

Н.А. Шапошников

Основания теории детерминантов

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н.А. Шапошников**
Основания теории детерминантов / Н.А. Шапошников – М.: Книга по Требованию, 2014. – 62 с.

ISBN 978-5-458-56731-2

Издание 3

ISBN 978-5-458-56731-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ДЕТЕРМИНАНТЫ.

Свойства рѣшеній системы n уравненій съ n неизвѣстными.

Опредѣленіе детерминанта.

§ 1. Рѣшая систему нѣсколькихъ уравненій первой степени съ такимъ же числомъ неизвѣстныхъ и съ буквенными обозначеніями коэффициентовъ, легко обнаружить правильность въ составѣ тѣхъ алгебраическихъ выраженій, которыя представляютъ собою рѣшенія уравненій.

Возьмемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными

$$\begin{aligned} ax+by &= c, \\ a_1x+b_1y &= c_1, \end{aligned}$$

которыхъ рѣшенія суть

$$x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b} \text{ и } y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Разсматривая эти рѣшенія, замѣчаемъ слѣдующее: Оба неизвѣстные выражаются дробями, у которыхъ знаменатель общій. Этотъ знаменатель и оба числителя суть однородныя выраженія второй степени составленные изъ коэффициентовъ обоихъ уравненій. Въ составъ знаменателя входятъ лишь коэффициенты первыхъ частей уравненій; числитель x -са получается изъ знаменателя черезъ замѣну двухъ коэффициентовъ x -са соотвѣтствующими извѣстными членами; числитель y -ка получается изъ знаменателя посредствомъ такой же замѣны коэффициентовъ y -ка.

§ 2. Выраженія $ab_1 - a_1b$, $cb_1 - c_1b$ и $ac_1 - a_1c$ называются определителями или детерминантами 2-го порядка. Такъ какъ 2-й и 3-й детерминанты легко составляются изъ 1-го, то обратимъ исключительное вниманіе на 1-й детерминантъ $ab_1 - a_1b$. Правильный видъ этого выраженія позволяетъ указать нѣсколько способовъ для его составленія:

1-й способъ. Выписавъ два раза послѣдовательность буквъ ab , поставимъ указатель 1 сначала при второй буквѣ, потомъ при первой и вычитаемъ изъ перваго результата второй; получимъ $ab_1 - a_1b$.

2-й способъ. Составимъ квадратную табличку изъ коэффициентовъ при неизвѣстныхъ въ такой формѣ

$$\begin{array}{cc} a & b \\ a_1 & b_1 \end{array}$$

и возьмемъ произведенія этихъ коэффициентовъ наклонно, слѣва направо со знакомъ $+$, а справа налѣво со знакомъ $-$; получимъ $ab_1 - a_1b$.

3-й способъ. Если въ выраженіи $ab_1 - a_1b$ припишемъ буквамъ, не имѣющимъ указателей, нулевые указатели, то это выраженіе приметъ видъ $a_0b_1 - a_1b_0$. Замѣнимъ указателей такими же показателями степени; тогда получится новое выраженіе $a^0b^1 - a^1b^0$, которое по свойству степеней съ нулевыми показателями приведетъ къ виду разности $b - a$. Обратно, имѣя такую разность, введемъ въ члены ея недостающія въ нихъ буквы съ нулевыми показателями и замѣнимъ показателей степени указателями; тогда получимъ детерминантъ $ab_1 - a_1b$.

Послѣдній способъ кажется очень искусственнымъ; его значеніе обнаружится ниже.

§ 3. Возьмемъ систему трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2. \end{aligned}$$

Рѣшивъ ихъ, найдемъ три дробныхъ выраженія неизвѣстныхъ, которыя для краткости напомнимъ такъ

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D} \quad \text{и} \quad z = \frac{D_3}{D},$$

полагая, что

$$\begin{aligned} D &= ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c, \\ D_1 &= db_1c_2 - db_2c_1 + d_1b_2c - d_1bc_2 + d_2bc_1 - d_2b_1c, \\ D_2 &= ad_1c_2 - ad_2c_1 + a_1d_2c - a_1dc_2 + a_2dc_1 - a_2d_1c, \\ D_3 &= ab_1d_2 - ab_2d_1 + a_1b_2d - a_1bd_2 + a_2bd_1 - a_2b_1d. \end{aligned}$$

Заключенія, которыя мы выводимъ изъ разсматриванія рѣшеній, подобны вышеуказаннымъ: Всѣ три неизвѣстныя выражаются дробями съ однимъ и тѣмъ же знаменателемъ. Знаменатель и всѣ числители суть однородныя выраженія третьей степени. Въ составъ знаменателя входятъ лишь коэффициенты первыхъ частей уравненій: числитель x -са

получается изъ знаменателя черезъ замѣну трехъ коэффициентовъ x -са соотвѣтствующими извѣстными членами; числители y -ка и z -та получаются посредствомъ такой же замѣны коэффициентовъ y -ка и z -та.

§ 4. Указанныя выраженія общаго знаменателя D и числителей D_1 , D_2 и D_3 называются детерминантами 3-го порядка. Для составленія этихъ детерминантовъ можно указать нѣсколько способовъ. Рассмотримъ первый детерминантъ

$$D = ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c.$$

1-й способъ. Во всѣхъ шести членахъ детерминанта послѣдовательность буквъ a , b и c есть алфавитная. Выписавъ такую послѣдовательность 6 разъ, оставляемъ сначала первую букву безъ указателя, второй буквѣ приписываемъ указатель 1 и третьей 2; получимъ первый, положительный, членъ; переходя ко второму, отрицательному, члену, перемѣщаемъ въ первомъ членѣ указатели двухъ послѣднихъ буквъ. Затѣмъ придаемъ первой буквѣ указатель 1, второй 2, а третью пишемъ безъ указателя; составитъ третій, положительный, членъ, а изъ него черезъ перемѣщеніе указателей двухъ послѣднихъ буквъ—четвертый, отрицательный. Наконецъ, выписывая первую букву съ указателемъ 2, вторую безъ указателя и третью съ указателемъ 1, находимъ пятый, положительный, членъ, а изъ него, перемѣщая указатели двухъ послѣднихъ буквъ, шестой, отрицательный.

2-й способъ. Расположимъ коэффициенты при неизвѣстныхъ въ квадратную таблицу такъ

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \cdot a_1 & b_1 & c_1 \\ & a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

Первый членъ детерминанта получимъ, перемножая коэффициенты a , b_1 и c_2 , расположенные по первой діагонали таблицы, идущей сверху внизъ и слѣва направо. Третій и пятый члены составятся отъ перемноженія коэффициентовъ a_1 , b_2 , c и a_2 , b , c_1 , которые въ обоихъ случаяхъ располагаются въ вершинахъ двухъ треугольниковъ, имѣющихъ каждый по сторонѣ, параллельной первой діагонали. Всѣмъ этимъ членамъ приписываемъ знаки $+$.

Подобно этому составляемъ члены второй, четвертый и шестой:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

Для этого перемножаем коэффициенты a_2, b_1, c , расположенные по второй диагонали, идущей снизу вверх и слѣва направо, а также коэффициенты a_1, b, c_2 и a, b_2, c_1 , которые въ обоихъ случаяхъ располагаются въ вершинахъ двухъ треугольниковъ, имѣющихъ по сторонѣ, параллельной второй диагонали. Всѣмъ новымъ членамъ приписываемъ знаки —.

Распространяя предыдущій способъ, можно составить изъ коэффициентовъ уравненій такую таблицу, посредствомъ которой найдемъ кратчайшимъ путемъ всѣ четыре детерминанта. Для этого выписываемъ всѣ данные коэффициенты, какъ первыхъ, такъ и вторыхъ частей, располагая ихъ такъ, чтобы соотвѣтственные коэффициенты всѣхъ уравненій стояли въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. За послѣднимъ столбцомъ повторяемъ снова первый и второй столбцы. Такимъ образомъ получимъ таблицу

a	b	c	d	a	b
a_1	b_1	c_1	d_1	a_1	b_1
a_2	b_2	c_2	d_2	a_2	b_2

Разложимъ ее мысленно на четыре квадратныя таблицы, соединяя сначала 1-й, 2-й и 3-й столбцы, затѣмъ 2-й, 3-й и 4-й, далѣе 3-й, 4-й и 5-й и наконецъ 4-й, 5-й и 6-й. Примѣняя къ каждой изъ этихъ квадратныхъ таблицъ вышеописанный способъ перемноженія коэффициентовъ по диагоналямъ и треугольникамъ, получимъ сначала знаменателя D , затѣмъ числителя x -са D_1 , далѣе выраженіе $-D_2$, противоположное числителю y -ка, и наконецъ числителя z -та D_3 *).

Примѣнимъ этотъ способъ къ числовому примѣру. Рѣшимъ систему трехъ уравненій

$$3x - 2y + z = 5, \quad x + 4y - z = 9, \quad 2x - y + z = 6.$$

Для этого составляемъ таблицу

3	—2	1	5	3	—2
1	4	—1	9	1	4
2	—1	1	6	2	—1

*) Указанный способъ значительно проще общеупотребительнаго способа Саррюса. Мы вычисляемъ 4 детерминанта, выписывая только 18 количествъ; по способу Саррюса, составляя отдѣльную таблицу для каждаго детерминанта, нужно было бы выписать 60 количествъ.

и, пользуясь ею по указанному способу, находимъ

$$\begin{aligned} D &= (3.4.1) + (1.-1.1) + (2.-2.-1) - \\ &\quad - (2.4.1) - (1.-2.1) - (3.-1.-1) = 6, \\ D_1 &= 12 + 20 - 9 - 5 - 24 + 18 = 12, \\ -D_2 &= 18 - 18 + 5 - 27 + 10 - 6 = -18, \\ D_3 &= -5 - 36 + 72 + 12 + 27 - 40 = 30, \end{aligned}$$

откуда видно, что $x = \frac{12}{6} = 2$, $y = \frac{18}{6} = 3$ и $z = \frac{30}{6} = 5$.

3-й способъ. Припишемъ въ выраженіи D нулевые указатели тѣмъ буквамъ, которыя не имѣютъ указателей; тогда D приметъ видъ $a_0b_1c_2 - a_0b_2c_1 + a_1b_2c_0 - a_1b_0c_2 + a_2b_0c_1 - a_2b_1c_0$. Замѣнимъ теперь указателей равными имъ показателями степени и отбросимъ множителей съ нулевыми показателями; получится новое выраженіе $bc^2 - b^2c + ab^2 - ac^2 + a^2c - a^2b$, которое, будучи преобразовано въ произведение, принимаетъ форму $(b-a)(c-a)(c-b)$. Обратно, если дано такое произведение, составъ котораго легко запомнить, то, раскрывъ въ немъ скобки, введя въ каждый членъ недостающую въ немъ букву съ нулевымъ показателемъ и замѣнивъ всѣхъ показателей степени равными имъ указателями, получимъ выраженіе D .

§ 5. Два выраженія $b-a$ и $(b-a)(c-a)(c-b)$ сходны между собою въ томъ, что оба составлены изъ всевозможныхъ разностей, какія образуются въ первомъ случаѣ изъ двухъ количествъ a и b , а во второмъ изъ трехъ a , b и c , вычитая изъ каждаго слѣдующаго количества каждое ему предшествующее. Если даны четыре количества a , b , c и d , то, составляя по нимъ выраженіе, аналогичное двумъ предыдущимъ, получимъ его въ видѣ

$$(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c).$$

Въ общемъ случаѣ, когда дано n количествъ $a, b, c, d, \dots, n$, составимъ общій видъ подобныхъ выраженій

$(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c) \dots (n-a)(n-b) \dots (n-t)$,
который содержитъ одну разность съ уменьшаемымъ b , 2 разности съ уменьшаемымъ c , 3 разности съ уменьшаемымъ d и т. д., наконецъ $n-1$ разностей съ уменьшаемымъ n , а слѣдовательно всего $\frac{n(n-1)}{2}$ разностей.

Разсматривая общій видъ указанныхъ выраженій, легко замѣтитъ и общее ихъ свойство. Оно состоитъ въ томъ, что выраженіе мѣняетъ свой знакъ безъ измѣненія числовой величины при каждой перестановкѣ двухъ какихъ-нибудь изъ входящихъ въ него количествъ. Дѣйствительно, положимъ, что h и l

суть какія-нибудь два изъ этихъ количествъ и что въ алфавитной послѣдовательности $a, b, c, \dots, n$ количество h предшествуетъ l . Въ составѣ даннаго выраженія найдется разность $l-h$, которая отъ перестановки h и l обратится въ $h-l$ и слѣдовательно перемѣнитъ знакъ. Всѣ же остальные разности, содержащія h и l , можно соединить попарно такимъ образомъ, что произведенія, составленные изъ каждой пары, не будутъ измѣняться отъ перестановки h и l . Такъ для всякаго количества e , предшествующаго h , составимъ произведеніе $(h-e)(l-e)$ для всякаго количества k , расположеннаго между h и l , произведеніе $(k-h)(l-k)$ и наконецъ для всякаго количества m , слѣдующаго за l , произведеніе $(m-h)(m-l)$. Въ виду указаннаго свойства выраженіе, которое мы рассматриваемъ, называется знакоперемѣнною функціей составляющихъ его количествъ.

По раскрытіи скобокъ знакоперемѣнная функція принимаетъ видъ многочлена, котораго первый членъ есть

$$bc^2d^3 \dots n^{n-1}.$$

Легко видѣть, что въ этомъ многочленѣ нѣтъ членовъ съ равными показателями двухъ или нѣсколькихъ буквъ. Въ самомъ дѣлѣ, зная свойство функціи мѣнять знакъ при перестановкѣ количествъ h и l , нужно принять, что, какъ скоро въ составѣ многочлена есть членъ вида $\pm a^\alpha b^\beta \dots h^\eta \dots l^\lambda \dots n^\nu$, то долженъ быть также другой членъ $\mp a^\alpha b^\beta \dots h^\lambda \dots l^\eta \dots n^\nu$, отличающійся отъ предыдущаго только знакомъ и перемѣщеніемъ показателей при h и l ; если бы эти показатели η и λ оказались равными, то члены были бы равны по величинѣ и противоположны по знаку; слѣдовательно приведеніемъ они были бы сокращены.—Сопоставляя предыдущее замѣчаніе съ тѣмъ, что показатели буквъ въ членахъ не могутъ быть больше $n-1$ и что сумма показателей каждаго члена есть

$$\frac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n-1,$$

заключаемъ, что въ каждомъ изъ членовъ должны входить $n-1$ буквъ, показатели которыхъ суть числа $1, 2, \dots, n-1$, расположенныя въ какой-нибудь послѣдовательности. Если въ каждомъ членѣ введемъ недостающую въ немъ букву съ нулевымъ показателемъ, то общимъ видомъ членовъ будетъ служить выраженіе

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots m^\mu n^\nu,$$

гдѣ показатели представляютъ всѣ числа ряда

$$0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Изъ этихъ чиселъ можно сдѣлать $1.2.3\dots n$ перестановокъ. По этому число всѣхъ членовъ знакопеременной функціи равно $1.2.3\dots n$; это число всегда четное. Половина изъ членовъ функціи положительны и половина отрицательны.

Заканчивая разсмотрѣніе знакопеременной функціи, укажемъ еще одно свойство ея. Если одно изъ количествъ $a, b, \dots, n$, напр., h , замѣнимъ другимъ количествомъ l , взятымъ изъ той же системы, то знакопеременная функція обратится тождественно въ нуль; это видно изъ того, что указанное замѣщеніе обратитъ въ нуль разность $l-h$, входящую множителемъ въ составъ знакопеременной функціи.

§ 6. Замѣнимъ въ членахъ знакопеременной функціи показатели степени всѣхъ буквъ равными имъ указателями. Тогда получимъ новое выраженіе, которое назовемъ опредѣлителемъ или детерминантомъ n -го порядка. Такъ какъ n степеней каждаго количества, напр., степени $h^0, h^1, h^2, \dots, h^{n-1}$ замѣняются n количествами $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$, то въ составъ детерминанта войдутъ n^2 количествъ

$$\begin{array}{cccc} a_0 & b_0 & c_0 & n_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & n_2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & n_{n-1} \end{array}$$

Эти количества называются элементами детерминанта. Въ каждомъ членѣ детерминанта входятъ множителями n элементовъ. Первый или начальный членъ его есть $a_0 b_1 c_2 \dots n_{n-1}$. Обозначенія всѣхъ остальныхъ членовъ получаются изъ обозначенія перваго посредствомъ всевозможныхъ перемѣщеній указателей буквъ. Въ обозначеніе каждаго члена входитъ одинъ разъ каждая изъ буквъ и одинъ разъ каждый изъ указателей.—Число всѣхъ членовъ равно $1.2.3\dots n$; половина изъ нихъ положительна и половина отрицательна.

На основаніи даннаго опредѣленія можно составить детерминантъ какого угодно порядка. Если элементы детерминанта суть количества явно выраженные, то, найдя сначала общее выраженіе, подставляемъ данныя значенія элементовъ и тогда можемъ вычислить значеніе самаго детерминанта.

Примѣчаніе. Если всѣ количества, обозначенныя одной буквой, какъ, напр., $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, или всѣ количества съ однимъ указателемъ, напр., $a_0, b_0, \dots, n_0$, равны нулю, то и самый детерминантъ равенъ нулю, потому что каждый членъ его содержитъ множителемъ одинъ изъ такихъ элементовъ. Это замѣчаніе получить ниже важное примѣненіе.

§ 7. Общимъ видомъ всѣхъ членовъ детерминанта служить выражение

$$a_{\alpha}b_{\beta}c_{\gamma}\dots h_{\eta}\dots n_{\nu},$$

въ которомъ указатели представляютъ всѣ числа ряда

$$0, 1, 2, \dots, n-1,$$

расположенные въ какой-нибудь послѣдовательности. Если отдѣлить одинъ изъ этихъ указателей, напр., η , то число способовъ для перемѣщенія всѣхъ остальныхъ будетъ равно $1.2.3\dots(n-1)$. Понятно, что столько же будетъ членовъ детерминанта, содержащихъ одинъ и тотъ же опредѣленный элементъ h_{η} . Выведемъ въ этихъ членахъ h_{η} за скобку и назовемъ выражение въ скобкахъ черезъ H_{η} *); это выражение не можетъ содержать ни одного изъ элементовъ, въ обозначеніе которыхъ входитъ буква h или указатель η . Поэтому, собирая члены съ элементами $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$, мы разложимъ весь детерминантъ на сумму n выражений, содержащихъ каждое $1.2\dots(n-1)$ членовъ. Такимъ образомъ, для детерминанта n -го порядка, который обозначимъ черезъ D , находимъ формулу

$$D = h_0 H_0 + h_1 H_1 + h_2 H_2 + \dots + h_{n-1} H_{n-1} = \sum h_{\eta} H_{\eta},$$

гдѣ знакъ суммы $\sum$ распространяется на различные значенія η .

Подобнымъ же образомъ докажемъ $n-1$ другихъ формулъ

$$D = \sum a_{\alpha} A_{\alpha}, \quad D = \sum b_{\beta} B_{\beta}, \quad \dots, \quad D = \sum n_{\nu} N_{\nu},$$

въ которыхъ новыя обозначенія аналогичны вышеуказаннымъ.

Положимъ теперь, что въ выраженіи $\sum h_{\eta} H_{\eta}$ всѣ элементы $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ будутъ замѣнены соответственно элементами $l_0, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$; тогда получимъ выраженіе $\sum l_{\eta} H_{\eta}$, которое будетъ тождественно равно нулю, потому что указанное замѣщеніе въ детерминантѣ соотвѣтствуетъ замѣнѣ въ знакоперемѣнной функціи количества h черезъ l , а эта замѣна обращаетъ знакоперемѣнную функцію въ нуль (§ 5).

Итакъ, при условныхъ обозначеніяхъ, принятыхъ нами, всякое выраженіе вида $\sum h_{\eta} H_{\eta}$, въ которомъ при одинаковыхъ указателяхъ входятъ и буквы одинаковаго названія, равно D , а всякое выраженіе вида $\sum l_{\eta} H_{\eta}$, въ которомъ указатели одинаковы, но буквы различны, равно нулю.

*) Ниже будетъ доказано, что H_{η} представляетъ детерминантъ $n-1$ порядка (§§ 21, ..., 23).

§ 9. Въ предыдущемъ параграфѣ мы рассматривали обыкновенную систему, въ которой число уравненій равно числу неизвѣстныхъ. Возьмемъ теперь систему n уравненій съ $n-1$ неизвѣстными

$$a_0\xi + b_0\eta + c_0\zeta + \dots + m_0\tau + n_0 = 0,$$

$$a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \dots + m_1\tau + n_1 = 0,$$

$$a_{n-1}\xi + b_{n-1}\eta + c_{n-1}\zeta + \dots + m_{n-1}\tau + n_{n-1} = 0.$$

Такъ какъ для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ необходимо и достаточно $n-1$ уравненій, то данная система, въ которой одно уравненіе лишнее, возможна тогда лишь, когда всѣ уравненія ея совмѣстны, т.-е. когда одно изъ этихъ уравненій не противорѣчитъ системѣ $n-1$ остальныхъ. Нетрудно найти связь между коэффициентами, которая составляетъ условіе совмѣстности.

Выразимъ неизвѣстныя $\xi, \eta, \dots, \tau$ въ формѣ дробей, полагая

$$\xi = \frac{x}{u}, \quad \eta = \frac{y}{u}, \quad \zeta = \frac{z}{u}, \dots, \quad \tau = \frac{t}{u},$$

гдѣ u есть количество, которое можно выбрать произвольно. Подставивъ эти выраженія во всѣ данныя уравненія и умноживъ каждое изъ нихъ на u , получимъ новую систему

$$a_0x + b_0y + c_0z + \dots + m_0t + n_0u = 0,$$

$$a_1x + b_1y + c_1z + \dots + m_1t + n_1u = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \dots + m_{n-1}t + n_{n-1}u = 0,$$

уравненія которой отличаются отъ уравненій обыкновенной системы тѣмъ, что извѣстные члены, какіе выше обозначались черезъ $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$, замѣнены нулями. Подобныя уравненія называются однородными. Условіе совмѣстности ихъ очевидно то же, что и для данныхъ уравненій. Но къ новымъ уравненіямъ, число которыхъ равно числу неизвѣстныхъ, можно примѣнить выводы, полученные въ предыдущемъ параграфѣ. Сохраняя указанные тамъ обозначенія, замѣтимъ, что въ данномъ случаѣ всѣ детерминанты, выражающіе числители неизвѣстныхъ,

$$/^{a=0}D, /^{b=0}D, \dots, /^{n=0}D$$

равны нулю на основаніи примѣчанія, указаннаго въ § 6-мъ. Вслѣдствіе этого выраженія неизвѣстныхъ принимаютъ видъ

$$x = \frac{0}{D}, \quad y = \frac{0}{D}, \quad \dots, \quad u = \frac{0}{D},$$