Лебег Анри Леон

Об измерении величин

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Л33

Лебег Анри Леон
Л33 Об измерении величин / Лебег Анри Леон – М.: Книга по Требованию, 2018. – 210 с.

ISBN 978-5-458-25377-2

Книга посвящена основным вопросам преподавания элементарной математики: понятиям длины, площади, объема; рассматриваются также более общие вопросы об измеримых величинах, о производной и интеграле, причем рассуждения ведутся для пространства и измерений. Педагогические соображения автора обладают свежестью и глубиной и способны оказывать значительное воспитывающее действие на педагога, которому они адресованы. Книга местами довольно трудна, что объясняется не столько сложностью материала, сколько манерой изложения автора.

ISBN 978-5-458-25377-2

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

осмысленна лишь в том случае, если все четыре яблока одинаковой величины. „Одно яблоко" выступает здесь неизбежно как единица меры объема или веса. Считать можно самые разнородные предметы: два чемодана и арбуз могут составлять *три предмета*, взятые с собой в дорогу; но два чемодана и поларбуза не составляют $2^1/_2$ предмета,— употребление дробных чисел предполагает однородность как самих предметов так и их частей, т. е. по существу всегда связано с измерением величин.

В полном соответствии со сказанным выше находится то обстоятельство, что натуральные числа и после создания более широкой концепции действительного числа сохраняют всю свою самостоятельность. Им посвящена обширная наука — теория чисел — со своими своеобразными проблемами. Рациональные же числа, оставаясь важным частным случаем действительных чисел, не дали повода к образованию отдельной ветви математики, которая изучала бы их самих по себе [1]). Лишь вопросы приближения иррациональных чисел при помощи рациональных до настоящего времени представляют собой живую область математических исследований.

Между тем очень распространено мнение, что наиболее „научным" подходом к введению рациональных чисел является подход со стороны произвольного расширения области целых чисел для достижения неограниченной осуществимости действия деления. Многие считают при этом, что полная строгость возможна только, если вновь вводимые „пары чисел" пишутся в необычной форме (a, b), а не в виде обыкновенных вульгарных дробей $\frac{a}{b}$. Что касается последнего обстоятельства, мнимой необходимости особого обозначения „пар" в виде (a, b), то это просто результат недомыслия. Сама же концепция расширения области чисел с точки зрения неограниченной осуществимости действий очень почтенна и является лишь частным случаем одного из основных способов образования новых понятий в современной алгебре. Однако она становится вполне убедительной только после доказательства *единственности* предлагаемого метода расширения. Действительно, можно доказать [2]), что минимальное алгебраическое тело, содержащее целые числа, изоморфно телу рациональных чисел. Вся эта концепция слишком абстрактна не только для того, чтобы в явном виде преподаваться в средней школе, но и для того, чтобы служить опорой для учителя в этом преподавании Кроме того, надо ясно понимать, что с этой, чисто алгебраической, точки зрения следующим этапом за введением рациональных чисел является отнюдь не введение действительных чисел,

---

[1]) В другом, чисто алгебраическом ряду развития, о котором будет сказано далее, система рациональных чисел является лишь частным случаем общего понятия *алгебраического тела* и включается в более обширное тело алгебраических чисел.

[2]) Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. I, § 12.

а создание над рациональными числами алгебраически замкнутого тела, т. е. введение алгебраических чисел. С точки зрения чистой алгебры нет никаких оснований считать число $\sqrt{+2}$ более простым, чем число $\sqrt{-2}$, а число π вообще излишне.

В действительности, конечно, никто и не пытается излагать в школе идеи современной абстрактной алгебры. Но часто учащимся сообщают ошибочное утверждение, что подлинно научное построение рациональных чисел *не должно* иметь ничего общего с измерением величин. Часто говорят, что правила действий над дробями есть лишь „удобные соглашения", сохраняющие неизменными законы действий.

Одной из основных задач книги Лебега является показать, что подход к построению рациональных и действительных чисел с точки зрения измерения величин нисколько не менее научен, чем, например, введение рациональных чисел в виде „пар". Для школы же он имеет несомненные преимущества. Первым преимуществом является соответствие этого подхода историческому развитию математики и имеющемуся у учащихся повседневному опыту. Вторым же — то обстоятельство, что он приводит с необходимостью к введению действительных чисел. Действительные числа появляются при этом в гораздо более осязаемой форме десятичных дробей, чем „дедекиндовские сечения" [1]) в системе рациональных чисел (которые сами суть не что иное, как „пары" целых чисел).

Поэтому вполне прав Лебег, когда он, в предлагаемых теперь русскому читателю очерках, после натуральных чисел переходит сразу к происхождению и логической природе действительных чисел. Прав он и тогда, когда утверждает, что с педагогической стороны, для школы, существует одна нераздельная задача — привести к возможно более ясному пониманию концепции действительного числа [2]). Мне хочется особенно подчеркнуть здесь важность этой общей установки, так как в изложении самого Лебега она связана с по меньшей мере спорным, а вернее просто неприемлемым, предложением совсем изгнать из школы изучение простых дробей.

2. В чем же основной интерес книги Лебега? Мне кажется в следующем: у математиков существует склонность, уже владея закончен-

[1]) С общей точки зрения введения непрерывности в любых порядковых типах дедекиндовские сечения имеют неоспоримое преимущество. Но даже в курсе анализа в университетах обращение к определению действительного числа бесконечной десятичной дробью кажется наиболее целесообразным. Оно позволяет с очень небольшой затратой труда внести в изложение анализа полную ясность, не откладывая „строгое обоснование теории действительных чисел" до каких-то дополнительных курсов, как это у нас часто делают.

[2]) Введение комплексных чисел в последнем классе средней школы осуществляется уже без большого труда, если с действительными числами достигнута достаточная ясность.

ной математической теорией, стыдиться ее происхождения. По сравнению с кристаллической ясностью развития теории, начиная с уже готовых ее основных понятий и допущений, кажется грязным и неприятным занятием копаться в происхождении этих основных понятий и допущений. Все здание школьной алгебры и весь математический анализ[1]) могут быть воздвигнуты на понятии действительного числа без всякого упоминания об измерении конкретных величин (длин, площадей, промежутков времени и т. д.). Поэтому, на разных ступенях обучения с разной степенью смелости, неизменно проявляется одна и таже тенденция: возможно скорее разделаться с *введением* чисел, и дальше уже говорить только о числах и соотношениях между ними. Против этой тенденции и протестует Лебег.

Что общепринятая система с педагогической стороны дефектна— видно хотя бы из тех трудностей, которые затем возникают при усвоении учащимися независимости смысла геометрических и физических формул от выбора единиц измерения и понятия „размерности" геометрических и физических формул.

Дело, однако, не в отдельных дефектах, а в том, что отрыв в школьном преподавании математических понятий от их происхождения приводит к полной беспринципности и логической дефектности курса. Лебег вполне прав, когда утверждает, что, например, старые учебники, считавшие понятие площади чем-то ясным и само собой разумеющимся, стояли выше, чем некоторые современные, которые предлагают „условиться" называть площадью круга такой-то предел. Создание на почве выкристаллизовавшихся из практики понятий формальных определений на своем месте имеет смысл, но только тогда, когда это будут общие определения общих понятий. Имеет смысл дать формальное определение площади вообще, вывести из этого определения общие свойства площадей и доказать, что в применении к кругу общее определение дает определенный результат. Но совершенно бессмысленно „уславливаться," что понимать под площадью отдельных фигур, так как из таких „соглашений", естественно, ничего нельзя вывести.

Поднимаясь к современным исследованиям о понятии длины кривой, площади поверхности и интеграла, Лебег показывает, как уже в чисто научной области забвение реального происхождения понятий может сбить с пути исследователя. На примере своих собственных

[1]) „Алгебра", преподающаяся в средней школе, с ее приближенным извлечением корней, логарифмами и т. д., едва ли не в большей степени является первой главой анализа (или введения в анализ), чем, собственно, чистой алгебры. Если современным алгебраистам удается убедить всех в необходимости понимать слово „алгебра" в угодном им и логически вполне обоснованном, но совершенно не соответствующем школьной традиции, смысле, то придется поднять вопрос о переименовании того предмета, который сейчас преподается в средней школе под названием алгебры.

открытий Лебег старается показать, как тесно они связаны с анализом реальных процессов измерения. Таким образом, в центре внимания на протяжении всей книги Лебега стоит борьба за возвращение математическим понятиям их первоначального материального содержания. В этой борьбе я и вижу основной интерес книги Лебега.

Отмечу здесь же[1]), что, на мой взгляд, позиция Лебега страдает двумя дефектами. Лебег, мне кажется, недооценивает самостоятельности математики, того, что математика изучает материальный мир с особой точки зрения, что ее непосредственным объектом являются пространственные формы и количественные отношения реального мира[2]). Сами эти формы и отношения являются той реальностью, которая изучается математикой. Отказывая в реальности числам, этим формам и отношениям, Лебег, казалось бы, ведет борьбу с платонизмом и его особым миром „идей". В действительности это недиалектическое упрощение основного, совершенно правильного тезиса о том, что математика изучает тот же самый материальный мир, естественно приводит Лебега ко второй ошибке, прямо противоположного свойства, и, вопреки его собственным исходным тенденциям, в конечном счете — к объявлению предметом изучения математики лишь „метафизически" осуществимых бесконечных последовательностей символов (§ 55). Результат поистине неожиданный!

Точка зрения Лебега на измерение величин, на целые и действительные числа и его трактовка упомянутого выше вопроса о размерности величин станут достаточно ясными читателю, прочитавшему главы I, II, III, IV и VI. Менее подготовленному читателю можно посоветовать прочесть именно эти главы (пропустив V) и затем (пропустив VII) сразу заключение (VIII).

С другой стороны, можно представить себе читателя (более подготовленного), которого заинтересуют по преимуществу главы V, VI и VII (глава VI входит, таким образом, в обе группы). Здесь та же основная тенденция,—выяснение реального происхождения математических понятий,—проведена на материале понятий длины кривой, площади поверхности и интеграла, принадлежащих в своем полном объеме диференциальной геометрии и анализу.

Особенно остро стоит вопрос о понятии площади поверхности. В элементарной геометрии, кроме площадей цилиндра и конуса, для которых общая проблема может быть обойдена развертыванием на плоскость, „вычисляется" площадь поверхности шара. Вычисление это однако, не имеет определенного логического смысла, пока само понятие площади поверхности не определено. Далеко не всем известно, что дело вовсе не в затруднительности привести такое определение

---

1) См. подробнее § 3 и 4 моего предисловия.

2). Ф. Энгельс, Анти-Дюринг.

в школьном учебнике, а в том, что корректное элементарно-геометрическое определение площади поверхности, пригодное хотя бы в простейших случаях, вообще было найдено лишь к концу XIX века и излагается лишь в специальных мемуарах. В учебниках анализа и диференциальной геометрии площадь поверхности *определяется* интегралом

$$J=\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx\cdot dy.$$

Обычные „доказательства" того, что этот интеграл действительно выражает площадь поверхности, не выдерживают критики по той простой причине, что нельзя *доказать* равенство интеграла площади поверхности, не определив сначала, что такое площадь. Это обстоятельство является уже подлинным скандалом для общепринятого изложения диференциальной геометрии. Надо надеяться, что книга Лебега окажет влияние на содержание соответствующих глав университетских учебников.

Было бы ошибкой думать, что читатель получит из изложения Лебега окончательные, правильдые ответы на все философские и педагогические вопросы, возникающие в связи с измерением величин, теорией действительных чисел, определением длины кривой, площади поверхности и интеграла. Критике философских и педагогических установок Лебега посвящены два следующих параграфа моего предисловия. Но, во всяком случае, Лебег доставляет читателю богатый материал для того, чтобы самому разобраться во всех этих вопросах.

Кончая обзор конкретного содержания книги Лебега, укажу еще что в ней рассыпано не мало отдельных остроумных замечаний и оригинальных способов доказательств (например доказательство независимости определения площади от выбора системы координат в § 29). Поэтому можно думать, что удовольствие от непосредственного общения с таким первоклассным математическим умом, каким является Лебег, с лихвой искупит для достаточно подготовленного читателя некоторую растрепанность изложения, переходящего прихотливым и внезапным образом от непринужденной, пространной болтовни к необычайной краткости формулировок. В частности, все формулировки с бесконечно-малыми и пределами, будучи по существу точными, рассчитаны на читателя, который самостоятельно умеет переводить их на язык ε и δ.

Все сказанное делает понятным, что книга Лебега не должна рассматриваться как учебное пособие при прохождении какого-либо определенного курса, а является лишь интересным материалом для знакомства с идеями одного из замечательных математиков современности и для дальнейших самостоятельных размышлений читателя.

3. Лебег всячески старается отгородиться от философии вообще, а в особенности от „метафизики". Беру слово „метафизика" в кавычках, так как Лебег употребляет его без большого разбора. Как это обычно бывает, такое отгораживание является лишь своеобразным способом настойчивого проведения и отстаивания вполне определенной философской позиции.

Положительной стороной этой позиции является признание Лебегом материалистического положения о неразрывности теории и практики, познания и деятельности. Положение это принимается Лебегом как в его историческом аспекте (все развитие математики определяется предъявляемыми к ней требованиями практики), так и в логическом аспекте (математические предложения являются концентратом нашего опыта, относящегося к действительному миру, руководящим нашей дальнейшей практической деятельностью, а не относятся к особому миру идеальных математических сущностей, или не являются продуктом свободного творчества нашего духа).

Отсюда вполне последовательно вытекает у Лебега борьба с условностью математических определений, с теориями, основывающими математику на „произвольных соглашениях". Ни в какой мере не отрицая законности и важности аксиоматического метода, Лебег прямо заявляет, что он не принимает „свободы определений", что, по его мнению бывают хорошие и плохие определения. Хорошими, по Лебегу, являются те определения, которые правильно отражают большой запас опыта, относящегося к действительному, материальному миру. Лебег настаивает при этом, что нельзя продуктивно заниматься математикой, забыв о ее происхождении: анализ первичных данных опыта вновь и вновь оказывается необходимым для продуктивного направления дальнейших исследований. Особенно интересно у Лебега стремление действительно перестроить формальное изложение математики так, чтобы оно соответствовало естественному развитию реального, прикладного смысла понятий. Эта тенденция несомненно вполне соединима с полной строгостью формального изложения, не принимающего других допущений, кроме явно формулированных аксиом. Последнее обстоятельство недостаточно оттенено в книге Лебега: обобщение данных опыта у него нигде не доводится до построения действительно исчерпывающей аксиоматики.

Но за всеми этими несомненно материалистическими высказываниями у Лебега стоит скептицизм субъективного идеалиста, каким он все же является. Забывая, что продуктивная практика может быть основана лишь на действительном познании внешнего мира, он заявляет, что для него математика есть только прикладная наука, что она не имеет никакого собственного предмета изучения, а лишь суммирует приемы, при помощи которых мы систематизируем наши наблюдения.

Даже в целых числах Лебег отказывается видеть что-либо большее, чем просто слова (символы). Слова пять, fifty, fünf, cinq не предполагают, по Лебегу, за собой никакого общего *предмета*, к которому они относятся. Число, отличное от обозначающего его слова, кажется Лебегу таинственной мистической сущностью, интересной лишь для „метафизики“, в которой математик совершенно не нуждается. Правильно начиная с того, что понятие числа возникает из операции счета и что числа отражают действительные свойства пересчитываемых групп предметов, Лебег уже совершенно неправильно продолжает: „для того чтобы считать, употребляют некоторое собрание слов или фразу (один, два, три, четыре, пять, . . .); слова этой фразы и называются числами“.

Точно так же действительные числа, в форме бесконечных десятичных дробей, возникают, по Лебегу, из операции измерения и являются не чем иным, как символами, которыми мы обозначаем результат измерения. Но здесь уже сам Лебег замечает непоследовательность своей точки зрения. Оказывается, несмотря на все усилия, „метафизику“ не удалось изгнать: „геометрическое измерение начинается физически, но заканчивается лишь матафизически“ (§ 55).

Так, неизбежно, чистый эмпиризм впадает в матафизику худшего сорта: чистота его принципов все равно безнадежно утеряна, а вместо убедительной и увлекательной идеи действительного числа получен лишь жалкий суррогат в виде бесконечной строчки, состоящей из лишенных смысла значков!

Впрочем, на общем фоне основной тенденции книги — воспринимать математику как действительное познание внешнего мира — все это воспринимается как нарочитый маскарад. Зачем было бы возиться с выяснением действительного происхождения математических понятий, если в результате будут получены не настоящие общие понятия, однозначно отвечающие своему назначению, а символические конструкции совершенно случайного характера?

4. Основной положительной педагогической идеей Лебега (не говоря уже о единстве теории и практики) является возможность полного единства преподавания математики на разных ступенях обучения: одни и те же понятия, и в основном в одной и той же форме, сначала воспринимаются наглядно на примерах, потом формулируются более отчетливо и, наконец, подвергаются тонкому логическому анализу.

В применении к действительным числам для такого единого изложения наиболее подходит точка зрения бесконечных десятичных дробей. В начальной школе учащиеся знакомятся с операцией измерения, получают из нее конечные десятичные дроби и изучают арифметические действия над десятичными дробями. На примере периодических дробей, возникающих при делении, уже забрасывается первая идея о том, что число может выражаться также и бесконечной дробью. В средней школе подробнее разбирается вопрос о точности измерений, устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками полупрямой и бесконечными десятичными дробями, формулируется общее понятие действительного числа, доказывается существование иррациональных чисел. В последнем классе средней школы, или в высшей школе проводится строгое логическое изложение, следующее тем же самым общим линиям[1]).

Номинализм Лебега, т. е. нежелание видеть в абстрактных математических понятиях ничего кроме *слов*, вместе с утрированным практицизмом приводит его, как уже указывалось, к рискованному предложению изгнать из школы простые дроби: если десятичные дроби являются не способом записи чисел, а самими числами, то, конечно, введение простых дробей лишь осложняет дело.

По аналогичным соображениям Лебег совершает и другую важную методологическую ошибку. Ему хорошо известно, что соотношения между длинами, площадями и объемами, которыми интересуются в геометрии, не зависят от выбора единиц измерения. Тем не менее он настаивает на том, что геометрические величины суть не что иное, как *числа*, отнесенные к геометрическим фигурам (глава VI). Лебег не только *не хочет*, из соображений „экономии мышления", рассмотреть геометрические величины сами по себе, до измерения определенной единицей меры, но и *не может* этого сделать. В самом деле, выделяя (абстрагируя) *общее*, имеющееся у всех равновеликих между собой плоских фигур, мы получаем понятие *площади* в чистом виде. Но для того чтобы обозначить различные площади определенными символами, надо выбрать единицу меры. А без отнесения каждому предмету определенного символа сами предметы для Лебега не существуют (так как они и являются для Лебега лишь самыми этими символами).

Получается курьезное положение с самим заглавием книги: книга посвящена измерению величин, действительные числа появляются в результате измерения величин; в конце же концов оказывается, что сами величины суть не что иное, как отнесенные к известным объектам действительные числа. Концепция главы VI формально корректна: можно ввести сначала действительные числа, как последовательность десятичных знаков, не упоминая ничего об измерении величин, а после этого определить величины, как это сделано в главе VI. Но это коренным образом противоречит задаче, которую поставил себе автор.

Мне представляется единственно удачным выходом сопоставить те общие свойства длин, площадей и объемов, которые позволяют выра-

[1]) Для понимания многих мест книги Лебега интересно знать следующее. Французская средняя школа имеет шесть классов. В шестом (младшем), пятом и четвертом классах заканчивается арифметика (изучаемая в начальной школе); начиная с четвертого класса и до первого (старшего), изучается алгебра; параллельно проходятся геометрия и тригонометрия. Желающие поступить в высшие технические школы и на физико-математические факультеты после первого класса проходят еще „класс математики", программы которого содержат ряд вопросов нашего университетского курса. Окончанию класса математики соответствует степень бакалавра (получается по специальному экзамену). По окончании университета сдаются экзамены на степень лиценциата (licence).

жать их при выбранной единице меры числами, и называть „системой величин“ всякую совокупность объектов, обладающую этими свойствами. Но это уже не что иное, как аксиоматический метод, который не должен казаться скомпрометированным своей связью с конвенционализмом (учением об условности математических определений). Действительно, когда Гильберт в „Основаниях геометрии“ предлагает называть „пространством“ любую совокупность объектов и отношений удовлетворяющую его аксиомам, то вместе с Лебегом следует протестовать, если из определения Гильберта делают заключение о произвольности выбора объекта изучения в математике. Однако то же самое определение Гильберта можно воспринимать совсем противоположным образом. Можно утверждать, что система аксиом, лежащих в основе геометрии, является замечательным, концентрированным выражением результата наших усилий, направленных к познанию действительности. Успех, заключающийся в ее создании, тем более замечателен, что она не только отражает с очень большой точностью свойства окружающего нас пространства при обычной интерпретации ее основных понятий (точек, прямых, плоскостей и т. д.), но также хорошо приспособлена и для выражения совсем других закономерностей внешнего мира, при других ее интерпретациях. Таким образом, абстрактная (аксиоматизированная) геометрия *больше* связана с действительностью, чем геометрия в ее традиционной форме. Аксиоматический метод может и должен являться методом выделения и закрепления для дальнейшего отчетливого изучения тех общих форм (количественных и пространственных) действительного мира, изучение которых составляет предмет математики с точки зрения диалектического материализма. Тогда естественно будет преодолен разрыв между аксиоматизированной абстрактной математикой и живым чувством действительности, на котором так настаивает Лебег.

5. Русский перевод снабжен некоторым количеством чертежей (в подлиннике чертежи совершенно отсутствуют). В остальном к тексту Лебега присоединено лишь несколько кратких примечаний.

А. Колмогоров.