

Эрнесто Чезаро

**Элементарный учебник
алгебраического анализа и
исчисления бесконечно
малых**

Часть 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ч-35

- Чезаро Э.**
Ч-35 Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых: Часть 2 / Эрнесто Чезаро – М.: Книга по Требованию, 2013. – 488 с.

ISBN 978-5-458-26049-7

Перевод с немецкого с примечаниями и дополнениями профессора К.А. Поссе. Книга Э. Чезаро окажет драгоценные услуги учащимся. Принципы изложены в ней строго, приёмы вычисления тщательно разъяснены. Читатель может их усвоить на многочисленных примерах и упражнениях, помещённых в книгу. Эти упражнения, по способу их обработки, представляют собою образцы изящества, и не могут не возбудить у читателя научной любознательности и интереса к научным работам. От читателя книги Чезаро не требуется иных сведений, кроме обыкновенного курса Математики нашей средней школы и курса Аналитической Геометрии в том объеме, в каком она обыкновенно читается в наших Университетах.

ISBN 978-5-458-26049-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Отъ редактора русскаго перевода.

При обработкѣ второй части учебника Чезаро мы измѣнили систему, которой придерживались въ первой части, а именно вмѣсто того, чтобы выдѣлять наши примѣчанія и дополненія въ особые отдѣлы въ концѣ каждой книги, мы помѣщаемъ здѣсь эти примѣчанія и дополненія непосредственно за тѣми мѣстами текста, къ которымъ они относятся, отмѣчая ихъ прямыми скобками [].

Кромѣ того, нѣкоторые §§ оригинала, въ которыхъ слишкомъ сжатое изложеніе могло бы повести къ недоразумѣніямъ, изложены нами въ измѣненной и болѣе подробной редакціи. Наиболѣе существенному измѣненію въ этомъ отношеніи подвергся § 714, трактующій объ условіяхъ интегрируемости функций, а §§ 708^a и 736^a вставлены цѣликомъ для поясненія слѣдующихъ за ними статей.

Глава о дифференціальныхъ уравненіяхъ представляетъ собою не болѣе, какъ конспектъ, который можно разсматривать лишь какъ введеніе къ этому важному и обширному отдѣлу анализа; для подробнаго его изученія необходимо обратиться къ одному изъ указанныхъ самимъ авторомъ, въ предисловіи къ первой части его учебника, сочиненій.

Изъ авторскаго дополненія къ его учебнику (Anhang) мы исключили §§ 815 — 825, въ которыхъ сообщаются нѣкоторыя свѣдѣнія о варіаціонномъ исчисленіи, потому что краткое изложеніе началъ этого исчисленія, данное авторомъ, мы считаемъ малодоступнымъ, а развивать эти начала подробнѣе, что увеличивало бы размеры и безъ того очень большой книги, мы не считали необходимымъ, въ виду отдаленной связи этого отдѣла съ остальнымъ содержаніемъ книги.

Въ подстрочномъ примѣчаніи къ § 815, авторъ рекомендуетъ для подробнаго ознакомленія съ вариационнымъ исчисленіемъ III-й томъ „*Cours d'Analyse*“, С. Jordan'a и статью Hadamard'a въ „*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*“, 1901, стр. 5, содержащую въ себѣ критику началъ вариационнаго исчисленія. Современное изложеніе этого исчисленія читатель найдетъ въ книгѣ О. Bolza „*Vorlesungen über die Variationsrechnung*“, 1909.

К. Лоссе.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Отъ редактора	Стр. V—VI
-------------------------	--------------

Книга шестая: Дифференціальное исчисленіе.

1. Дифференцирование	3-- 51
Функции отъ одной независимой переменнѣнной	3— 21
Функции отъ нѣсколькихъ переменнѣнныхъ	21— 37
Неявные функции	37— 51
2. Приложенія къ плоскимъ кривымъ	52—138
Дифференціалъ дуги	52— 56
Касательная и нормаль	56— 71
Кривизна	71— 92
Асимптоты	92—103
Особенности плоскихъ кривыхъ	103—119
О касаніи плоскихъ кривыхъ	119—125
Огибающія кривыя	125—138
3. Приложеніе къ кривымъ двоякой кривизны	138—177
Основные формулы	138—148
О первой и второй кривизнѣ	148—151
Изслѣдованіе кривыхъ двоякой кривизны	151—160
Касаніе кривыхъ съ поверхностями	160—177
4. Приложенія къ теоріи поверхностей	178—233
Основные понятія	178—185
Линейчатая поверхность	185—192
Огибающія поверхности	192—202
Кривизна	202—216
Опредѣленія и свойства замѣчательныхъ кривыхъ на поверхности	217—233

Книга седьмая: Интегральное исчисленіе.

1. Интегрирование	237—323
Основные понятія	237—258
Правила интегрированія	258—292
Кратные интегралы	292—323

2. Приложение изложенныхъ приемовъ къ нахожденію нѣкоторыхъ замѣчательныхъ классовъ интеграловъ	323—368
Интегрированіе рациональныхъ дифференціаловъ	323—329
Интегрированіе иррациональныхъ дифференціаловъ	330—342
Интегрированіе трансцендентныхъ дифференціаловъ	343—346
Замѣчательные опредѣленные интегралы	346—368
3. Приложенія къ геометрическимъ измѣреніямъ	368—410
Длины дугъ	368—373
Площади плоскихъ кривыхъ	374—386
Поверхности и объемы тѣлъ вращенія	386—392
Центры тяжести	392—396
Поверхности и объемы какихъ угодно тѣлъ	397—410
4. Дифференціальныя уравненія	410—455
Уравненія съ двумя перемѣнными	410—424
Геометрическія приложенія	424—435
Линейныя дифференціальныя уравненія	435—446
Уравненія со многими перемѣнными	447—455
Прибавленіе	459—480
Функція Вейерштрасса	459—462
Нѣкоторыя свѣдѣнія объ исчисленіи конечныхъ раз- ностей	462—469
Свойства Бернуллиевыхъ чиселъ	469—472
Послѣдовательныя производныя функціи отъ функціи	473—475
Предметный указатель	477—480

КНИГА ШЕСТАЯ

КНИГА ШЕСТАЯ.

Дифференціальное исчисленіе.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.

Функціи отъ одной независимой перемѣнной.

546. Безконечно малыя и безконечно большія. Безконечно большимъ или просто безконечнымъ, какъ мы уже знаемъ, называютъ перемѣнное число, стремящееся превзойти по абсолютной величинѣ всякую границу, какъ бы велика она ни была, а безконечно малымъ называютъ всякое перемѣнное число, имѣющее предѣломъ нуль ¹⁾. Итакъ, понятіе о безконечно маломъ, равно какъ и понятіе о безконечномъ (см. § 254, b), заключаетъ само въ себѣ понятіе объ **измѣняемости**. Такъ, напримѣръ, объемъ твердаго тѣла, подвергающагося таянью, можно назвать безконечно малымъ, а объемъ неизмѣннаго атома во вселенной таковымъ назвать нельзя. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы попытались сравнивать объемъ атома съ объемомъ вселенной, предполагая послѣдній безконечнымъ, то принуждены были бы принять, что единица мѣры безпредѣльно возрастаетъ, и каждому значенію этой единицы соответствовало бы нѣкоторое число, служащее мѣрою объема атома и убывающее безпредѣльно. Слѣдовательно, не самый объемъ атома, а число, служащее для его измѣренія, было бы перемѣннымъ и безконечно малымъ. Однако, стать на такую точку зрѣнія мы не

¹⁾ А. Коши (Cauchy), „Алгебраическій анализъ“ (1821). Въ „Bulletin de la classe des Sciences de l'Académie de Belgique“ (1901, p. 549) цѣлыхъ 40 страницъ посвящены опроверженію этого, будто бы „совсѣмъ плохого опредѣленія“. На самомъ же дѣлѣ аргументы автора этой статьи могутъ служить, и то только отчасти, указаніемъ на недостаточность нѣкоторыхъ общепринятыхъ опредѣленій (вѣроятностей и т. д.), восполненіе которыхъ именно и требуетъ устраненія всякаго иного толкованія термина „безконечно малое“.

можемъ, потому что во всякомъ вычисленіи всѣ входящія въ него числа должны быть отнесены къ одной и той же единицѣ мѣры. Какъ бы велика ни была эта единица, объемъ атома всегда выразится опредѣленнымъ числомъ, можетъ быть, весьма малымъ, но постояннымъ. Для яснаго пониманія исчисленія бесконечно малыхъ никогда не слѣдуетъ упускать изъ вида, что бесконечно малые и бесконечно большіе числа—величины по самому существу своему переменныя, и что ихъ надо, говоря словами Ньютона, разсматривать, какъ „*quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite*“, т. е. какъ безпредѣльно убывающія, разубываетъ по абсолютной величинѣ.

547. Двѣ бесконечно малые величины называются величинами одного и того же порядка, если отношеніе ихъ стремится къ конечному предѣлу, отличному отъ нуля. Если же отношеніе одной бесконечно малой β къ другой α стремится къ нулю (такъ что β есть произведеніе α на величину также бесконечно малую), то говорятъ, что β бесконечно малая порядка высшаго, чѣмъ α . Въ противоположномъ случаѣ, когда отношеніе β къ α безпредѣльно возрастаетъ по абсолютной величинѣ, β будетъ порядка низшаго, чѣмъ α . Не всегда, однако, возможно, на основаніи этихъ опредѣленій, рѣшить, будутъ ли данныя двѣ бесконечно малые одного и того же порядка, или нѣтъ, потому что отношеніе ихъ не всегда стремится къ опредѣленному предѣлу. Такъ, напримѣръ, число $\beta = \alpha \sin \frac{1}{\alpha}$, очевидно, бесконечно мало одновременно съ α , но нельзя сказать, стремится ли β къ нулю столь же быстро, какъ α , или быстрѣе *). Тѣмъ не менѣе, если отношеніе β къ α постоянно колеблется, по абсолютной величинѣ, между двумя положительными границами, то принято считать β и α бесконечно малыми одного и того же порядка. Когда разсматриваютъ одновременно нѣсколько бесконечно малыхъ, то обыкновенно одну изъ нихъ, скажемъ α , выбранную по произволу, называютъ главною бесконечно малою, и разсматриваютъ отношенія другихъ къ α и различнымъ ея степенямъ. При этомъ называютъ бесконечно малыми порядка n ($n > 0$) тѣ изъ нихъ, порядокъ которыхъ равенъ порядку α^n **). Такъ, напримѣръ, $\log(1 + \alpha)$, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ — бесконечно малые перваго порядка, если α главная бесконечно малая. Далѣе, $1 - \cos \alpha$ — втораго, $\alpha - \sin \alpha$ — третьаго, $\alpha \sin(\sin \alpha) - \sin^2 \alpha$ — шестого, $\operatorname{tg}(\sin \alpha) - \sin(\operatorname{tg} \alpha)$ — седьмого порядка и т. д. ¹⁾. Впрочемъ, надо замѣтить, что не всегда воз-

*) Иными словами, будетъ ли β одного порядка съ α , или высшаго, такъ какъ отношеніе β/α ни къ какому предѣлу не стремится.

**) Иными словами, β будетъ порядка n , если $\lim \frac{\beta}{\alpha_n}$ существуетъ и не равенъ 0.

¹⁾ См. упражненія въ „*Mathesis*“ 1898, стр. 31 и 1902, стр. 145.

можно опредѣлить порядокъ данной безконечно малой. Такъ, напримеръ, при a безконечно маломъ, $e^{-\frac{1}{a^2}}$ и $\frac{1}{\log a}$ также безконечно малы, но въ то время, какъ отношеніе первой къ a^n (§ 312, а) стремится къ нулю, каково бы ни было число n , отношеніе второй къ a^n возрастаетъ безпредѣльно по абсолютной величинѣ, и нельзя сказать, какъ великъ порядокъ первой и какъ малъ порядокъ второй. Безконечно малыя величины

$$\dots \frac{1}{\log \log \frac{1}{a^2}}, \frac{1}{\log \frac{1}{a^2}}, \dots, \sqrt[n]{a}, \sin a, \\ 1 - \cos a, a - \sin a, \dots, e^{-\frac{1}{a^2}}, e^{-\frac{1}{e a^2}}, \dots$$

расположены въ такомъ порядкѣ, что каждая изъ нихъ безконечно мала относительно всѣхъ предыдущихъ. Поэтому, считая справа налѣво, находимъ, что порядокъ безконечно малыхъ, начиная съ произвольно большаго значенія, убываетъ и стремится къ нулю. Аналогично этому можно классифицировать безконечно большія величины *).

548. Замѣтимъ здѣсь же, что несправедливо было бы считать, что всякая безконечно малая или безконечно большая величина получаетъ опредѣленное мѣсто въ подобной скалѣ сравненія. Такъ, напримеръ, нельзя сказать, чему равно число n , опредѣляющее порядокъ величины $\beta = \frac{a}{\log a}$. Въ самомъ дѣлѣ, съ одной стороны, ясно, что n должно было бы быть больше 1 (потому что $\frac{\beta}{a} = \frac{1}{\log a}$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ a), а съ другой стороны, невозможно, чтобы n было больше 1, такъ какъ при любомъ $n > 1$ отношеніе $\frac{\beta}{a^n} = \frac{1}{a^{n-1} \log a}$ возрастаетъ безпредѣльно съ приближеніемъ a къ 0 **). Въ извѣстномъ смыслѣ (§ 169) можно, пожалуй, сказать, что въ скалѣ сравненія, состоящей изъ послѣдовательныхъ степеней a , число $\frac{a}{\log a}$ лежитъ справа отъ a , и что порядокъ его равенъ $1 + 0$. Точно такъ же тщетно было бы искать мѣсто, которое занимаетъ безконечно малая β , связанная съ a , соотношеніемъ $\beta = a^2 \log \frac{a}{\beta}$. Дѣйствительно, положивъ $a = \beta t$, найдемъ $\beta = \frac{1}{t^2 \log t}$, $a = \frac{1}{t \log t}$, откуда видно, что t должно возрастать безпредѣльно, чтобы a и β

*) Разсмотрѣніе ихъ, однако, всегда можно замѣнить разсмотрѣніемъ безконечно малыхъ, замѣтивъ, что при a безконечно большомъ, $\frac{1}{a}$ безконечно мало.

**) Потому что при $\mu > 0 \lim_{a=0} a^\mu \log a = 0$.

стремились къ нулю. Замѣчая теперь, что $\frac{\beta}{a^n} = t^{n-2} (\log t)^{n-1}$, видимъ, что при $n \geq 2$ это отношеніе безпредѣльно возрастаетъ, а при $n < 2$ стремится къ нулю. Поэтому β лежитъ, такъ сказать, слѣва отъ a^2 , т. е. стремится къ нулю не столь быстро, какъ a^2 , но быстрѣе, чѣмъ всякое a^n при $n < 2$; если угодно, можно сказать, что порядокъ β равенъ $2-0$. Обобщая эти замѣчанія, положимъ, что существуютъ вообще два числа n' и n'' , для которыхъ

$$\lim_{a^{n'}} \frac{\beta}{a^{n'}} = 0, \quad \lim_{a^{n''}} \frac{\beta}{a^{n''}} = \pm \infty.$$

Въ такомъ случаѣ, очевидно, можно замѣнить въ этихъ равенствахъ всякое число n' меньшимъ, а всякое n'' — большимъ числомъ. Ясно поэтому, что числа n' образуютъ ансамбль, имѣющій верхнюю границу μ (§ 172), а числа n'' — ансамбль, имѣющій нижнюю границу λ , при чемъ, очевидно, $\lambda \geq \mu$. Если случится, что значенія λ и μ совпадаютъ, и общая ихъ величина равна n , то можно сказать, что порядокъ β равенъ n , когда n не принадлежитъ ни тому, ни другому ансамблю, хотя и не существуетъ предѣла для $\frac{\beta}{a^n}$. Но можетъ случиться, что n наибольшее изъ чиселъ n' (т. е. принадлежитъ къ первому ансамблю) или наименьшее изъ чиселъ n'' (т. е. принадлежитъ ко второму ансамблю); тогда навѣрно порядокъ числа β не равенъ n . Его можно было бы изобразить въ первомъ случаѣ черезъ $n+0$, во второмъ черезъ $n-0$. Наконецъ, можетъ случиться, что $\lambda \neq \mu$, и тогда исчезаетъ всякое средство измѣрить порядокъ числа β какимъ нибудь числомъ. Достаточно привести примѣръ безконечно малой

$$\beta = a^{1 + \frac{1}{a} - \left[\frac{1}{a} \right]},$$

для которой

$$\lim_{a^n} \frac{\beta}{a^n} = \begin{cases} 0 & \text{въ случаѣ } n < 1, \\ \pm \infty & \text{въ случаѣ } n > 2. \end{cases}$$

Замѣчаемъ, что $\frac{\beta}{a}$ не стремится къ нулю, потому что принимаетъ безчисленное множество разъ значеніе 1, когда a проходитъ рядъ значеній $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Отсюда слѣдуетъ, что $\mu = 1$. Точно также $\frac{\beta}{a^2}$ не стремится къ $\pm \infty$, потому что это отношеніе остается $< e$, когда a проходитъ рядъ значеній

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{\log 2}}, \quad \frac{1}{3 - \frac{1}{\log 3}}, \quad \frac{1}{4 - \frac{1}{\log 4}}, \quad \frac{1}{5 - \frac{1}{\log 5}}, \quad \dots$$

Слѣдовательно, $\lambda = 2$. Для всякаго значенія n между 1 и 2, отно-