Зоммерфельд А.

Дифференциальные уравнения в частных производных физики

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
З-83

Зоммерфельд А.
З-83 Дифференциальные уравнения в частных производных физики / Зоммерфельд А. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 460 с.

ISBN 978-5-458-28196-6

В книге А. Зоммерфельда "Дифференциальные уравнения в частных производных физики", являющейся шестым томом его лекций по теоретической физике, последовательно изложен круг вопросов, входящих обычно в курс методов математической физики (ряды Фурье, проблемы, связанные с рассмотрением уравнений в частных производных второго порядка, цилиндрические и шаровые функции, уравнения колебаний мембран и т.д.). В отличие от книг, имеющихся по этому разделу математики, в книге Зоммерфельда много внимания уделено физических проблем и конкретных задач. В конце книги в виде задач дан полезный дополнительный материал, непосредственно примыкающий в основному тексту.Книга рассчитана на широкий круг читателей, прежде всего физиков всех специальностей; её с интересом прочтут также математики; занимающиеся вопросами теоретической физики.

ISBN 978-5-458-28196-6

А. ЗОММЕРФЕЛЬД

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФИЗИКИ

1950

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва

АННОТАЦИЯ

В книге А. Зоммерфельда «Дифференциальные уравнения в частных производных физики», являющейся шестым томом его лекций по теоретической физике, последовательно изложен круг вопросов, входящих обычно в курс методов математической физики (ряды Фурье, проблемы, связанные с рассмотрением уравнений в частных производных второго порядка, цилиндрические и шаровые функции, уравнения колебаний мембран и т. д.). В отличие от книг, имеющихся по этому разделу математики, в книге Зоммерфельда много внимания уделено физической стороне дела: рассмотрению физических проблем и конкретных задач. В конце книги в виде задач дан полезный дополнительный материал, непосредственно примыкающий к основному тексту.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, прежде всего физиков всех специальностей; ее с интересом прочтут также математики, занимающиеся вопросами теоретической физики.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Зоммерфельда посвящена математической физике, причем автор ограничивает свою задачу рассмотрением дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Существует значительное число книг, в которых излагаются эти разделы математики. Сюда относятся большие курсы анализа, как курсы Гурса, Смирнова, так и специальные книги Крылова, Вебстера и Сеге, Соболева, Петровского, Франка и Мизеса, Куранта и Гильберта.

В противоположность названным выше книгам, изложение Зоммерфельда не претендует на математическую строгость и ставит своей задачей, наряду с несколько упрощенным изложением основных математических фактов, дать их физические приложения и пояснить их значимость. В качестве примера, характеризующего математический стиль изложения, можно привести раздел, посвященный рядам Фурье. Автор не останавливается на доказательстве основной теоремы о сходимости ряда к разлагаемой функции и не дает себе труда сформулировать эту теорему в тех или иных предположениях. Небрежность в формулировках и доказательствах приводит автора иногда к неверным утверждениям (например, утверждение об аналитичности решения уравнения теплопроводности на стр. 91).

Однако книга Зоммерфельда является ценной как в отношении наглядности изложения, так и в отношении многочисленных физических приложений и сопоставлений, в ней приведенных. Она написана одним из крупнейших физиков-теоретиков, создателем ряда новых математических методов. Читателя, начинающего знакомиться с этими разделами математики, она скорее, чем какая-либо другая книга, введет в курс основных фактов и объяснит их значение. Для читателя, знакомого с математической стороной дела, она представит интерес в отношении оригинальности изложения, а также приведенных в ней физических приложений и примеров.

Подобно большинству зарубежных авторов, Зоммерфельд недостаточно полно оценивает достижения науки нашей страны. Основную формулу преобразования объемных интегралов в поверхностные, содержащую выражение дивергенции, автор называет формулой Гаусса. Как известно, она была дана М. В. Остроградским в 1835 г.[1]). Аналогичная формула, несколько специализированная и не содержащая выражения для дивергенции, была дана Гауссом в 1841 г.

Одним из краеугольных камней математической физики является принцип разложимости функций в ряды по собственным функциям краевых задач. Основные общие результаты в этой области принадлежат В. А. Стеклову, впервые в 1896 г. доказавшему эту теорему для уравнений с переменными коэфициентами (в одномерном случае)[2]). В оригинальном тексте принцип разложимости автор связывает с именами Ома—Релея, в силу того, что эти ученые пользовались без доказательства этим принципом, и нигде не упоминает имени В. А. Стеклова.

Далее, посвящая целую (шестую) главу теории распространения радиоволн, автор не упоминает имени В. А. Фока, весьма много сделавшего в этой области и, в частности, внесшего исправления в основную работу автора[3]).

При редактировании перевода книги мы считали необходимым изменить терминологию автора как в приведенных выше случаях, так и в некоторых других, представляющих меньшее значение, в соответствии с терминологией, принятой в советской научной литературе, не делая при этом оговорок по ходу текста. Ряд конкретных замечаний сделано в виде примечаний.

Член-корреспондент АН СССР *А. Н. Тихонов.*

---

[1]) М. В. Остроградский, Мемуары Академии Наук, серия VI, т. III (1835).

[2]) В. А. Стеклов, Сообщения Харьковского математического общества, вторая серия, т. 5, № 1 и 2 (1896).

[3]) А. Зоммерфельд. гл. XIX, в книге Франка и Мизеса, Дифференциальные уравнения математической физики.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Уравнения в частных производных математической физики составили естественное завершение прочитанного мною шестисеместрового цикла лекций. Собственно говоря, мы имеем здесь дело не с математической физикой, а, я сказал бы, с *физической математикой*, т. е. не с математической формулировкой физических фактов, а с физическим обоснованием математических методов. Во всем дальнейшем мы будем на каждом шагу убеждаться в том, что рассматриваемые здесь математически интересные вопросы являются в то же время и физически важными. Эта гармония между математически интересным и физически важным делает нашу тему, так сказать, эстетически привлекательной.

Рассматриваемый нами круг вопросов в большей своей части принадлежит классическому достоянию математической литературы, о чем свидетельствует связь этого круга идей с именами Лапласа, Фурье, Грина, Гаусса, Римана и Вильяма Томсона[1]). Чтобы показать, что эти классические методы могут быть распространены и на актуальные проблемы, в гл. VI довольно подробно рассмотрено *распространение радиоволн*.

Гл. V посвящена общему методу *собственных функций*. Как известно, областью, в которой особенно блестяще проявил себя этот метод, является *волновая механика*, что показано нами на отдельных, особенно простых примерах. Мы должны были, естественно, отказаться от строгого математического доказательства существования и обоснования свойств собственных функций с помощью теории интегральных уравнений; только в отдельных случаях,

---

[1]) Автор не упоминает имен М. В. Остроградского, П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, внесших фундаментальный вклад в развитие математической физики (см. предисловие редактора перевода). (*Прим. ред.*)

в связи с некоторыми теоремами теории дифференциальных уравнений, мы ссылаемся на соответствующие теоремы теории интегральных уравнений.

Гл. IV, посвященная *цилиндрическим и шаровым функциям*, несмотря на очень сжатое изложение, занимает непропорционально большое место; для краткости здесь, как и в других местах, некоторые доказательства перенесены в упражнения. Специальный параграф посвящен изящному *методу обратных радиусов*, а также доказательству неприменимости этого метода к другим проблемам, кроме теории потенциала.

Гл. III посвящена почти целиком классическим проблемам теплопроводности. Наряду с методом Фурье здесь подробно развит для случая областей, ограниченных плоскостями, более наглядный *метод зеркальных отражений*. Гл. II рассматривает различные типы дифференциальных уравнений и граничных задач; формула Грина и функция Грина даются достаточно общим образом.

Гл. I о рядах и интеграле Фурье основана всецело на *методе наименьших квадратов*. Если этот метод дополнить требованием, называемым нами «аксиомой окончательной определенности», то он может заменить формальные вычисления старых способов изложения, являясь более полным и допуская дальнейшее обобщение не только в тригонометрическом случае, но и для шаровых функций и собственных функций общего вида.

Как вытекает из этого обзора, расположение материала не является систематическим, а определяется дидактическими требованиями. Гл. I должна ввести читателя в методику разложений Фурье и ему подобных разложений. Гл. II дает необходимые для физика-математика важнейшие понятия из теории дифференциальных уравнений в частных производных. Гл. III следовало бы, с точки зрения систематического изложения материала, подчинить общим методам гл. V, однако из исторических и дидактических соображений она поставлена впереди. Большой объем гл. IV мог бы быть оправдан тем, что здесь содержится значительная часть материала, излагаемого в учебниках по бесселевым и шаровым функциям, причем в удобном для применения виде. Из дидактических соображений для обоих классов функций в формально-математическую часть вставлены в двух специальных параграфах типичные примеры их приложений.

Ясно, что очерченный нами объем не мог целиком уместиться в рамки короткого летнего семестра. Действительно, многие, особенно математически более трудные отделы появились впервые только в печатном виде, частично в виде приложений. Следует уже здесь особо отметить приложение II к гл. V, которое было добавлено только по окончании остальной части рукописи и которое освещает весь круг вопросов, относящихся к области, промежуточной между короткими и длинными волнами, т. е. переходу от геометрической к волновой оптике.

Март 1947. *А. Зоммерфельд.*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Это второе издание представляет собой почти полную перепечатку первого. Существенные изменения произведены были только на стр. 158 и 354.

Мюнхен, май 1948. *А. Зоммерфельд.*

Глава I

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

Для специалиста по математической физике «Аналитическая теория теплоты» Фурье[1]) является в некотором смысле настольной книгой. В ней не только дана теория тригонометрических рядов и интегралов, названных по имени их создателя, но и образцово проведено решение общей граничной задачи на примере уравнения теплопроводности.

В математических лекциях по рядам Фурье обычно делают ударение на понятие произвольной функции, на ее свойства непрерывности и ее особенности и допускают, например, наличие точек сгущения бесконечно многих максимумов и минимумов. Эта точка зрения отпадает в физических приложениях, так как встречающиеся здесь начальные или граничные значения рассматриваются всегда—хотя бы уже вследствие атомистической структуры материи и энергии—как средние значения. Точно так же и уравнения в частных производных, в которые они входят, получаются путем статистического усреднения гораздо более сложных элементарных законов. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением сравнительно простых идеализированных функций и их апроксимаций с «наименьшей ошибкой» в смысле, определенном Гауссом в его «Методе наименьших квадратов». Этот метод открывает простой и научно строгий подход не только к теории рядов Фурье, но и к теории разложения в ряды по шаровым, цилиндрическим и вообще по собственным функциям, встречающимся в математической физике.

---

[1]) Книга Фурье по теории теплопроводности появилась в 1822 г. в Париже. Фурье известен также как алгебраист, инженер и историк египетского похода Наполеона, в котором он принимал участие.

§ 1. РЯДЫ ФУРЬЕ

Пусть на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant +\pi$ задана некоторая произвольная функция $f(x)$, которая, например, может быть определена с помощью достаточно большого числа точных измерений, как кривая наблюдений. Будем ее апроксимировать с помощью суммы из $2n+1$ тригонометрических членов

$$S_n(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx +$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx. \qquad (1.1)$$

Как следует выбирать коэфициенты A_k, B_k? Возникающую ошибку $f(x) - S_n(x)$ обозначим через $\varepsilon_n(x)$, т. е. положим

$$f(x) = S_n(x) + \varepsilon_n(x). \qquad (1.2)$$

Следуя Гауссу, рассмотрим среднюю квадратичную ошибку

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varepsilon_n^2 \, dx \qquad (1.3)$$

и подберем A_k, B_k так, чтобы она достигала минимума.

При этом следует заметить: аналогичная оценка ошибки, полученная с помощью первой степени ε_n, была бы нецелесообразна, так как при этом как угодно большие ошибки разного знака могли бы взаимно уничтожаться и не вошли бы в суммарную ошибку. С другой стороны, использование под знаком интеграла абсолютной величины $|\varepsilon_n|$ вместо ε_n^2 было бы неудобно вследствие ее неаналитического характера[1]).

---

[1]) Совершенно другой путь выбирает великий русский математик Чебышев: в апроксимации, названной по его имени, он берет не среднюю ошибку, а максимальную величину $|\varepsilon_n|$ на рассматриваемом сегменте и соответствующим выбором коэфициентов добивается ее минимального значения.