ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие ребята!

Перед вами третья часть учебника по алгебре. Она посвящена центральному понятию математики — понятию функции, знакомству с основами теории вероятностей, её задачами и методами, а также с последовательностями и их свойствами.

Глава 1 учебника содержит всё, что можно отнести к понятию *рациональной функции*, т. е. функции, значения которой вычисляются с помощью четырёх арифметических действий. Оказывается, что таких функций очень много, и их поведение может быть самым различным. Учебник научит вас строить графики функций и расскажет об их свойствах. С помощью графиков вы сможете решать уравнения, неравенства и даже системы уравнений. Вы научитесь обращаться со степенями, имеющими целые показатели, решать интересные задачи, показывающие, как неожиданно быстро меняются степени при изменении показателя.

В главе 2 вы познакомитесь с начальными сведениями теории вероятностей. Вы узнаете, что собой представляют случайные события и какие закономерности ими управляют.

Глава 3 имеет особый характер. Она посвящена *последовательностям чисел*. Вы узнаете о *прогрессиях*, познакомитесь со многими знаменитыми последовательностями, научитесь находить их суммы, впервые «прикоснётесь к бесконечности» — поймёте, как математики древности научились складывать бесконечное число слагаемых, какие трудности и противоречия возникали на этом пути. Вас ждёт в этой главе знакомство с *методом математической индукции* — замечательным методом доказательства различных теорем, который покажет, что не только в геометрии, где вы уже привыкли к стройным рассуждениям, но и в алгебре возможны точные способы доказательства.

Как обычно, в конце каждой главы помещены вопросы для самопроверки и большое количество задач различной степени сложности.

Особое место в учебнике занимают сюжеты и проекты, имеющиеся, как и в предыдущих учебниках, в каждой главе. Они могут служить материалом для самостоятельной исследовательской работы и быть оформлены в виде докладов и рефератов.

В конце учебника помещены тесты и задания различного уровня сложности, которые позволят проверить полученные знания, подготовиться к ГИА, а также определиться в выборе дальнейшего направления образования.

Текст учебника сопровождается *навигатором*. Он размещается на полях книги. Напомним значение навигационных значков-пиктограмм:

www пройди по ссылке на интернет-ресурс;

выполни домашний эксперимент или проект;

запомни определение или важное утверждение;

дополнительное разъяснение, комментарий;

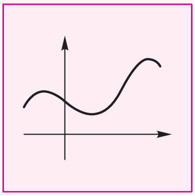
материал, необходимый для подготовки к Государственной итоговой аттестации (ГИА);

ответь на вопросы к параграфу;

выполни лабораторную работу.

Успехов вам!

Автор



ГЛАВА I
ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Введение

Ещё в начале XVII в. знаменитый итальянский учёный Галилео Галилей сказал, что Вселенная — это величайшая книга, которая всегда открыта перед нашими глазами, но её нельзя понять, не научившись сначала понимать её язык. А написана она на математическом языке.

Язык математики развивается постоянно. В конце XVII в. он обогатился понятиями *переменная*, *зависимость*, *функция*, которые определили развитие математики на следующие триста лет — вплоть до нашего времени.

Развитие теории функций связано с плеядой великих имён, которые вы встречаете в нашем курсе постоянно, — Декарт, Ньютон, Лейбниц, Бернулли, Эйлер и др. Глубокое отличие новой математики, созданной этими учёными и их многочисленными учениками и последователями, от античной математики, представленной величайшими мыслителями Пифагором, Евклидом, Архимедом, состоит в следующем. Античная математика изучала *состояния*, которые могли быть очень сложными, но как бы застывшими. Достижения античности дошли до нас и в статичных треугольниках Евклида, и в неподвижных храмах с их колоннадами и статуями. Новая математика стала интересоваться *процессами*, изменением, движением. Ей свойственна убеждённость в неизбежности перемен. Язык переменных и функций оказался очень удобным для описания того, как могут меняться различные величины в зависимости друг от друга.

У вас уже есть начальные представления о функциях. Задача курса алгебры девятого класса — уточнить эти представления с помощью знакомства с широким классом функций, которые получаются, если использовать все возможности четырёх арифметических действий, а также возведение в степень и извлечение корня. Однако для проникновения в суть новой математики этих операций недостаточно. Мы столкнёмся с необходимостью рассматривать некоторые бесконечные процессы. Нам часто приходится задумываться об отдалённом будущем. Что будет с космическим кораблём через большой промежуток времени после его запуска? А как изменится наша планета? Что происходит с веществом, если окружающую температуру приближать к абсолютному нулю? Можно ли увеличивать скорость до бесконечности?

Для описания бесконечных процессов математика ввела понятие *предела*, с помощью которого удалось решить многие задачи, которые были недоступны ранее. Конечно, такой гениальный учёный, как Архимед, намного опередивший своё время, смог сосчитать некоторые бесконечные суммы, не зная ни о каких пределах. Но каждый его результат стоял как бы особ-

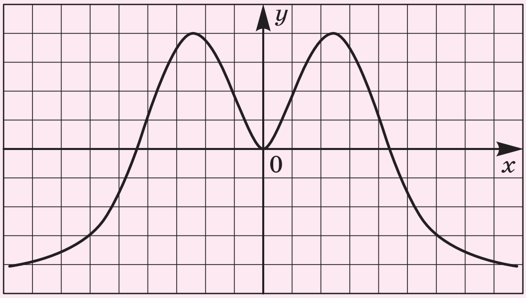


Рис. 1

няком, а новая математика создала методы изучения переменных величин, доступные всем. Мы постепенно будем готовиться к восприятию этих идей теории функций.

При изучении функций мы будем широко пользоваться графиками. Они помогут нам наглядно представить свойства функций, подскажут пути решения различных задач, предохранят от случайных ошибок. Посмотрите на график (рис. 1). Ещё до знакомства с точными определениями какие свойства функции вы могли бы указать, глядя на этот график?

§ 1
Понятие функции

Определяем функцию

Пусть даны две переменные, обозначенные буквами x и y. Переменная y называется *функцией* от переменной x, если для каждого значения переменной x можно однозначно вычислить соответствующее значение переменной y.

Функция описывает преобразование — переход от переменной x к переменной y. Этот переход часто обозначают одной буквой, например буквой f (первой буквой латинского слова *functio* — исполнять), и связь между переменными записывают так: $y = f(x)$.

Сам термин «функция» стал употребляться Готфридом Лейбницем и его учеником Иоганном Бернулли с 1698 г. Определение функции, данное И. Бернулли, выглядит в переводе так:

Готфрид Лейбниц
(1646–1716)

Иоганн Бернулли
(1667–1748)

«*Функцией переменной величины называется количество, образованное каким угодно способом из этой переменной и постоянных*».

Некоторое время понятие функции сближалось с понятием формулы. Так Л. Эйлер в 1748 г., уточняя определение Бернулли, пишет: «*Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-то образом из этого количества и чисел*».

Замечательный русский математик Н. И. Лобачевский, чьё имя мы всегда связываем с открытием «геометрии Лобачевского», «неевклидовой геометрии», вслед за Эйлером писал: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое даётся для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подаёт средства испытывать все числа и выбирать одно из них . . . »

Развитие понятия функции не остановилось в XVIII в., хотя мы, прежде всего, используем определения функции, близкие к приведённым. В конце XIX в. сформировалось понятие отображения, развивающее понятие числовой функции, а в XX в. в связи с потребностями физики возникли «обобщённые функции», ушедшие по внешнему виду далеко от исходных представлений о функции.

При этом часто именно букву f считают символом функции и говорят так: «Пусть дана функция f» или «возьмём функцию f» и т. п.

! Переменная x называется *аргументом* функции.

Леонард Эйлер
(1707–1783)

Николай Иванович Лобачевский
(1792–1856)

Чаще всего вычисление значений функции задаётся с помощью формулы, например:

1) $y = 2x$;
2) $y = x + 1$;
3) $y = x^2$;
4) $y = \frac{1}{x}$;
5) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

В каждом из этих примеров указана формула, позволяющая для каждого значения переменной x однозначно вычислить значение переменной y, или, как говорят иначе, для каждого значения *аргумента* найти значение *функции*.

Возьмём, например, значение переменной x, равное 3, и вычислим значения переменной y в наших примерах:

1) $y = 2x$; $x = 3 \Rightarrow y = 6$;
2) $y = x + 1$; $x = 3 \Rightarrow y = 4$;
3) $y = x^2$; $x = 3 \Rightarrow y = 9$;
4) $y = \frac{1}{x}$; $x = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$;
5) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; $x = 3 \Rightarrow y = \dfrac{1}{10}$.

Для того чтобы задать функцию, нужно указать не только правило вычисления её значений, но и множество всех возможных значений аргумента.

Множество чисел D, для которых задано правило вычисления значений функции, называется *областью определения функции*.

Область определения функции обычно связана со смыслом независимой переменной. Например, если через x обозначено время движения поезда, то нужно считать, что x может принимать любое положительное значение (хотя вряд ли стоит рассматривать движение того же самого поезда через 100 лет). Если же мы отвлекаемся от этого смысла и задаём правило вычисления значений функции с помощью формулы, то областью определения функции считается множество всех чисел, для которых выполнимы все действия в данной формуле. Множество таких значений x иногда называют *естественной* областью определения функции f.

Например, в первых трёх и пятом примерах формулы имеют смысл при всех значениях x, а в четвёртом — при всех x, кроме нуля.

Можно сказать, что областью определения первых трёх функций является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, а в четвёртом примере — множество чисел $x \neq 0$.

Это можно записать так: $D(f) = \boldsymbol{R}$ или $D(f)$: x — любое число; $D(f) = \{x \neq 0\}$ или $D(f)$: $x \neq 0$.

Находим множество значений функции

Термин ***множество значений функции*** уже сам по себе определяет его смысл: это *множество* состоит из всех *значений* данной *функции*.

Множество значений функции f мы будем обозначать $E(f)$. Если дана функция $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$, то её множество значений можно записать так: $E(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$.

Пусть дана функция f с областью определения $D(f)$ и множеством значений $E(f)$. Что означает запись $a \in E(f)$? Это значит, что число a является одним из значений функции f, т. е. найдётся такое число $x \in D(f)$, при котором $f(x) = a$. Можно сказать иначе: число a принадлежит множеству значений функции f, если разрешимо уравнение $f(x) = a$ в области допустимых значений $x \in D(f)$.

Вернёмся к нашим примерам.

1) $y = 2x$, $D = \boldsymbol{R}$. Уравнение $2x = a$ разрешимо при любом a: $x = \frac{a}{2}$. $E = \boldsymbol{R}$.

2) $y = x + 1$, $D = \boldsymbol{R}$. Ситуация аналогична: уравнение $x + 1 = a$ имеет корень $x = a - 1$ при любом a. $E = \boldsymbol{R}$.

3) $y = x^2$, $D = \boldsymbol{R}$. Уравнение $x^2 = a$ имеет решение (в действительных числах) при $a \geqslant 0$ и только при них. $E = [0; +\infty)$.

4) $y = \frac{1}{x}$, $D = \{x \neq 0\}$. Уравнение $\frac{1}{x} = a$ имеет решение $x = \frac{1}{a}$ при любом a, кроме нуля. E: $y \neq 0$.

5) $y = \frac{1}{1+x^2}$. $D = \boldsymbol{R}$. Уравнение $\frac{1}{1+x^2} = a \Leftrightarrow ax^2 = 1 - a$. Очевидно, что $a > 0$, так как при $a \leqslant 0$ уравнение $\frac{1}{1+x^2} = a$ решений не имеет: справа стоит отрицательное число или нуль, а слева положительное число. При $a > 0$ получим $x^2 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow$ $\Rightarrow a \leqslant 1$. Итак, уравнение имеет решение при $0 < a \leqslant 1$, следовательно, $E = (0; 1]$.

Строим график функции

Чтобы построить график функции, надо предварительно выбрать на плоскости *систему координат*. Если переменные, зависимость между которыми мы хотим изобразить в виде графика, обозначены буквами x и y, то и координатные оси нужно обозначить теми же буквами (рис. 2).

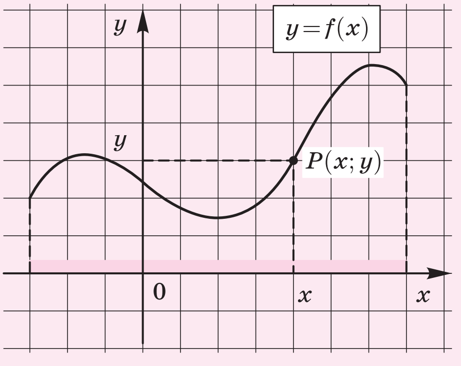


Рис. 2

Пусть дана функция $y = f(x)$ с областью определения D. *Графиком функции* f в системе координат xOy называется множество точек с координатами $(x; f(x))$, где x принимает все значения из множества D.

Итак, точка P с координатами $(x; y)$ принадлежит графику функции f в том и только в том случае, когда ордината этой точки, т. е. число y, равна значению функции f в точке x, т. е. когда выполняется равенство $y = f(x)$.

Графики упоминавшихся в наших примерах функций нам известны.

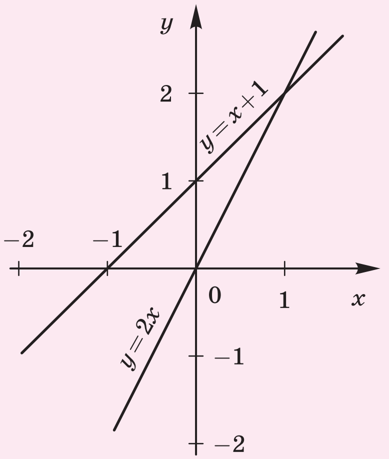


Рис. 3

1) $y = 2x$ (рис. 3). Точка $A(2; 4)$ лежит на графике, так как $4 = 2 \cdot 2$, точка $B(3; 8)$ не лежит на графике, так как $8 \neq 2 \cdot 3$.

График — прямая, проходящая через начало координат, с *коэффициентом пропорциональности* $k = 2$ (его также называют *угловым коэффициентом прямой*).

2) $y = x + 1$ (рис. 3).

График — прямая, проходящая через точку $(0; 1)$, с угловым коэффициентом $k = 1$. Точка $C(3; 4)$ лежит на графике, так как $4 = 3 + 1$, точка $D(5; 8)$ не лежит на графике, так как $8 \neq 5 + 1$.

3) $y = x^2$ (рис. 4).

График — парабола с вершиной в начале координат, проходящая через точку $(1; 1)$.

Точка $E(-3; 9)$ лежит на графике, так как $(-3)^2 = 9$, точка $F(-2; 5)$ не лежит на графике, так как $(-2)^2 \neq 5$.

4) $y = \frac{1}{x}$ (рис. 5).

График — гипербола, лежащая в первой и третьей четвертях.

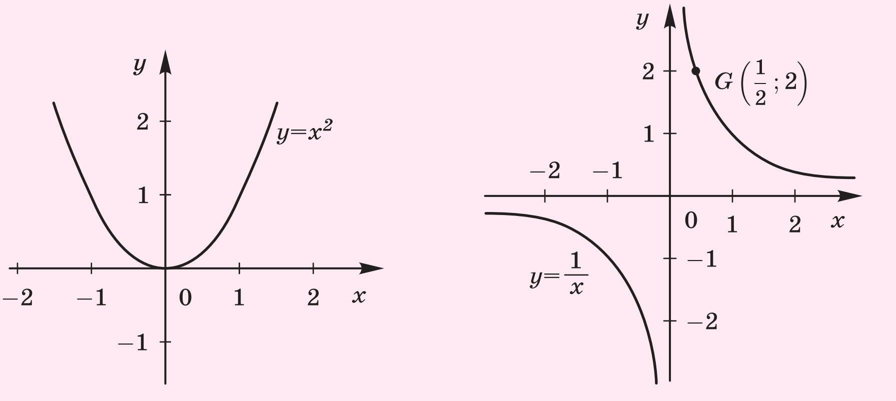


Рис. 4 Рис. 5

Точка $G\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ лежит на графике, так как $2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}$. Точка $H\left(\frac{1}{5}; 3\right)$ не лежит на графике, так как $3 \neq \frac{1}{\frac{1}{5}}$.

Комментарий. Когда ставят задачу «построить график», имеют в виду дать примерный эскиз графика, отметив его характерные особенности. Так, строя прямую — график линейной функции, надо правильно отметить точки пересечения этой прямой с осями координат; строя параболу — график квадратичной функции, надо следить за правильностью нахождения координат её вершины и направлением её ветвей; строя гиперболу — график дробно-линейной функции, надо правильно провести «крест» – горизонтальную и вертикальную прямые, к которым будут приближаться точки графика (их называют асимптотами), а также выбрать «четверти», где будут располагаться ветви гиперболы.

Используем различные способы задания функции

1. Задание функции формулой. Выше мы обсуждали примеры такого способа задания функций. Если $P(x)$ — многочлен, то формула $y = P(x)$ задаёт *целую функцию*, определённую при всех значениях аргумента x. Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — рациональная дробь, заданная отношением многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, то формула $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ определяет *рациональную функцию*, определённую при всех значениях x, кроме тех, для которых $Q(x) = 0$. Мы можем строить новые функции $y = f(x)$, применяя к уже известным нам функциям арифметические и алгебраические действия.

2. Задание функции таблицей значений. Часто на практике функция задаётся не формулой, а таблицей значений.

Например, в таблице I.1 приведены значения курса доллара в рублях за 10 первых дней месяца. Можно считать, что независимой переменной x является номер дня (от 1 до 10), а функцией y — число, показывающее курс доллара в день с номером x. Так мы построим функцию $y = f(x)$, заданную для *конечного* множества значений x. Графиком такой функции будет конечный набор из 10 точек. Однако часто для наглядности эти точки соединяют отрезками (как бы считают, что курс равномерно менялся за сутки) и полученную ломаную считают графиком

Таблица I.1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	31,15	31,20	31,45	31,20	31,20	31,15	31,30	31,50	31,55	31,60

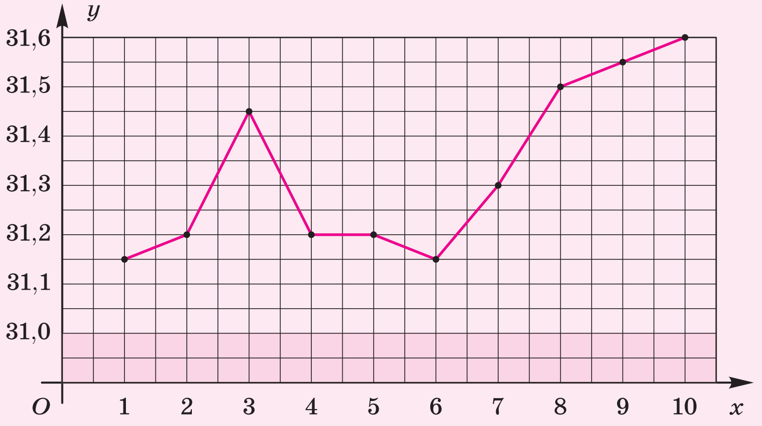


Рис. 6

курса доллара (рис. 6). Вы часто можете наблюдать в газетах графики такого рода.

Обратите внимание, что по оси y отложены значения от 31,0 до 31,6. Разумеется, начало оси y тем самым находится не в точке O, а гораздо ниже. Аналогично и по оси x откладывают номера дня так, чтобы первый из них приходился на O (так что наш график надо было бы сдвинуть влево на единицу). Наконец, заметьте, что масштабы по осям x и y выбраны так, чтобы было удобно наносить точки. Они оказались разными. Однако при построении графиков функций, заданных формулами, мы будем выбирать масштаб одинаковым.

3. Задание функции графиком. График сам по себе может служить способом задания функции.

На рис. 7 изображена кардиограмма. Её можно считать графиком изменения некоторой величины U (потенциала) в момент времени t, прошедшего от начала измерения.

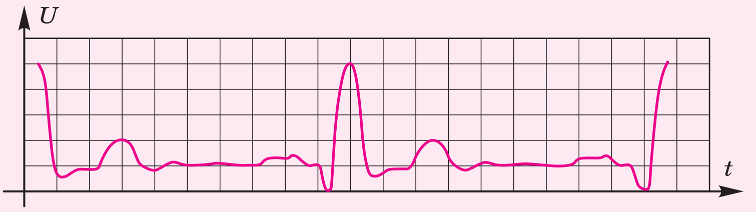


Рис. 7

Три способа задания функции — формулой, табличный и графический — тесно связаны между собой. Зная формулу, можно составить таблицу значений и далее по точкам построить примерный график функции. Переход от графика к формуле более сложен. Некоторые графики — прямые, параболы, гиперболы — нам знакомы, и мы сможем по точкам графика найти выражения, задающие соответствующие функции. В других случаях для задания функции подбирают приближённую формулу.

---

www

Интернет-ресурсы: http://school-collection.edu.ru, **каталог — для ученика — алгебра — 8 класс — Инновационные учебные материалы — «Алгебра в основной школе, 7–9 классы» — Цифровая коллекция — 8 класс**
— глава 8, пункт 1 «Переменные и зависимости между ними», 1–7,
— глава 8, пункт 2 «Функциональная зависимость», 1–8,
— глава 8, задачник, рабочая тетрадь.

Вокруг теории

1. Что называется функцией?
2. Какие функции вы знаете? Приведите примеры.
3. Что называется областью определения функции?
4. Как находится множество значений функции?
5. Что такое график функции?
6. Как узнать, лежит ли точка $P(a; b)$ на графике функции $y = f(x)$?
7. Какие способы задания функции вы знаете?
8. Что является областью определения функции, заданной с помощью таблицы?

Задания

Решаем вместе

Найти область определения функции $y = \sqrt{4 - x}$.

Решение. Извлечение квадратного корня (в области действительных чисел) имеет смысл для неотрицательных чисел и только для них.

Записываем условие $4 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 4$.

Ответ: $D = (-\infty; 4]$ или $\{x \leqslant 4\}$.

1. Найдите области определения следующих функций:

1) $y = -2x + 1$;
2) $y = x^2 - 1$;
3) $y = \frac{1}{x - 1}$;
4) $y = x + \frac{1}{x}$;
5) $y = \frac{x}{x^2 - x - 2}$;
6) $y = \frac{2}{x^2 - x} + \frac{3}{x^2 + x}$;
7) $y = \sqrt{x}$;
8) $y = \sqrt{x + 1}$.

Решаем вместе

Найти область значений функции $y = x^2 + 2x$.

Решение. Составляем равенство $x^2+2x = a \Leftrightarrow x^2+2x-a = 0$ и определяем, при каких значениях a полученное уравнение относительно x имеет корень. Ответ известен — дискриминант d квадратного трёхчлена $x^2 + 2x - a$ должен быть неотрицателен: $1 + a \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant -1$.

Ответ: $D = [-1; +\infty)$ или $\{y \geqslant -1\}$.

2. Определите множества значений функций:

1) $y = 1 - x$;
2) $y = 2x + 1,\ x \geqslant 0$;
3) $y = x^2 + 1$;
4) $y = x^2 + 1,\ x \leqslant 0$;
5) $y = \dfrac{1}{x-1}$;
6) $y = \dfrac{1}{x},\ x \geqslant 1$;
7) $y = \sqrt{x+1}$;
8) $y = \sqrt{x},\ x \geqslant 4$.

Решаем вместе

Даны две функции $y = 3x + \dfrac{7}{4}$ и $y = \sqrt{2x+1}$. Какая из них в точке $x = -\dfrac{4}{9}$ принимает большее значение?

Решение. Это задача на вычисление значения функции, заданной формулой. Подставляем $x = -\dfrac{4}{9}$ в каждую формулу: $y = 3\left(-\dfrac{4}{9}\right) + \dfrac{7}{4} = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{7}{4} = \dfrac{5}{12}$; $y = \sqrt{2\left(-\dfrac{4}{9}\right) + 1} = \sqrt{-\dfrac{8}{9} + 1} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$.

Теперь сравниваем значения: $\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{12} < \dfrac{5}{12}$.

Ответ: значение первой функции больше, чем значение второй.

3. Принадлежит ли число -2 множеству значений данной функции?

1) $y = 4 - 2x$;
2) $y = x - 1,\ x \geqslant 0$;
3) $y = x^2 - 1$;
4) $y = -2x^2$;
5) $y = \dfrac{1}{x} - 2$;
6) $y = \dfrac{1}{x} - 1,\ x > 0$;
7) $y = \sqrt{-x}$;
8) $y = \sqrt{x} - 3$.

Решаем вместе

Построить график функции $y=[x]$, где $[x]$ означает целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x: $0 \leqslant x-[x]<1$ и $[x] \in \boldsymbol{Z}$.

Решение. Замечаем, что при $x \in [m, m+1)$, где m — целое число, $[x]$ принимает постоянное значение, равное m. Для построения графика строим точки $[m; m]$ с целыми значениями m (они лежат на прямой $y=x$) и от каждой из них откладываем вправо горизонтальный отрезок длины 1. Чтобы подчеркнуть, что левый конец отрезка принадлежит графику, а правый нет, используем понятные графические приёмы (рис. 8) — ставим стрелки.

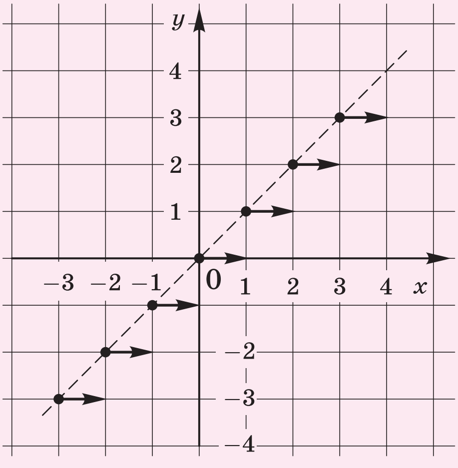


Рис. 8

4. Постройте графики функций, по-разному заданных на разных интервалах.

1) $y=\begin{cases}1 & \text{при } x<0; \\ x+1 & \text{при } x \geqslant 0;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}-1 & \text{при } x<0; \\ 0 & \text{при } x=0; \\ +1 & \text{при } x>0.\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}-x & \text{при } x<0; \\ x^2 & \text{при } x \geqslant 0.\end{cases}$

4) $y=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{при } x<0; \\ x & \text{при } x \geqslant 0.\end{cases}$

Функцию примера 2 называют «знаком числа» и обозначают $y=\operatorname{sgn} x$ (от слова signum — знак).

[. . .]