

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие читатели!

В новом учебнике вам предстоит продолжить изучение алгебраических понятий. Вы познакомитесь с ещё одной алгебраической операцией, узнаете про существование новых чисел, рассмотрите различные виды квадратных уравнений и методы их решения, научитесь применять данные уравнения в различных задачах, выявлять свойства числовых неравенств и т. д.

В книге представлен исторический материал, беседы, которые познакомят вас с методами решения уравнений и неравенств повышенной сложности. Они могут быть полезны и при подготовке к всевозможным олимпиадам, и при дальнейшем изучении математики.

Задания учебника создают условия для того, чтобы вы приняли участие в поиске свойств алгебраических понятий и связей между ними, в получении формул, теорем и следствий из них, алгоритмов выполнения действий и их приложений к решению задач.

Текст учебника предоставляет вам возможность проявить своё творчество при составлении учебных текстов, текстовых задач и контрольных работ. Работая с учебником, вы сможете развить умение анализировать математическую информацию, представленную разными способами (словесно-символическим, образным, предметно-практическим), и переходить от одной формы представления информации к другой.

Результаты самостоятельной работы вы сможете проверить и откорректировать, обращаясь к тексту учебника.

Удачи вам!

Авторы

Условные обозначения

Основные понятия представлены в рубрике **Определение**, а иногда только выделены в тексте *полужирным курсивом*.

Наиболее важные утверждения, правила или факты — на цветной плашке.

Обратите внимание на символы навигационной полосы, имеющейся в учебниках. Вот что эти символы обозначают:



— материал, необходимый для подготовки к итоговой аттестации;



— запомни определение или важное утверждение;



— дополнительное разъяснение;



— пройди по ссылке на Интернет-ресурс;



— выполни проектное, исследовательское задание;



— выполни задания из «Практикума».

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ

$$\frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

ГЛАВА I

РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Старайся дать уму как можно больше пищи.

Л. Н. Толстой

В этой главе мы будем работать с алгебраическими дробями, то есть с выражениями вида $\frac{A}{B}$, где A и B — многочлены и $B \neq 0$.

§ 1

Выполняем все действия над алгебраическими дробями

Действия над алгебраическими дробями выполняются по тем же правилам, что и действия над обыкновенными дробями:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}, \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}, \quad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}.$$

Вспомним, как преобразовывать алгебраические выражения, в которых представлено несколько различных операций.

Какова **последовательность выполнения операций**?

Если выражение не содержит скобок, то порядок выполнения операций таков:

1. Возведение в степень.
2. Умножение и деление (в последовательности слева направо).
3. Сложение и вычитание (в последовательности слева направо).

Если в выражении есть скобки, то сначала выполняют действия в скобках в последовательности 1–3.

При необходимости скобки раскрывают, пользуясь сочетательным свойством сложения и умножения и распределительным свойством умножения относительно сложения.

В следующих заданиях выполните различные действия над алгебраическими дробями.

Задание 1. Объясните выполненные тождественные преобразования:

$$b^2 \cdot \frac{a-c}{a^2+ac+c^2} : \frac{a^2b-bc^2}{a^3-c^3} \cdot \frac{a+c}{ab-bc} = b^2 \cdot \frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2} \cdot \frac{a+c}{ab-bc} =$$

$$= \frac{b^2(a-c)(a^3-c^3)(a+c)}{(a^2+ac+c^2)b(a^2-c^2)b(a-c)} = 1.$$

Задание 2. Докажите, что

$$\left(\frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{6x-18}{x^3+27} \right) : \frac{x-3}{x^3+27} - x+3 = 0.$$

Отметим, что все равенства при преобразовании алгебраических дробей являются тождественными равенствами.

Это задание можно выполнить несколькими способами.

Способ 1. Установим порядок выполнения операций:

$$\left(\frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{6x-18}{x^3+27} \right) : \frac{x-3}{x^3+27} - x+3.$$

Выполним операции последовательно:

$$1. \frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{6x-18}{x^3+27} = \frac{(x-3)(x+3) - (6x-18)}{x^3+27} = \frac{x^2-9-6x+18}{x^3+27} =$$

$$= \frac{x^2-6x+9}{x^3+27} = \frac{(x-3)^2}{x^3+27}.$$

$$2. \frac{(x-3)^2}{x^3+27} : \frac{x-3}{x^3+27} = \dots$$

После выполнения второй операции получится выражение $\frac{x-3}{1}$, которое можно представить в виде многочлена:

$$\frac{x-3}{1} = x-3.$$

Операции **3** и **4** можно выполнять последовательно, приписывая к многочлену $x-3$ выражения $-x$ и $+3$ с их знаками. Но можно $-x+3$ рассматривать как один многочлен. И тогда вместо выполнения двух операций **3** и **4** можно обойтись одной — операцией сложения многочленов $x-3$ и $-x+3$:

$$(x-3) + (-x+3) = 0.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{6x-18}{x^3+27} \right) : \frac{x-3}{x^3+27} - x+3 = 0.$$



Способ 2. Установим порядок выполнения операций, но выписывать их отдельно не будем. Выполним преобразования, переходя от одного выражения к другому последовательно, записывая цепочку равенств:

$$\left(\frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{6x-18}{x^3+27} \right) : \frac{x-3}{x^3+27} - x+3 = \dots$$

В скобках нужно провести вычитание дробей с различными знаменателями. Прежде всего при первом переписывании подготовим дроби к выполнению *вычитания* — разложим знаменатели на множители и найдём дополнительные множители для дробей. *Деление* заменим умножением на дробь, обратную делителю. Оставшийся многочлен перепишем без изменений.

Заметим, что многочлен x^3+27 является общим знаменателем дробей, стоящих в скобках. Поэтому дополнительным множителем для первой дроби будет $x+3$:

$$\dots = \left(\frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{6x-18}{(x+3)(x^2-3x+9)} \right) \cdot \frac{x^3+27}{x-3} - x+3 = \dots$$

(выполним вычитание дробей в скобках, оставшиеся выражения перепишем без изменений)

$$\dots = \frac{x^2-9-6x+18}{x^3+27} \cdot \frac{x^3+27}{x-3} - x+3 = \dots$$

(упростим числитель первой дроби и одновременно запишем произведение двух дробей)

$$\dots = \frac{(x^2-6x+9)(x^3+27)}{(x^3+27)(x-3)} - x+3 = \frac{(x-3)^2(x^3+27)}{(x^3+27)(x-3)} - x+3 = \dots$$

(проведём сокращение дроби и выполним сложение многочленов)

$$\dots = x-3-x+3=0.$$

Запись преобразований без комментариев будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{6x-18}{x^3+27} \right) : \frac{x-3}{x^3+27} - x+3 = \\ & = \left(\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)} - \frac{6x-18}{(x+3)(x^2-3x+9)} \right) \cdot \frac{x^3+27}{x-3} - x+3 = \\ & = \frac{x^2-9-6x+18}{x^3+27} \cdot \frac{x^3+27}{x-3} - x+3 = x-3-x+3=0. \end{aligned}$$

[. . .]