72. $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$

1.73. $\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}.$

1.74. $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right);\quad a>0.$

1.75. $\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{x}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)^2\right].$

1.76. $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^2:\left(\dfrac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}\right)^{-1}.$

1.77. $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\dfrac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right).$

1.4. Действия над абсолютными величинами

При преобразовании выражений, содержащих абсолютную величину, необходимо рассматривать несколько случаев, при этом следует четко усвоить определение абсолютной величины по формуле **(1.21)**.

1.78. Упростить выражение: $\left|x-|x|\right|$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая:

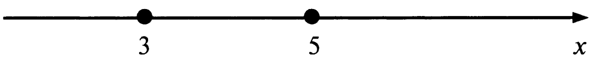
1) $x \geq 0$, тогда $|x|=x$ и $\left|x-|x|\right|=|x-x|=0$;

2) $x<0$, тогда $|x|=-x$ и $\left|x-|x|\right|=|x-(-x)|=|2x|=-2x$.

О т в е т: 0 при $x \geq 0$; $-2x$ при $x<0$.

1.79. Упростить выражение: $A = |x-5| + 2|x-3|$.

Р е ш е н и е. Возможны три случая (см. чертеж):



1) $x<3$. Тогда $x-3<0$, $x-5<0$, следовательно, $|x-3|=$ $=-(x-3)$, $|x-5|=-(x-5)$ и $A=-(x-5)+2[-(x-3)]=-3x+11$;

2) $3 \leq x<5$. Теперь $x-3 \geq 0$ и $|x-3|=x-3$. С другой стороны, по-прежнему $x-5<0$ и $|x-5|=-(x-5)$. Поэтому:

$$A=-(x-5)+2(x-3)=x-1;$$

3) $x \geq 5$. Имеем $x-3 \geq 0$, $x-5 \geq 0$ и $|x-3|=x-3$, $|x-5|=x-5$.

Отсюда $A=(x-5)+2(x-3)=3x-11$.

О т в е т: $-3x+11$ при $x<3$; $x-1$ при $3 \leq x<5$; $3x-11$ при $x \geq 5$.

1.80. Упростить выражение:

$$\sqrt{x^2-10x+25}+2\sqrt{x^2-6x+9}.$$

Р е ш е н и е. $\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|$, $\sqrt{x^2-6x+9}=$ $=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$. (Напомним, что мы рассматриваем арифметическое значение корня четной степени — см. § 1.3). Следовательно, искомое выражение есть $|x-5|+|x-3|$ и преобразуется так же, как в **1.79**.

1.81. Упростить выражение:

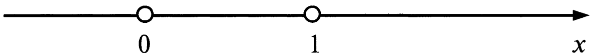
$$A=\frac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\cdot\left|2x^2-x-1\right|}.$$

Р е ш е н и е. Освободимся от отрицательного показателя степени (-1), а в знаменателе разложим на множители квадратный трехчлен, предварительно найдя его корни: $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=1$. Получим

$$A=\frac{\sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{x}}}{\sqrt{x}\cdot\left|2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\right|}=\frac{\sqrt{(2x+1)^2}}{\sqrt{x}\sqrt{x}|2x+1|\cdot|x-1|},$$

ибо абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин.

$A=\frac{|2x+1|}{x|2x+1|\cdot|x-1|}=\frac{1}{x|x-1|}$, где $x>0$ (так как по условию имели x под знаком радикала в знаменателе). Теперь необходимо рассмотреть два случая (см. чертеж):



1) $0<x<1$. Тогда $x-1<0$ и $|x-1|=-(x-1)$. Поэтому $A=-\frac{1}{x(x-1)}$;

2) $x>1$. Тогда $x-1>0$, $|x-1|=x-1$ и $A=\frac{1}{x(x-1)}$. (Заметим, что $x\neq 1$, так как при этом знаменатель обращается в нуль.)

О т в е т: $-\frac{1}{x(x-1)}$ при $0<x<1$; $\frac{1}{x(x-1)}$ при $x>1$.

Упростить выражения:

1.82. $\left|6x-2|x|\right|$.

1.83. $|2x-4|-2|3-x|$.

1.84. $\frac{x\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2-x-6}$.

1.85. $\frac{|a-1|\cdot|a|}{a^2-a+1-|a|}$.

1.86. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ при $x=\frac{2}{a+a^{-1}}$.

1.87. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ при $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $ab>0$.

1.5. Действия с дробными степенями

Приведем несколько простых примеров (с решениями), в которых необходимо выполнить указанные действия.

1.88. $\left(ab(ab)^{1/2}\right)^{1/3}=\left(a^{3/2}b^{3/2}\right)^{1/3}=a^{1/2}b^{1/2}.$

1.89. $\left[\left(a^{-6}\right)^{-2/3}\left(ab^{-2}\right)^{-1/2}a^{-3/2}\right]^2=\left(a^4a^{-1/2}ba^{-3/2}\right)^2=(a^2\cdot b)^2=a^4b^2.$

1.90. $\left[2^{1/2}\cdot\left(3a^2\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/2}\right)^{1/3}\right]^{-3}=\left[2^{1/2}\cdot\left(3a^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3/2}\right)^{1/3}\right]^{-3}=$

$$=\left[2^{1/2}\cdot3^{1/3}\cdot a^{2/3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\right]^{-3}=\frac{1}{3a^2}.$$

1.91. Упростить выражение:

$$\frac{x-1}{x+x^{0,5}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}.$$

Решение. Учитывая, что $x-1$ можно рассматривать как разность квадратов, т.е. $x-1=\left(x^{0,5}-1\right)\left(x^{0,5}+1\right)$, аналогично $x^{1,5}-1$ можно разложить как разность кубов, т.е. $x^{1,5}-1=\left(x^{0,5}-1\right)\left(x+x^{0,5}+1\right)$.

Отсюда получаем

1) $\dfrac{x-1}{x+x^{0,5}+1}\cdot\dfrac{x^{1,5}-1}{x^{0,5}+1}=\dfrac{\left(x^{0,5}-1\right)\left(x^{0,5}+1\right)\cdot\left(x^{0,5}-1\right)\left(x+x^{0,5}+1\right)}{\left(x+x^{0,5}+1\right)\left(x^{0,5}+1\right)}=$

$$=(x^{0,5}-1)^2;$$

2) $\left(x^{0,5}-1\right)^2+\dfrac{2}{x^{-0,5}}=\left(x^{0,5}-1\right)^2+2x^{0,5}=x-2x^{0,5}+1+2x^{0,5}=x+1.$

Ответ: $x+1$.

1.92. Упростить выражение:

$$\left[\frac{(a^{3/4}-b^{3/4})(a^{3/4}+b^{3/4})}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\sqrt{ab}\right]\cdot2(a+b)^{-1}.$$

Р е ш е н и е.

1) $(a^{3/4} - b^{3/4})(a^{3/4} + b^{3/4}) = a^{3/2} - b^{3/2}$;

2) $a^{3/2} - b^{3/2}$ может быть рассмотрено как разность кубов, т.е. $a^{3/2} - b^{3/2} = (a^{1/2} - b^{1/2})(a + a^{1/2}b^{1/2} + b)$.

Тогда имеем

$$\frac{a^{3/2} - b^{3/2}}{a^{1/2} - b^{1/2}} - \sqrt{ab} = a + a^{1/2}b^{1/2} + b - \sqrt{ab} = a + b;$$

3) $(a + b) \cdot 2(a + b)^{-1} = 2(a + b)^{1-1} = 2(a + b)^0 = 2$.

О т в е т: 2.

1.93. Упростить выражение:

$$\left(\frac{3x^{-1/3}}{x^{2/3} - 2x^{-1/3}} - \frac{x^{1/3}}{x^{4/3} - x^{1/3}}\right)^{-1} - \left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}.$$

Р е ш е н и е.

1) $\dfrac{3x^{-1/3}}{x^{2/3} - 2x^{-1/3}} = \dfrac{3x^{-1/3}}{x^{-1/3}(x-2)} = \dfrac{3}{x-2}$;

2) $\dfrac{x^{1/3}}{x^{4/3} - x^{1/3}} = \dfrac{x^{1/3}}{x^{1/3}(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$;

3) $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{3x-3-x+2}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{2x-1}{(x-2)(x-1)}$;

4) $\left[\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}\right]^{-1} = \left(\dfrac{2x-1}{(x-2)(x-1)}\right)^{-1} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{2x-1}$;

5) $\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1} = \dfrac{3x-2}{1-2x}$;

6) $\dfrac{(x-2)(x-1)}{2x-1} - \dfrac{3x-2}{1-2x} = \dfrac{x^2-3x+2}{2x-1} + \dfrac{3x-2}{2x-1} =$

$$= \frac{x^2 - 3x + 2 + 3x - 2}{2x - 1} = \frac{x^2}{2x - 1}.$$

О т в е т: $\dfrac{x^2}{2x-1}$.

Упростить выражения:

1.94. $\left(\dfrac{x^{1,5}-1}{x^{0,5}-1} + x^{0,5}\right) : \dfrac{x-1}{x^{0,5}-1}$.

1.95. $\left(\dfrac{1+x^{1,5}}{1-x^{0,5}+x} - x^{0,5}\right) \cdot \dfrac{1-x}{1-x^{0,5}}$.

1.96. $\left(\dfrac{x-x^{1/3}}{x^{2/3}-1}-2x^{1/3}+1\right)\cdot\dfrac{1+x^{1/3}}{1-x^{2/3}}.$

1.97. $\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{(a^2-ab)^{2/3}}:\dfrac{a^{-2/3}(a^2+ab+b^2)\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}.$

1.98. $\left[\left(\dfrac{1-a^{3/2}}{1-a^{1/2}}+a^{1/2}\right)\cdot\left(\dfrac{1+a^{3/2}}{1+a^{1/2}}-a^{1/2}\right)\right]:(1-a^2).$

1.99. $\left[a(1-a)^{-5/3}+(1-a)^{-2/3}\right]:\left\{\left[(1-a)^2\right]^{-1}\cdot(1-a)^{1/3}\right\}.$

1.6. Задачи для самостоятельного решения

Упростить выражения:

1.100. $\left(\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a-b}-\dfrac{a}{a^{1/2}+b^{1/2}}-\dfrac{b}{a^{1/2}-b^{1/2}}\right):\left[a^{1/2}b^{1/2}(a^{1/2}+b^{1/2})^{-1}\right].$

1.101. $\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}.$

1.102. $\left(\dfrac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\dfrac{a^0+a(a-2)}{\dfrac{1}{a^{-2}}-a+1}:\sqrt{\dfrac{1}{(a+1)^{-2}}};\ a>-1.$

1.103. $(1-a^2):\left[\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\right].$

1.104. $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}\cdot\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^{-1}:\dfrac{1}{a^2+b^2}.$

1.105. $\dfrac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2(ab^{-1}+1)^2}\cdot\left(1+\dfrac{1-a^{-1}b}{1+a^{-1}b}\right)^{-1}.$

1.106. $\left(\dfrac{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{m+\sqrt{mn}}-\dfrac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right):\sqrt{m^{-1}n}.$

1.107. $\dfrac{1-\dfrac{1}{a^2}}{1+\dfrac{1}{a^3}}\cdot\left(1-\dfrac{a^2-a^4-1}{2(a-1)}\right).$

1.108. $\dfrac{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)^2-4b}{(a-b)\ :\ \left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}\ :\ \dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}.$

1.109. $(1-m^2)^{-1/2}-\dfrac{1}{1+m^2(1-m^2)^{-1}}\cdot\dfrac{(1-m^2)^{1/2}+m^2(1-m^2)^{-1/2}}{1-m^2}.$

1.110. $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}\ :\ \dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}.$

1.111. $\left(\dfrac{m^{1/2}-n^{1/2}}{m^{3/2}-n^{3/2}}\right)^{-1}-\dfrac{1}{(m^{1/2}+n^{1/2})^{-2}}+m^{1/2}\cdot n^{1/2}.$

1.112. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}\ :\ \dfrac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}-(1-a^2).$

1.113. $\left[\left(\dfrac{1+x}{\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{x^2}\right)\left(x^{-1/3}-\sqrt[3]{x}\right)^{-1}\right]\ :\ \left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\right).$

1.114. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right).$

1.115. $\dfrac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\cdot\left[a^0+\left(\dfrac{2bc}{b^2+c^2-a^2}\right)^{-1}\right].$

1.116. $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}.$

1.117. $\left[\dfrac{b^{1/2}}{a+(ab)^{1/2}}+\dfrac{b^{1/2}}{a-(ab)^{1/2}}\right]:\left[\dfrac{a-b}{2(ab)^{1/2}}\right]^{-1}$.

1.118. $\dfrac{1}{\sqrt{1-m^2}}-\dfrac{1}{1+\dfrac{m^2}{1-m^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1-m^2}+\dfrac{m^2}{\sqrt{1-m^2}}}{1-m^2}$.

1.119. $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

1.120. $\left(\dfrac{a-b}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\dfrac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a-b}\right)\cdot(ab)^{-1/2}$.

1.121. $\sqrt{x^2-1}\cdot\left(1+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)-\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

1.122. $\left(2-\dfrac{1}{4a^{-1}}-\dfrac{4}{a}\right)\left((a-4)\cdot\sqrt[3]{(a+4)^{-3}}-\dfrac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)(a-4)}}\right)$; $a>4$.

1.123. $\left((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}\right)\ :\ \dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$.

1.124. $\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1$.

1.125. $\dfrac{4x(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}$.

1.126. $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

1.127. $\dfrac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}$.

1.128. $\dfrac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{\frac{m+n}{mn}}}{(a^{2/m}-a^{2/n})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}$; $a>0$.

1.129. $\dfrac{(x^{2/m}-9x^{2/n})\cdot(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{1/m}+3x^{1/n})^2-12x^{\frac{m+n}{mn}}}$; $x>0$.

1.130. $\left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\dfrac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\dfrac{m^2-9}{m}}}\right)^2\cdot\sqrt{\dfrac{m^2}{4}}$.

1.131. $\dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\dfrac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}$.

1.132. $\left(x\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x+1)^2}}+\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(x^2-1)^{4/5}$.

1.133. $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$.

1.134. $\dfrac{\dfrac{|b-1|}{b}+b\,|b-1|+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$.

1.135. $\left[\dfrac{(x^2+a^2)^{-1/2}+(x^2-a^2)^{-1/2}}{(x^2+a^2)^{-1/2}-(x^2-a^2)^{-1/2}}\right]^{-2}$ при $x=a\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}$, $m>0$, $n>0$.

1.136. $\left[(x+a)^{1/3}(x-a)^{-1/3}+(x+a)^{-1/3}(x-a)^{1/3}-2\right]^{-1/2}$ при $x=a\dfrac{m^3+n^3}{m^3-n^3}$, $m>0$, $n>0$.

1.137. x^3+12x при $x=\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}-\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$.

1.138. $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-8x^{-1}+16x^{-2}}}$.

1.139. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+4}}{x^{1/2}-(x-3)^{1/2}-\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2-9}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}$.

1.140. $\left(\dfrac{x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{1/2}$.

Глава 2. Алгебраические уравнения и системы уравнений

Формулы для справок

Простейшее линейное уравнение: $ax + b = 0$. **(2.1)**
Его решение:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a}, \text{ если } a \neq 0; & \textbf{(2.2)} \\ x \in (-\infty; +\infty), \text{ если } a = 0,\ b = 0; & \textbf{(2.3)} \\ \text{нет решения, если } a = 0,\ b \neq 0. & \textbf{(2.4)} \end{cases}$$

Приведенное квадратное уравнение: $x^2 + px + q = 0$. **(2.5)**
Его дискриминант: $D = p^2 - 4q$. **(2.6)**
Решение приведенного квадратного уравнения:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ если } D > 0; & \textbf{(2.7)} \\ x_1 = x_2 = -\dfrac{p}{2}, \text{ если } D = 0; & \textbf{(2.8)} \\ \text{нет действительных корней, если } D < 0. & \textbf{(2.9)} \end{cases}$$

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$ **(2.10)**

Полное квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. **(2.11)**
Его дискриминант: $D = b^2 - 4ac$. **(2.12)**
Решение полного квадратного уравнения:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ если } D > 0; & \textbf{(2.13)} \\ x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}, \text{ если } D = 0; & \textbf{(2.14)} \\ \text{нет действительных корней, если } D < 0. & \textbf{(2.15)} \end{cases}$$

Если $b = 2k$ — четное, то корни уравнения **(2.11)**:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \quad \textbf{(2.16)}$$

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a. \end{cases}$ **(2.17)**

2.1. Линейные уравнения

2.1. Решить уравнение: $2x - 7 = 0$.

Решение. $x = \dfrac{7}{2}$ — см. формулу **(2.2)**.

Ответ: $\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$.

2.2. Решить уравнение: $5x = 0$.

Решение. $x = \dfrac{0}{5} = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

2.3. Решить уравнение: $\dfrac{x}{2} - 4 + \dfrac{x}{3} = 7 + \dfrac{5x}{6}$.

Решение. Приведя к общему знаменателю и перенеся все члены уравнения в левую часть, получаем: $3x - 24 + 2x - 42 - 5x = 0$, откуда $0 \cdot x - 66 = 0$; $0 = 66$ (ложно).

Ответ: нет решения.

2.4. Решить уравнение: $4x + 11 - 8\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) = 19$.

Решение. $4x + 11 - 4x + 8 - 19 = 0$; $0 \equiv 0$, т.е. уравнение представляет тождество при любых значениях x.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Если уравнение содержит неизвестный параметр, то решение уравнения зависит от значений параметра.

2.5. Решить уравнение: $2x - 3 = m\left(\dfrac{x}{3} + 4\right) - 1$.

Решение. $2x - \dfrac{mx}{3} - 3 - 4m + 1 = 0$; $\left(2 - \dfrac{m}{3}\right)x + (-2 - 4m) = 0$.

Если $2 - \dfrac{m}{3} \neq 0$, т.е. $m \neq 6$, то $x = \dfrac{2 + 4m}{2 - \dfrac{m}{3}} = \dfrac{6\,(1 + 2m)}{6 - m}$ (см. **2.2**).

Если $2 - \dfrac{m}{3} = 0$, т.е. $m = 6$, то уравнение примет вид:

$0 \cdot x - 26 = 0$; $0 = 26$ (ложно); нет решения (см. **2.4**).