

Большая перемена

Э.Н. Балаян

700
ЛУЧШИХ
ОЛИМПИАДНЫХ
И ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ
ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ

5–6 классы

Ростов-на-Дону

 **ФЕНИКС**
2017

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я721

КТК 444

Б20

Балаян Э.Н.

Б20 700 лучших олимпиадных и занимательных задач по математике: 5–6 классы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д: Феникс, 2017. — 217, [1] с. : ил. — (Большая перемена)

ISBN 978-5-222-29536-6

В предлагаемом пособии рассмотрены различные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня трудности для учащихся 5–6 классов.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким, уже ставшим классическими, темам, как делимость и остатки, признаки делимости, инварианты, решение уравнений в целых числах, принцип Дирихле, задачи на проценты, числовые ребусы и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения. Большинство задач авторские, отмечены значком (А).

В заключительной части книги приводятся занимательные задачи творческого характера, вызывающие повышенный интерес не только у школьников, но и у взрослых читателей.

Пособие адресовано ученикам 5–6 классов общеобразовательных школ, учителям математики для подготовки детей к олимпиадам различного уровня, студентам — будущим учителям математики, работникам центров дополнительного образования, а также всем любителям математики.

УДК 373.167.1:51

ISBN 978-5-222-29536-6

ББК 22.1я721

© Балаян Э.Н., 2017

© Оформление, ООО «Феникс», 2017

Посвящается моим любимым внукам — Артуру и Григорию.

Предисловие

Роль олимпиад с каждым годом становится все более значимой. И не случайно многие вузы стали проводить свои олимпиады для будущих абитуриентов, преследуя цель — привлечь школьников в данный вуз. Победителей, занявших призовые места, освобождали от сдачи экзаменов и зачисляли в вуз.

В связи с этим назрела необходимость в доступной форме ознакомить широкие массы школьников с характером и типом задач, предлагаемых на олимпиадах.

Обычно традиционные олимпиады проходят в пять туров: школьный, районный (городской), областной (республиканский, краевой), зональный (окружной) и всероссийский.

В книге представлены задачи разного уровня трудности, причем сделано это сознательно с тем, чтобы каждый участник мог что-то решить, ибо если задачи слишком трудны, то дети теряют интерес не только к олимпиаде, но и к изучению математики.

Как правило, олимпиадная задача — это задача повышенной трудности, нестандартная как

по формулировке, так и по методам решения. Среди предложенных задач встречаются как нетривиальные, для решения которых требуются необычные идеи и специальные методы, так и задачи более стандартные, которые могут быть решены оригинальным способом. К числу таких методов можно отнести: делимость и остатки, признаки делимости чисел, решение уравнений в целых числах, метод инвариантов, принцип Дирихле, задачи на проценты, логического характера и др.

Эти задачи способствуют резкой активизации мыслительной деятельности, умственной активности, дают возможность самостоятельно составлять подобные, а возможно, и более оригинальные задачи, что в итоге приводит со временем к творческим открытиям в различных областях математики.

Автор старался привести наиболее рациональные и изящные решения, доступные школьникам 5–6 классов. Разумеется, читатель может привести и другие, возможно, более изящные решения, за что автор будет весьма признателен.

Книга состоит из трех разделов. В первом разделе приводятся условия задач для 5–6 классов.

Задачи, отмеченные значком (А), — авторские, составлены на протяжении многих лет педагогической деятельности.

Во втором разделе книги приводятся ответы, краткие указания, а к наиболее трудным — решения. Автор настоятельно рекомендует обра-

щаться к решениям в случае, когда задача уже решена, или после неоднократных, но безуспешных попыток самостоятельно ее решить. Надо иметь в виду, что одна самостоятельно решенная задача принесет значительно больше пользы для развития ума, чем несколько других, прочитанных в книге. Только настойчивость, терпение и выдержка помогут вам преодолеть трудности, и вас непременно ожидает успех.

Третий раздел книги будет особенно интересен не только школьникам, но и взрослым читателям.

Он содержит занимательные задачи творческого характера, способствующие развитию мыслительных способностей учащихся, формирующие навыки самостоятельной работы и приемы умственной деятельности, такие как анализ, синтез, аналогия, обобщение, и, как следствие, повышающие их успеваемость.

Пособие предназначено прежде всего ученикам 5–6 классов для самостоятельной подготовки к участию в олимпиадах, учителям математики общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, студентам педвузов, а также всем любителям математики.

Раздел I

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

5 класс

1(А). Не производя указанных действий, установить, правильной или неправильной дробью является число $\frac{1915 \cdot 2017 - 102}{1915 + 2017 \cdot 1914}$.

2(А). Вычислить

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017}.$$

3(А). Существуют ли такие натуральные числа m и n , что $mn(m - n) = 2017$?

4(А). Вписать в квадрат цифры от 0 до 9 без повторений так, чтобы получились три верных примера на сложение. Найти все решения.

$$\square + \square = \square \quad \square$$

$$\square + \square = \square$$

$$\square + \square = \square$$

5(А). На сколько % увеличится объем прямоугольного параллелепипеда, если длину и ширину его увеличить на 10%, а высоту уменьшить на 10%?

6(А). Четыре утенка и пять гусят весят 4 кг 100 г, а пять утят и четыре гусенка весят 4 кг. Сколько весит 1 утенок?

7(А). В классе 17 пловцов, 6 борцов и 13 шахматистов. Известно, что каждый спортсмен занимается двумя видами спорта. Сколько в классе спортсменов?

8(А). Можно ли, имея лишь два сосуда емкостью 3 и 5 л, набрать из водопроводного крана 4 л воды?

9(А). У каждого марсианина по 3 руки. Могут ли 13 марсиан взяться за руки так, чтобы не оставалось свободных рук?

10(А). Гусеница ползет по стволу тополя. За первый час она поднялась на 10 см, за второй час опустилась на 4 см, за третий час вновь поднялась на 10 см, а за четвертый опустилась на 4 см. Так гусеница продолжала подниматься и опускаться в течение нескольких часов. На сколько гусеница поднимется за 11 часов?

11(А). Сергей идет от дома до школы 30 мин, а брат его Николай — 40 мин. Николай вышел из дома на 5 мин раньше Сергея. Через сколько минут Сергей догонит Николая?

12(А). x, y, k — три различные цифры. Если сложить все шесть трехзначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру в числе дважды, то получим 5328. Найти эти цифры.

13(А). Найти такие пары натуральных чисел, сумма которых больше их произведения.

14(А). Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r}
 \text{С И Н И Ц А} \\
 + \text{С И Н И Ц А} \\
 \hline
 \text{П Т И Ч К И}
 \end{array}$$

15(А). В числе 3 728 954 106 зачеркнуть три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке составили бы наименьшее семизначное число.

16(А). Заполнить пустые клетки так, чтобы сумма чисел в трех любых соседних клетках как по вертикали, так и по горизонтали равнялась 13.

	5				
					1
6					
			3		

17(А). Какой цифрой оканчивается сумма $94^6 + 76^6 + 51^6$?

18(А). Сколько в зоопарке зверей и сколько птиц, если у них вместе 6000 ног и 2500 голов?

19(А). На какое наибольшее число частей можно разрезать круглый торт пятью прямолинейными разрезами?

20(А). Сравнить дроби $\frac{1313}{9999}$ и $\frac{131313}{999999}$.

21(А). Найти все двузначные числа, которые уменьшаются в 13 раз при зачеркивании последней цифры.

22(А). Найти наименьшее натуральное число, которое кратно числам 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

23(А). Доказать, что если сумма четырех натуральных чисел — нечетное число, то их произведение — четное число.

24(А). Решить числовой ребус:

$$\begin{array}{r}
 \text{М У Х А} \\
 + \text{М У Х А} \\
 \hline
 \text{С Л О Н}
 \end{array}$$

Здесь все гласные буквы соответствуют цифрам одной четности, а согласные — другой.

25(А). Расставить в записи $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$ скобки так, чтобы получился наименьший возможный результат.

26(А). За книгу заплатили 160 руб. и еще $\frac{1}{3}$ ее стоимости. Сколько стоит книга?

27(А). Три яблока, четыре груши и один персик стоят 40 руб. Одно яблоко, четыре груши и персик стоят 32 руб. Сколько стоят одно яблоко, одна груша и персик, если персик стоит столько, сколько стоят два яблока?

28(А). В одном доме живут 23 ученика одной и той же школы. В этой школе 22 класса. Доказать, что хотя бы два ученика, живущих в этом доме, учатся в одном и том же классе.

29(А). Написать наименьшее трехзначное число, кратное 3, так, чтобы первая цифра его была 7 и все цифры были бы различны.

30(А). Какие две цифры нужно приписать к числу 2017 справа, чтобы получившееся шестизначное число делилось на 47?

31(А). Который сейчас час, если оставшаяся часть суток вдвое больше прошедшей?

32(А). Сравнить дроби $\frac{29}{37}$ и $\frac{145}{187}$.

33(А). Сыну 7 лет, а отцу 37. Через сколько лет отец будет вдвое старше сына?

34(А). 4 землекопа за 4 часа выкопали 4 ямы. Сколько ям выкопают 8 землекопов за 6 часов?

35(А). Яхта отправилась в плавание в понедельник в полдень. Плавание будет продолжаться 80 часов. Назвать день недели и час ее возвращения в порт.

36(А). Длину прямоугольника увеличили на 40%, а ширину уменьшили на 40%. На сколько процентов изменилась площадь прямоугольника?

37(А). В магазине имеются ящики с гвоздями массой в 12; 15; 16 и 18 кг. Может ли продавец отпустить 100 кг гвоздей, не распаковывая ящики?

38(А). Составить три арифметических примера на три разных действия, причем в эти примеры должны войти по одному разу все цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например: $7 + 1 = 8$; $9 - 6 = 3$; $4 \cdot 5 = 20$.

39(А). Найти сумму всех трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1; 2 и 3 так, чтобы в каждом числе все цифры были различны.

40(А). Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 2016. Найти уменьшаемое.

41(А). В классе 32 ученика. Из них 18 занимаются в секции легкой атлетики, 10 — в секции плавания и 5 — в обеих секциях. Сколько учащихся этого класса не занимаются ни в одной из этих секций?

42(А). Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} \text{Т Э Т А} \\ + \text{Б Э Т А} \\ \hline \text{С У М М А} \end{array}$$

43(А). Найти наименьшее число, которое записано только единицами и делится на 33.

44(А). У мальчика столько сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько братьев и сколько сестер в этой семье?

45(А). Сколько нулей содержится в произведении натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$?

46(А). Сколько раз цифра 7 встречается в записях всех чисел от 50 до 100?

47(А). Сколько существует способов составить отрезок длиной 1 м из отрезков длиной 3 и 11 см?

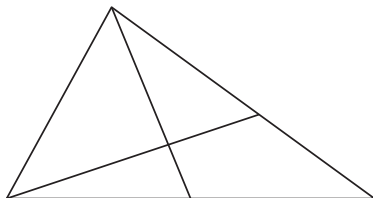
48(А). Известно, что одна из четырех монет — фальшивая, но неизвестно, легче она или тяжелее. За какое число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно это определить?

49(А). Одно число в 13 раз больше другого. Во сколько раз НОК этих чисел больше их НОД?

50(А). Николаю в 1998 г. исполнилось столько лет, какова сумма цифр года его рождения. В каком году он родился?

51(А). Из города A в город B ведут 3 дороги, а из города B в город B — 5 дорог. Сколько всего различных маршрутов поездки из города A в город B через город B ?

52(А). Сколько треугольников на рисунке?

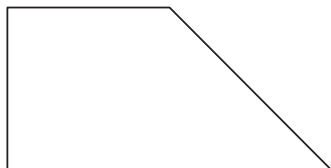


53(А). Какая цифра стоит в конце числа, выражающего произведение $7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 97 \cdot 99$?

54(А). Дана последовательность натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, 2013$. Разрешается зачеркивать любые два числа и записывать вместо них их разность. Доказать, что если в конце остался один нуль, то где-то была допущена ошибка.

55(А). Вычислить $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} +$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{13 \text{ раз}}$
 $+ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} - \frac{1}{100} - \frac{1}{100} - \dots - \frac{1}{100}.$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{7 \text{ раз}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{25 \text{ раз}}$

56(А). Разрезать фигуру на 4 равные части.



57(А). Доказать, что если в трехзначном числе сумма кратных цифр равна средней, то число делится на 11.

58(А). Восстановить цифру a в числе $\overline{7aa4}$, которое делится на 9.

59(А). Сколько нулей содержится в конце записи числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$?

60(А). Доказать, что отношение разности между двузначным числом и суммой его цифр к числу десятков равно 9.

61(А). Сколько слагаемых с числителем 1 пропущено в примере $\frac{4}{13} + \frac{3}{13} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{2}{13} = 3$?

62(А). Заменить звездочки цифрами так, чтобы число $13*26915*$ делилось на 72.

63(А). На столе стоят 35 тарелок: 20 — вверх дном, а 15 — вниз дном. За один ход разрешается взять любые две тарелки и перевернуть их. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы все тарелки лежали вверх дном?

64(А). В прямоугольнике размерами 50×12 дм большую сторону уменьшили на 50%, а меньшую увеличили на 150%. Как изменилась площадь прямоугольника?

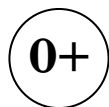
65(А). У ученика был 1 лист бумаги. Он разорвал его на 4 части, некоторые из частей еще разорвал на 4 части и т. д. При подсчете выясни-

Содержание

Предисловие	3
Раздел I. Условия задач	6
5 класс	6
<i>Признаки делимости чисел, задачи на проценты, доказательство, сравнение, разрезание, текстовые задачи, принцип Дирихле, числовые ребусы, логические задачи, начальные сведения по геометрии</i>	
6 класс	48
<i>Задачи по нахождению НОД и НОК, действия с дробями, решение уравнений с модулем, вычислительные задачи, задачи на проценты, переливание, разрезание и перекраивание фигур, инварианты, принцип Дирихле, логические задачи</i>	
Раздел II. Ответы. Указания. Решения	91
5 класс	91
6 класс	132
Раздел III. Удивительные равенства	176
Литература	216



Учебное издание



Балаян Эдуард Николаевич

**700
ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ
И ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

5–6 классы

Ответственный редактор *С. Осташов*

Технический редактор *Л. Багрянцева*

Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип № 2.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,92. Тираж 2500 экз.

Заказ №

ООО «Феникс»

344011, Россия, Ростовская обл.,

г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.

Сайт издательства: www.phoenixrostov.ru

Сайт интернет-магазина: www.phoenixbooks.ru

Изготовлено в России. Дата изготовления: 06.2017

Изготовитель: АО «Книга»

344019, Россия, Ростовская обл.,

г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57/1.