ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие читатели!

Данный учебник завершает курс математики для 5–9 классов. Содержание учебника направлено на расширение и углубление знаний об уже известных вам понятиях, на знакомство с новыми понятиями, на обогащение и систематизацию опыта, полученного в курсе алгебры для 7–8 классов. Так, например, предстоит перейти от линейных уравнений с одним неизвестным к линейным уравнениям с несколькими неизвестными и их системам; от квадратных уравнений с одним неизвестным к нелинейным уравнениям с несколькими неизвестными и некоторым системам уравнений, содержащих нелинейные уравнения; рассмотреть новый метод решения неравенств второй степени и так далее.

Большое внимание в учебнике уделяется применению изучаемых математических понятий и истории их развития, индуктивным и дедуктивным рассуждениям, методам решения разнообразных задач.

Центральным понятием курса алгебры для 9 класса является понятие функции. Знание этого понятия поможет научиться анализировать связи между величинами, участвующими в различных процессах. Вам будет предложено исследовать некоторые важные виды функций, изучить свойства функций, построить графики функций, рассмотреть различные приложения.

Мы надеемся, что при работе с учебными текстами вы проявите самостоятельность, инициативу. Именно поэтому предлагаем вам задания, которые создают условия для получения новых знаний, для использования этих знаний в разных ситуациях. Результаты этой работы вы всегда сможете проконтролировать и откорректировать, обращаясь к тексту учебника. Мы бы хотели, чтобы работа с данным учебником стала интересным для вас делом, помогла при продолжении обучения в старшей школе, способствовала вашей успешности.

Авторы

Условные обозначения

Основные понятия представлены в рубрике **Определение**, а иногда только выделены в тексте ***полужирным курсивом.***

Наиболее важные утверждения, правила или факты — на цветной плашке.

На навигационной полосе расположены следующие знаки, способствующие лучшему усвоению материала:

— запомни определение или важное утверждение;

— материал, необходимый для подготовки к Государственной итоговой аттестации;

— выполни исследовательское (проектное) задание;

— выполни лабораторную работу;

— пройди по ссылке на Интернет-ресурс;

— выполни задания из «Практикума».

ФУНКЦИИ

$f\colon X \to Y$

ГЛАВА I
ФУНКЦИЯ И СПОСОБЫ ЕЁ ЗАДАНИЯ

Начало есть более, чем половина всего.

Аристотель

§ 1
Первое знакомство с функцией

Часто приходится устанавливать связи между элементами различных множеств. Рассмотрите три ситуации и ответьте на вопросы.

Ситуация 1. В ходе медицинского осмотра школьников составлена таблица. Вот её начало:

Ученик	H **(см)**
Афонин С.	170
Букина А.	155
Валов П.	163
Веснина Т.	163
Грицко А.	160
...	...

Ситуация 2. Для нахождения площади S квадрата ученик использовал формулу $S = a^2$.

Если $a = 13{,}5$ см, то $S = 182{,}25$ см^2. Если $a = 9{,}1$ см, то $S = 82{,}81$ см^2.

Ситуация 3. Температура воздуха регистрировалась на метеостанции в течение суток с помощью самописца на бумажной ленте (рис. 1).

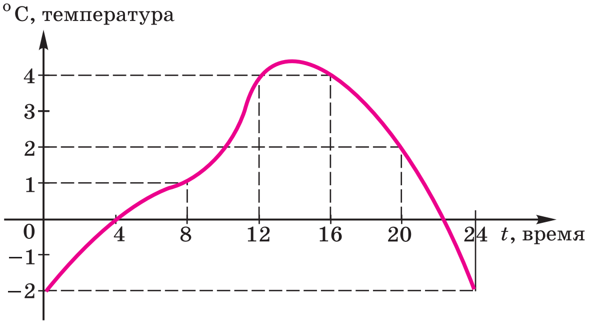

Рис. 1

Между какими объектами можно установить (установлено) соответствие в предложенных ситуациях? В каком виде можно представить (представлено) соответствие: а) формулой; б) таблицей; в) графиком; г) в виде словесного описания? Можно сказать, что в данных ситуациях имеют место соответствия:

1) фамилии ученика соответствует рост ученика в сантиметрах;
2) длине стороны квадрата соответствует площадь квадрата;
3) времени суток соответствует температура воздуха.

Эти же ситуации можно описать с помощью понятий «сопоставление», «зависимость». Например, каждому ученику сопоставляется его рост, температура воздуха зависит от времени суток.

Схематично первую ситуацию можно изобразить, как на рис. 2.

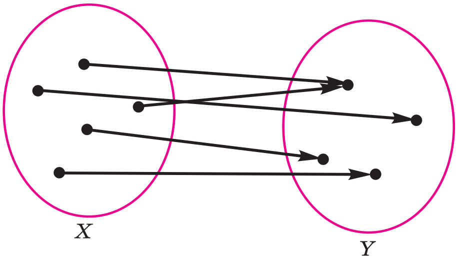

Рис. 2

Если под X понимать множество школьников класса, где каждый элемент множества X — это конкретный ученик, то каждый элемент множества Y — рост конкретного ученика.

Вы можете подписать каждый элемент множества X фамилией ученика, а элемент множества Y — числом, означающим рост в сантиметрах.

Обратимся к третьей ситуации. Выбрав несколько моментов времени в промежутке от 0 до 24 часов, можно поставить им в соответствие значения температуры (рис. 3).

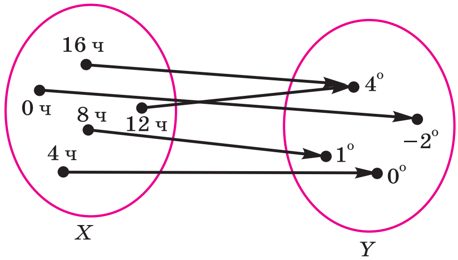

Рис. 3

Обратите внимание на то, что во всех трёх ситуациях каждому элементу x непустого множества X ставится в соответствие *единственный* элемент y множества Y. Однако встречаются и другие типы соответствий.

Для любого момента времени суток можно однозначно указать соответствующую температуру воздуха, например $8\text{ ч} \to 1°\text{C}$. Наоборот, по температуре воздуха не всегда можно однозначно определить соответствующее время суток. Например, судя по температурной кривой, температура $+4°$ наблюдалась и в 12 ч, и в 16 ч.

$$+4° \begin{array}{l} \nearrow\ 12\text{ ч} \\ \searrow\ 16\text{ ч} \end{array}$$

В дальнейшем нас будут интересовать соответствия только первого вида.

Определение 1. Пусть X и Y — непустые множества. Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие единственный элемент y множества Y, то говорят, что ***на множестве X задана функция со значениями в множестве Y*** (говорят также, что задано ***отображение из X в Y***).

Множество X называется ***областью определения функции.***

Функции часто обозначаются латинскими буквами, например f, g. Более подробная запись $f\colon X \to Y$ означает: «f есть функция, заданная на множестве X, со значениями во множестве Y».

Область определения функции f обозначается через $\mathrm{Dom}(f)$ или коротко — $D(f)$.

Элемент y множества Y, сопоставленный элементу x множества X, обозначается через $f(x)$; записывается: $y = f(x)$. Читается эта запись так: «игрек равно эф от икс».

Определение 2. Функция, определённая на некотором множестве чисел и принимающая только числовые значения, называется ***числовой функцией***.

В ситуациях 2 и 3 заданы числовые функции, а в ситуации 1 — нечисловая функция, так как не числу, а фамилии ученика ставится в соответствие число. Однако и в ситуации 1 легко получить числовую функцию, если фамилию ученика заменить его порядковым номером в списке класса.

Мы будем чаще всего рассматривать *числовые* функции.

Задание 1. На рис. 4 и 5 представлены динамика цен на нефть и динамика курса доллара за определённое время.

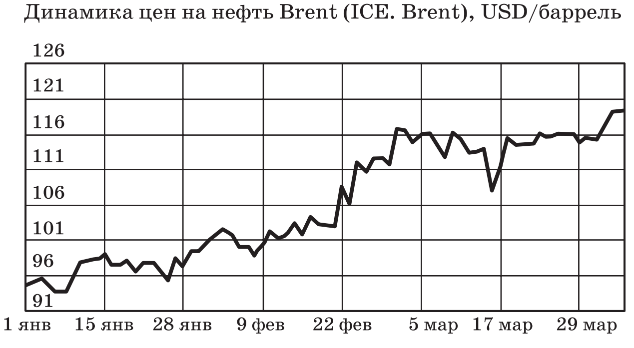

Рис. 4

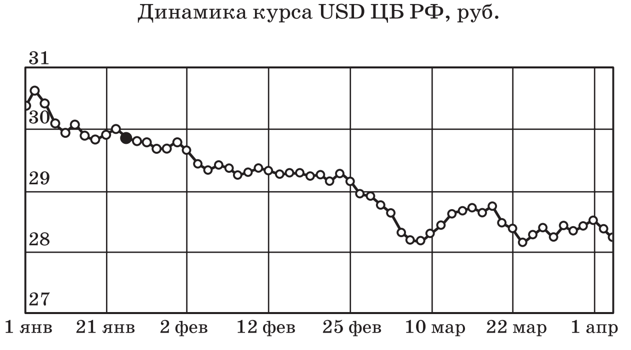

Рис. 5

Между элементами каких множеств можно установить соответствия? Являются ли они функциями? Если да, то укажите их области определения. Укажите, какие из этих функций являются числовыми.

Задание 2. Приведите примеры соответствий, которые являются: а) числовыми функциями; б) нечисловыми функциями. Приведите примеры соответствий, которые не являются функциями.

Задание 3. На множестве натуральных чисел, отличных от 1, следующим образом определена функция f. Если x есть натуральное число, то $y = f(x)$ есть наименьший натуральный делитель числа x, не равный 1. Например, число 10 делится нацело на 1, 2, 5, 10. Значит, $f(10) = 2$.

Найдите $f(75)$.

Область определения $D(f)$ рассматриваемой функции f есть множество всех натуральных чисел x, $x \neq 1$. Множество значений функции f есть множество всех простых натуральных чисел.

Согласно заданию функции, величина x может принимать любые значения из области определения, то есть может *менять* свои значения. Поэтому x называется ***переменной величиной***, или просто ***переменной***.

Если задано значение переменной x, то можно вычислить и значение величины $y = f(x)$. Например, если $x = 10$, то $y = f(10) = 2$; если $x = 75$, то $y = f(75) = 3$. Следовательно, величина y тоже может менять свои значения, поэтому её тоже называют переменной.

Так как значение переменной y зависит от выбора значения переменной x, то y называют ***зависимой переменной***, а x — ***независимой переменной*** или ***аргументом функции***.

Итак, мы рассмотрели несколько примеров функций. Функции были заданы различными способами. Рассмотрим подробнее эти способы.

§ 2
Способы задания функции

Табличный способ

В ситуации 1 из § 1 функция задана *таблично*.

Некоторым учащимся класса поставлен в соответствие их рост. Выбрав в строке фамилию ученика, данную в таблице, можно в этой же строке найти его рост. Областью определения этой функции является множество фамилий учеников, для которых указан рост.

Табличный способ задания функции используется в естественных науках и технике: учёные регистрируют результаты проделанных ими опытов с помощью таблиц.

Например, из опыта известно, что электрическое сопротивление R проводника (изготовленного из данного материала, данного сечения и данной длины) зависит от температуры T проводника: $R = f(T)$. Проводя измерения, можно найти значения сопротивления (R) при различных значениях температуры (T). Результатом опытов может являться, например, такая таблица:

T, °C	0	25	50	75	100
R, Ом	112,0	118,4	124	130,3	135,2

Из таблицы следует, что 0° соответствует сопротивление проводника 112,0 Ом, 25° соответствует сопротивление 118,4 Ом и так далее. Значения независимой переменной берутся через равные промежутки. Длина этих промежутков называется *шагом таблицы*. В данном примере шаг таблицы равен 25°.

Задание 1. Используя различные источники информации (журналы, газеты, Интернет), подберите пример зависимости между величинами, которая задана таблично.

Аналитический способ

Рассмотрим два примера числовых функций.

Площадь квадрата зависит от длины стороны. Чтобы вычислить площадь квадрата, нужно найти квадрат длины стороны. Эту функцию можно задать с помощью формулы $S = a^2$. Функция определена на множестве положительных действительных чисел.

В зависимости от значения радиуса круга меняется значение площади круга. Эта функция задаётся формулой $S = \pi r^2$. Для того чтобы найти площадь круга, нужно числовое значение радиуса возвести в квадрат и умножить на число π. Функция определена на множестве положительных действительных чисел.

В этих двух примерах функции заданы аналитически.

Говорят, что функция задана *аналитически*, если на всей области определения она задана с помощью некоторой формулы вида $y = f(x)$.

Например, функция задана аналитически формулой $y = x^2$. Это означает, что для того, чтобы найти значение функции, например при значении аргумента $x = 2$, нужно число 2 возвести в квадрат.

Записывают это так: $y(2) = 2^2 = 4$ или $f(2) = 2^2 = 4$. Читают следующим образом: «значение функции y при $x = 2$ равно 4».

Задание 2. Найдите значения функции $y=(x-3)^2$ при значении аргумента x, равном: а) 0; б) 2; в) 4.

Верно ли, что $y(0)>y(4)$; $y(2)=y(4)$? Прочтите данные записи.

Отметим, что функция может задаваться с помощью нескольких различных формул, заданных на различных частях области определения. Кратко такое задание записывают, например, так:

$$y=\begin{cases} 4 & \text{при } x<-2, \\ x^2 & \text{при } -2\leqslant x<0, \\ \sqrt{x} & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$$

Данная функция определена на всём множестве действительных чисел $(-\infty; +\infty)$, которое является объединением трёх промежутков: $(-\infty; -2)$, $[-2; 0)$, $[0; +\infty)$. На этих промежутках функция задана соответственно формулами: $y=4$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

Чтобы найти значение данной функции, например, при $x=-100$, устанавливаем сначала, что $-100\in(-\infty; -2)$ и, следовательно, значение функции задаётся формулой $y(-100)=4$.

Таким образом, $y=4$.

Графический способ

В третьей ситуации из § 1 графически показано, как изменяется температура воздуха в зависимости от времени суток. Можно сказать, что функция задана *графически*.

Областью определения этой функции является промежуток времени $[0; 24]$.

Определение. ***Графиком числовой функции*** f называется множество точек $(x; y)$ координатной плоскости xOy, где x принимает все возможные значения из области определения функции, а $y=f(x)$.

График позволяет находить значение функции в любой точке из области определения функции, то есть график полностью задаёт функцию.

На рисунке 6 изображён график функции $y=x^2$. Воспользуемся им для нахождения значений функции $f(2)$, $f(-3)$.

На оси Ox отметим точку $x=2$. Проведём через неё прямую, параллельную оси Oy. Эта прямая пересечёт график в некоторой точке M. Через точку M проведём прямую, параллельную оси Ox. Прямая пересекает ось Oy в точке $y=4$. Это означает, что $f(2)=4$. Точно так же находим значение $f(-3)=9$.

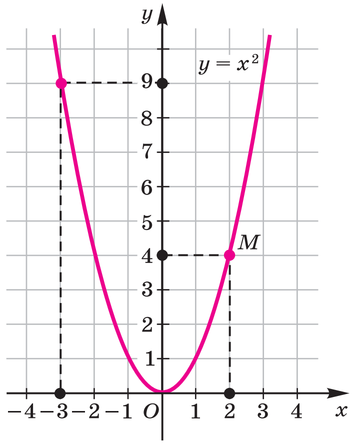

Рис. 6

Аналогично находятся значения любой другой числовой функции по её графику.

Графический способ задания функции удобен тем, что он даёт наглядное представление о функции. График функции можно назвать её портретом. Подобно правдивому портрету, график даёт верное представление о функции.

Недостатком графического задания функции является невысокая точность. Например, если мы захотим вычислить $f(2;\,2)$ по изображённому на рис. 6 графику функции $y=x^2$, то считать с рисунка значение функции $y=4{,}84$ будет трудно.

При изучении графика функции могут возникнуть, например, такие вопросы: принадлежит ли точка M с данными координатами графику функции $y=f(x)$? Проходит ли график функции через точку M с данными координатами? Какова абсцисса точки графика, если известна её ордината?

Приведём пример ответа на первый вопрос относительно графика функции $y=x^2$. Очевидно, что точка $M(-2{,}1;\,-4)$ не принадлежит графику функции $y=x^2$. Но принадлежит ли точка $C(-2{,}1;\,4{,}41)$ графику данной функции, глядя на рис. 6, сказать с уверенностью нельзя. Необходимо подставить значения $x=-2{,}1$ и $4{,}41$ в формулу $y=x^2$ и убедиться в выполнении равенства:

$$(-2{,}1)^2=4{,}41.$$

Равенство $4{,}41=4{,}41$ верно, значит, точка $C(-2{,}1;\,4{,}41)$ принадлежит графику функции $y=x^2$.

Задание 3. Через какие из данных точек $A(1;\,1)$, $B(0;\,1)$, $C(-100;\,0{,}01)$ проходит график функции $y=\dfrac{1}{x}$?

Итак, рассмотрены три основных способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

---

www

Интернет-ресурсы: http://fcior.edu.ru — **каталог ЭОР — основное общее образование — перечень учебных предметов общего образования — математика — название модуля:**

График функции.

Нахождение точек пересечения графиков.

[. . .]