ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается **конечномерная механическая система**, состоящая из конечного числа **материальных точек** и конечного числа **твёрдых тел**. Каждый представитель системы — точка или тело — совершает движение и испытывает воздействие извне. Соответственно, механика состоит из трёх разделов. Первый — **кинематика** — изучает движение вне зависимости от причин его возникновения. Второй — **статика** — изучает взаимодействие с внешней средой и характеристики этого взаимодействия. В настоящем курсе раздел статики специально не выделен и вопросы, связанные с ним, подробно не рассматриваются. Наконец, третий раздел — **динамика** — изучает связь движения и воздействия извне.

Механическая система движется в трёхмерном евклидовом пространстве — **системе отсчёта**. Предполагается, что есть возможность различать и именовать точки пространства.

Теоретическая механика строится аксиоматически. Некоторые утверждения — аксиомы, постулаты, законы, начала — принимаются за истину. Они будут формулироваться по мере необходимости. Прочие утверждения следуют из аксиом (правильные) или аксиомам противоречат (неправильные).

Отметим некоторые особенности курса. В разделе «Кинематика» достаточно подробно обсуждены криволинейные координаты. В кинематике твёрдого тела обращено внимание на то, что «элементарной частицей» движения тела является чистое вращение. Рассмотрены статико-кинематические аналогии, статический винт, кинематический винт. Изложено кватернионное описание положения твёрдого тела, введены параметры Родрига—Гамильтона и кинематические уравнения в них. В разделе «Динамика» изложение основных законов проведено одновременно в инерциальной и неинерциальной системах отсчёта. Обсуждение движения под действием центральных сил проделано как в потенциальном случае, так и в непотенциальном. В динамике твёрдого тела приведена интерпретация Пуансо, изучены свободная регулярная прецессия и вынужденная регулярная прецессия, в том числе в случае Лагранжа.

Нестандартные обозначения объяснены в тексте.
Предполагается, что

- функции, участвующие в построениях, — достаточно гладкие;
- рассуждения, определения, утверждения — локальны.

Продолжение настоящего «Краткого курса теоретической механики» в «Кратком курсе аналитической динамики» [15]. Автор благодарит А. Р. Шакурова за помощь в оформлении.

Движенье — счасти-и-е моё,
движе-е-нье...»
«В путь», из цикла «Прекрасная мельничиха»,
Опус 25, 1823 год

Музыка Франца Шуберта,
стихи Вильгельма Мюллера

КИНЕМАТИКА

ГЛАВА 1

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1. ТРАЕКТОРИЯ, СКОРОСТЬ, УСКОРЕНИЕ

Определение 1.1. Материальная точка — *геометрическая точка, которой поставлено в соответствие положительное число* m — *масса.*

В системе отсчёта (см. введение) фиксируется точка O, а положение материальной точки A в каждый момент времени t определяется **радиус-вектором** $\mathbf{r}$: начальная точка радиус-вектора $\mathbf{r}$ в точке O, материальная точка A совпадает с конечной точкой $\mathbf{r}$. Задать движение материальной точки A — задать тем или иным способом вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$. Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определяет три кинематические характеристики движущейся точки: траекторию, скорость, ускорение.

Определение 1.2. Траектория *материальной точки — годограф радиус-вектора* $\mathbf{r}(t)$.

Введём геометрические характеристики траектории [13, § 22]. Фиксируем на траектории точку B, от которой вычисляется длина дуги s, и направление положительного отсчёта дуги (рис. 1.1). Таким образом, каждой точке A траектории ставится в соответствие число s (положительное или отрицательное) — расстояние по траектории между точками A и B. Радиус-вектор, проведённый к некоторой точке траектории, также становится функцией длины дуги s: $\mathbf{r}(s)$. По этой функции вычисляются орты **сопровождающего трёхгранника**.

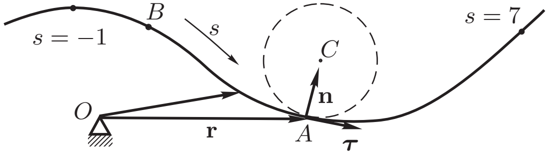

Рис. 1.1

Орт касательной

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{1.1}$$

Подчеркнём, что $\boldsymbol{\tau}$ — орт:

$$(\boldsymbol{\tau},\, \boldsymbol{\tau}) = 1 \tag{1.2}$$

(здесь и далее используются обозначения: (,) — скалярное произведение векторов, [,] — векторное). Орт $\boldsymbol{\tau}$ располагается на касательной к траектории и направлен в сторону увеличения длины дуги.

Орт нормали. Вводится **вектор кривизны**

$$\mathbf{K} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\,, \tag{1.3}$$

который характеризует скорость поворота орта касательной. Орт нормали $\mathbf{n}$ — орт, задающий направление вектора кривизны:

$$\mathbf{K} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = K\mathbf{n} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}, \quad K = \frac{1}{\rho}. \tag{1.4}$$

Вместо величины K кривизны удобно использовать **радиус кривизны** ρ — радиус окружности, аппроксимирующей траекторию в данной точке (рис. 1.1). Центр C этой окружности называется **центром кривизны**. Орт $\mathbf{n}$ направлен к центру кривизны C. Из (1.2)–(1.4) следует ортогональность ортов $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$:

$$0 = \frac{d}{ds}\,(\boldsymbol{\tau},\, \boldsymbol{\tau}) = 2(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\,,\, \boldsymbol{\tau}) = 2(\mathbf{K},\, \boldsymbol{\tau}) = 2\,\frac{1}{\rho}\,(\mathbf{n},\, \boldsymbol{\tau}).$$

Вместо термина «орт нормали» используется также термин «орт главной нормали».

Орт бинормали $\mathbf{b}$ вводится так, чтобы три вектора $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ — сопровождающий трёхгранник — представляли собой правый ортонормированный базис: $\mathbf{b} = [\boldsymbol{\tau},\, \mathbf{n}]$.

Одним из способов задания движения материальной точки — $\mathbf{r}(t)$ — является задание траектории $\mathbf{r}(s)$ и движения по ней $s(t)$.

Определение 1.3. Скорость *материальной точки определяется следующим образом*

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{1.5}$$

Из формул (1.5) и (1.1) следует

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau}\,\frac{ds}{dt} = V\boldsymbol{\tau}, \tag{1.6}$$

т. е., во-первых, скорость $\mathbf{V}$ направлена по касательной к траектории, во-вторых, величина скорости V равна производной по времени t от пройденного пути:

$$V = \frac{ds}{dt}\,. \tag{1.7}$$

Определение 1.3 скорости открывает возможность вычислять производные по времени от векторов $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ разной природы.

Теорема 1.1 (*А. Резаль,* [1, 10]). *Пусть A и B начальная и конечная точки вектора $\mathbf{a}(t) = \overline{AB}$. Справедлива следующая формула*

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{V_B} - \mathbf{V_A}. \tag{1.8}$$

□ Введём неподвижную в системе отсчёта точку O и отложим от неё радиус-векторы $\mathbf{r_A}$ и $\mathbf{r_B}$, проведённые к точкам A и B (рис. 1.2). Утверждение (1.8) теоремы следует из определения 1.3 и формул

$$\mathbf{a} = \mathbf{r_B} - \mathbf{r_A}, \qquad \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{B} - \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{A} = \mathbf{V_B} - \mathbf{V_A}. \qquad \blacksquare$$

Определение 1.4. Ускорение *материальной точки определяется следующим образом*

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \dot{\mathbf{V}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}. \tag{1.9}$$

Из формул (1.6) и (1.9) следует

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d(V\boldsymbol{\tau})}{dt} = \frac{dV}{dt}\,\boldsymbol{\tau} + V\,\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\,.$$

Вычисления с учётом (1.4) и (1.7)

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}\,V$$

приводят к результату

$$\mathbf{W} = \frac{dV}{dt}\,\boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\,\mathbf{n} = \mathbf{W}_\tau + \mathbf{W}_n : \tag{1.10}$$

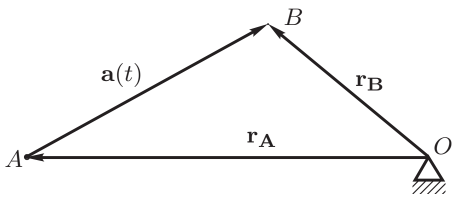

Рис. 1.2

разложению ускорения $\mathbf{W}$ по ортам сопровождающего трёхгранника. Компоненты разложения называются: $\mathbf{W}_\tau$ — **касательное** или **тангенциальное ускорение**, $\mathbf{W}_n$ — **нормальное ускорение**, — и имеют величины

$$W_\tau = \frac{dV}{dt}, \quad W_n = \frac{V^2}{\rho}. \tag{1.11}$$

Так как векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ ортогональны, справедливо равенство

$$W^2 = W_\tau^2 + W_n^2. \tag{1.12}$$

§ 2. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Одна из возможностей именовать точки системы отсчёта (см. введение) — задание правого ортонормированного базиса: в пространстве фиксируются такие четыре точки O, A_1, A_2, A_3, что для базисных векторов $\mathbf{i}_k = \overline{OA_k}$ справедливо равенство

$$(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \tag{2.1}$$

«Фамилия, имя, отчество» произвольной точки В — коэффициенты $x_k = (\mathbf{r}, \mathbf{i}_k)$ разложения радиус-вектора $\mathbf{r} = \overline{OB}$ по базису $\mathbf{i}_k$: $\mathbf{r} = \sum\limits_{k=1}^{3} x_k \mathbf{i}_k$ (рис. 2.1). Далее числа x_1, x_2, x_3 для краткости называются декартовыми координатами (вместо «прямоугольные декартовы»).

С применением декартовых координат проиллюстрируем понятия, введённые в § 1.

Пример 2.1. Точка P совершает движение по окружности радиуса R (рис. 2.2). Положение точки определяет радиус-вектор $\mathbf{r} = \overline{CP} = R(\mathbf{i_1} \cos\varphi + \mathbf{i_2} \sin\varphi)$, где φ — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{i_1}$. Длина дуги $\widehat{OP}$ равна $s = R\varphi$, откуда следует равенство $\varphi = s/R$. По

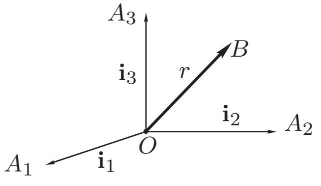

Рис. 2.1

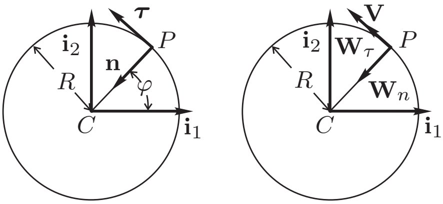

Рис. 2.2

формуле (1.1) вычисляется орт касательной

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds} = -\mathbf{i_1}\sin\varphi + \mathbf{i_2}\cos\varphi.$$

По формуле (1.3) вычисляется вектор кривизны

$$\mathbf{K} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds} = -\,\frac{1}{R}\,(\mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi) = -\,\frac{1}{R}\,\mathbf{n},$$

откуда следуют выражения для радиуса кривизны ρ и орта нормали $\mathbf{n}$:

$$\rho = R, \quad \mathbf{n} = -(\mathbf{i_1}\cos\varphi + \mathbf{i_2}\sin\varphi).$$

По формуле (1.5) скорость точки равна

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = R\dot{\varphi}(-\mathbf{i}_1\sin\varphi + \mathbf{i}_2\cos\varphi) = R\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau},$$

а величина скорости при движении точки по окружности равна $V = R\dot{\varphi}$. По формуле (1.9) ускорение точки равно

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}} = R\ddot{\varphi}(-\mathbf{i}_1\sin\varphi + \mathbf{i}_2\cos\varphi) - R\dot{\varphi}^2(\mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi) = \\ = R\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau} + R\dot{\varphi}^2\mathbf{n},$$

а величины касательного и нормального ускорений при движении точки по окружности равны $W_\tau = R\ddot{\varphi}$, $W_n = R\dot{\varphi}^2$.

§ 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ (ОБОБЩЁННЫЕ) КООРДИНАТЫ

Положение материальной точки в системе отсчёта определяется положением радиус-вектора $\mathbf{r}$, начальная точка которого неподвижна, а конечная точка совпадает с материальной точкой. Положение точки в трёхмерном пространстве можно задавать тремя числами: $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$.

Определение 3.1. *Числа* q_1, q_2, q_3 *называются* **криволинейными (обобщёнными) координатами** *при выполнении двух условий.*

1. Три числа q_1, q_2, q_3 находятся в взаимно однозначном соответствии с любым положением точки в системе отсчёта.

2. Фиксируем точку q_1^0, q_2^0, q_3^0 в системе отсчёта. Две координаты q_2^0, q_3^0 оставим фиксированными, а одной координате q_1 дозволим изменяться. Конечная точка радиус-вектора $\mathbf{r}(q_1, q_2^0, q_3^0)$ прочертит кривую, которая называется **координатной линией**, соответствующей координате q_1 (рис. 3.1). Вектор $\mathbf{H_1}(q) = \partial\mathbf{r}(q)/\partial q_1$ — **касательный вектор к координатной линии** (здесь и в подобных случаях

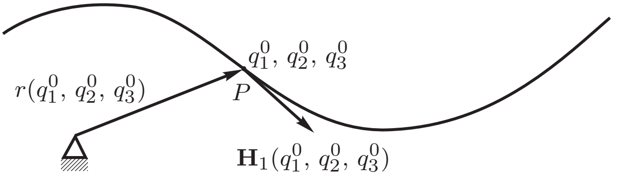

Рис. 3.1

используется обозначение $q = (q_1,\ q_2,\ q_3)$). Аналогично строятся другие координатные линии и касательные векторы к ним

$$\mathbf{H_i}(q) = \frac{\partial \mathbf{r}(q)}{\partial q_i}\,. \tag{3.1}$$

Второе условие требует линейную независимость касательных векторов $\mathbf{H_1}(q)$, $\mathbf{H_2}(q)$, $\mathbf{H_3}(q)$ в каждой точке q системы отсчёта.

При выполнении условий 1 и 2 три вектора $\mathbf{H_1}(q)$, $\mathbf{H_2}(q)$, $\mathbf{H_3}(q)$ образуют в каждой точке системы отсчёта **локальный базис**, соответствующий конкретным криволинейным координатам. Скалярные функции

$$H_i(q) = |\mathbf{H_i}(q)| \tag{3.2}$$

называются **коэффициентами Ламе**. Криволинейные координаты, для которых выполняется

$$(\mathbf{H_i},\ \mathbf{H_k}) = 0, \quad i \neq k, \tag{3.3}$$

называются **ортогональной системой координат**.

Задать движение $\mathbf{r}(t)$ материальной точки в криволинейных координатах это, во-первых, задать связь $\mathbf{r}(q)$ положения точки в системе отсчёта с координатами q, во-вторых, задать изменение координат $q(t)$ во времени t. Если обе зависимости заданы, скорость точки равна

$$\mathbf{V}(q,\ \dot{q}) = \frac{d\mathbf{r}(q)}{dt} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}(q)}{\partial q_i}\,\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{H_i}(q)\dot{q}_i \tag{3.4}$$

— использовано обозначение (3.1). Для величины скорости из (3.4) следует

$$V^2(q,\ \dot{q})) = (\mathbf{V},\ \mathbf{V}) = \sum_{i,\,k=1}^{3} (\mathbf{H_i}(q),\ \mathbf{H_k}(q))\,\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{3.5}$$

Для ортогональных систем координат (см. (3.2), (3.3)) формула (3.5) упрощается:

$$V^2(q,\ \dot{q})) = \sum_{i=1}^{3} H_i^2(q)\dot{q}_i^2. \tag{3.6}$$

Из выражения (3.4) следует

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \tag{3.7}$$

(q_i и $\dot{q}_i$ — независимые переменные). Выражение (3.4) влечёт также формулу

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\,, \tag{3.8}$$

для обоснования которой сравнивается результат вычисления производной по t в правой части формулы (3.8) с результатом дифференцирования по q_k выражения (3.4).

С учётом обозначений (1.9), (3.1), формул (3.7), (3.8) и правила дифференцирования произведения выведем соотношение

$$(\mathbf{H}_i,\, \mathbf{W}) = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{V^2(q,\, \dot{q})}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{V^2(q,\, \dot{q})}{2}\right) \tag{3.9}$$

для ускорения $\mathbf{W}$ точки:

$$(\mathbf{H}_i,\, \mathbf{W}) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\,,\, \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\,,\, \mathbf{V}\right) - \left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\,,\, \mathbf{V}\right) \overset{(3.7),\,(3.8)}{=}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_i}\,,\, \mathbf{V}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_i}\,,\, \mathbf{V}\right) = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{V^2}{2}\right).$$

Последний переход есть результат очевидных вычислений (z — некоторая переменная):

$$\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\,,\, \mathbf{V}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial z}\,(\mathbf{V},\, \mathbf{V}) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right).$$

В частности, если обе части второго закона Ньютона $m\mathbf{W} = \mathbf{F}$ (§ 15) умножить скалярно на вектор $\mathbf{H}_i$, ввести обозначения для кинетической энергии $T(q,\, \dot{q}) \;=\; mV^2(q,\, \dot{q})/2$ и для обобщённой силы $Q_i = (\mathbf{F},\, \mathbf{H_i}) = (\mathbf{F},\, \partial \mathbf{r}/\partial \mathbf{q_i})$, то с учётом формулы (3.9) получим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \tag{3.10}$$

для свободной материальной точки.

Формула (3.9) определяет также проекцию ускорения $\mathbf{W}$ на касательную к координатной линии

$$\frac{1}{H_i}\,(\mathbf{H}_i,\, \mathbf{W}) = \frac{1}{H_i}\left\{\frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{V^2(q,\, \dot{q})}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{V^2(q,\, \dot{q})}{2}\right)\right\}. \tag{3.11}$$

Для ортогональной системы координат (см. (3.3)) выражения (3.11) есть коэффициенты W_i разложения ускорения $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{3} W_i \mathbf{e}_i$ по ортам $\mathbf{e}_i$, связанным с касательными к координатным линиям.

Проиллюстрируем введённые в этом параграфе понятия на примере.

Пример 3.1. На рис. 3.2 положение точки P определено цилиндрическими координатами r, φ, z. Радиус-вектор раскладывается по ортонормированному базису $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ следующим образом:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} r\cos\varphi + \mathbf{j} r\sin\varphi + \mathbf{k} z. \tag{3.12}$$

В соответствии с формулами (3.1) и (3.2) вычисляются векторы, касательные к координатным линиям, и коэффициенты Ламе:

$$\mathbf{H}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi, \quad H_r = 1,$$

$$\mathbf{H}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\mathbf{i} r\sin\varphi + \mathbf{j} r\cos\varphi, \quad H_\varphi = r,$$

$$\mathbf{H}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}, \quad H_z = 1.$$

По формуле (3.4) скорость точки, движение которой задано цилиндрическими координатами $r(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$, равна

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}_r \dot{r} + \mathbf{H}_\varphi \dot{\varphi} + \mathbf{H}_z \dot{z}.$$

Вычисления $(\mathbf{H}_r, \mathbf{H}_\varphi) = 0$, $(\mathbf{H}_r, \mathbf{H}_z) = 0$, $(\mathbf{H}_z, \mathbf{H}_\varphi) = 0$ приводят к выводу (см. (3.3)): цилиндрические координаты являются ортогональными, вследствие чего величина скорости вычисляется по формуле (3.6):

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

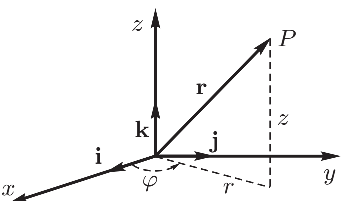

Рис. 3.2

Учёт этого результата в соотношении (3.9) определит левые части уравнений Лагранжа (3.10):

$$m(\mathbf{H}_r,\,\mathbf{W}) = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2),\;\; m(\mathbf{H}_\varphi,\,\mathbf{W}) = m(r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi}),\\ m(\mathbf{H}_z,\,\mathbf{W}) = m\ddot{z} \tag{3.13}$$

и проекции ускорения $\mathbf{W}$ на касательные к координатным линиям (см. (3.11)):

$$W_r = (\mathbf{H}_r,\,\mathbf{W}) = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad W_\varphi = (\mathbf{H}_\varphi,\,\mathbf{W})/r = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi},\\ W_z = (\mathbf{H}_z,\,\mathbf{W}) = \ddot{z}.$$