

К.Ф. Гаусс

Труды по теории чисел

Классики науки

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
К11

К11 **К.Ф. Гаусс**
Труды по теории чисел: Классики науки / К.Ф. Гаусс – М.: Книга по Требованию, 2024. – 979 с.

ISBN 978-5-458-33057-2

Почти все работы великого математика Гаусса были опубликованы им на латинском языке. В настоящем издании впервые публикуются в русском переводе все работы Гаусса по теории чисел. Перевод выполнен кандидатом физико-математических наук В. Б. Демьяновым в основном с прекрасного немецкого перевода Мазера, но некоторые места перевода были, кроме того, сверены членом-корреспондентом АН СССР Б. Н. Делоне с подлинным латинским текстом. В "Приложениях" даны статьи академика И. М. Виноградова "Карл Фридрих Гаусс" и статья-комментарий Б. Н. Делоне "Работы Гаусса по теории чисел", облегчающие чтение текста работ Гаусса.

ISBN 978-5-458-33057-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ





ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Содержащиеся в этом сочинении исследования относятся к той части математики, которая имеет дело с целыми числами, в то время как дробные числа остаются вне рассмотрения в большинстве случаев, а мнимые — всегда. Так называемый неопределенный или диофантов анализ, представляющий собой учение о том, как из бесконечного числа решений, удовлетворяющих неопределенному уравнению, выбирать те, которые являются целочисленными или хотя бы рациональными (а в большинстве случаев еще и положительными), не исчерпывает этой дисциплины, а представляет собой лишь очень специальную ее часть, которая относится ко всей дисциплине приблизительно так же, как учение о преобразовании и решении уравнений (алгебра) относится к анализу в целом. Именно, как все исследования, которые касаются общих свойств числовых величин и связей между ними, принадлежат к области анализа, так целые числа (а также и дробные, поскольку они определяются через целые) составляют предмет изучения арифметики. Но так как то, что обычно принято называть арифметикой, почти не выходит за пределы искусства считать и вычислять (т. е. представлять числа в определенном виде, например, в десятичной системе, и производить над ними арифметические операции) с добавлением еще некоторых вопросов, которые или вовсе не относятся к арифметике, как, например, учение о логарифмах, или имеют силу не только для целых чисел, но и для любых числовых величин, то представляется целесообразным различать две части арифметики и только что упомянутое причислять к элементарной арифметике, а все общие исследования о внутренних связях между целыми числами относить к высшей арифметике, о которой одной здесь и будет идти речь.

К высшей арифметике относится то, что Э в к л и д с присущими древним изяществом и строгостью изложил в *«Началах»*, в книге VII и следующих; однако это представляет собой лишь первые шаги этой науки. Знаменитое сочинение Д и о ф а н т а, целиком посвященное проблемам неопределенного анализа, содержит много исследований, которые вследствие их трудности и красоты методов заставляют быть высокого мнения об уме и проницательности их автора, особенно, если учесть незначительность вспомогательных средств, находившихся в его распоряжении. Так как, однако, эти задачи больше требуют находчивости и сообразительности, чем глубоких методов, и, кроме того, являются слишком специальными и редко приводят к более общим выводам, то эта книга рассматривается как эпоха в развитии математики скорее потому, что она содержит в себе первые следы искусства, характерного для алгебры, а не потому, что она обогатила новыми открытиями высшую арифметику. Главным образом более поздним исследователям, правда, немногочисленным, но завоевавшим непреходящую славу, — таким, как Ф е р м а, Э й л е р, Л а г р а н ж, Л е ж а н д р, мы обязаны тем, что они нашли доступ к сокровищнице этой божественной науки и показали, какими богатствами она наполнена. Я, однако, не буду здесь перечислять, какие открытия принадлежат каждому из этих математиков в отдельности, так как это можно узнать из предисловия к дополнениям, которыми Л а г р а н ж снабдил *«Алгебру»* Э й л е р а, и из недавно вышедшего сочинения Л е ж а н д р а, о котором скоро будет упоминаться; кроме того, об этом говорится в соответствующих местах настоящих *«Арифметических исследований»*.

Целью этого труда, издать который я обещал еще пять лет назад, было довести до общего сведения те исследования по высшей арифметике, которыми я занимался частью ранее, частью позже указанного срока. Однако, чтобы никто не удивлялся, что я здесь повторяю предмет почти с самого начала и заново произвожу многие исследования, которыми уже занимались другие, я считаю необходимым указать на то, что когда я в начале 1795 г. впервые принялся за исследования такого рода, я ничего не знал о том, что было сделано за последнее время в этой области, и все средства, при помощи ко-

торых я получал свои результаты, я изобретал сам. Именно, занимаясь в то время другой работой, я случайно натолкнулся на одну изумительную арифметическую истину (если не ошибаюсь, она изложена в виде теоремы в п. 108), и так как она не только показалась мне прекрасной сама по себе, но и навела на мысль, что она связана и с другими выдающимися фактами, я со всей энергией взялся за то, чтобы выяснить принципы, на которых она основывается, и получить строгое ее доказательство. После того как это желание, наконец, осуществилось, прелесть этих исследований настолько увлекла меня, что я уже не мог их оставить; так и получилось, что в то время как одни все время пролагали дорогу другим в том, что изложено в первых четырех разделах этого труда, я сам имел о подобных работах других математиков лишь приблизительное представление. Когда же мне, наконец, представилась возможность ознакомиться с работами этих выдающихся умов, то я понял, что большая часть моих рассуждений была посвящена уже давно известным вещам, но с тем большей охотой решился следовать по стопам этих ученых, которые двигали арифметику вперед; так возникли различные исследования, часть которых составляют разделы V, VI, VII. Когда я, спустя некоторое время, принял решение опубликовать результаты моих усилий, то я, идя навстречу желаниям многих, тем охотнее решил не выбрасывать ничего также и из указанных более ранних исследований, что, во-первых, в то время еще не было книги, по которой можно было бы ознакомиться с рассеянными по академическим изданиям работами других математиков по этому вопросу; затем, потому, что многие из этих исследований были совершенно новыми и проводились новыми методами, и, наконец, потому, что все они так тесно переплетались как между собой, так и с более поздними исследованиями, что новое неудобно было бы изложить достаточно ясно без того, чтобы сначала не напомнить некоторые другие вещи.

Тем временем появилось сочинение уже и до того имевшего большие заслуги в высшей арифметике Л е ж а н д р а (*«Essai d'une theorie des nombres»*, Paris, a. VI), в котором он не только тщательно обработал и привел в порядок все, что было сделано в этой науке до сих пор, но и привнес очень много своего собственного. Так как эта

книга попала ко мне в руки слишком поздно, когда большая часть моего сочинения была уже готова, я ее нигде не упоминал в тех случаях, когда аналогия рассматриваемых вопросов могла бы дать к этому повод; лишь в отношении нескольких ее мест я счел необходимым сделать некоторые замечания в дополнениях, которые, как я надеюсь, любознательный читатель не оставит без внимания.

Во время печатания этого сочинения, которое несколько раз прерывалось и из-за многочисленных задержек растянулось на четыре года, я не только продолжил далее те исследования, которые начал еще ранее, но опубликование которых решил отложить до другого случая, чтобы не делать книгу слишком объемистой, но и принялся за многие новые исследования. Кроме того, несколько исследований, которые я по той же причине только вскользь упоминал, так как более подробное рассмотрение представлялось менее необходимым (например, те, о которых говорится в пп. 37, 82 и следующих, и в других местах), в дальнейшем были продолжены и дали повод к более общим исследованиям, которые представляются достойными опубликования (ср. также сказанное в дополнениях относительно п. 306). Наконец, так как книга вследствие значительного размера раздела V оказалась гораздо объемистее, чем я ожидал, — многое, что первоначально для нее предназначалось, и в частности весь восьмой раздел (который в этом сочинении уже упоминается в нескольких местах, и который содержит общее изложение теории алгебраических сравнений любой степени), пришлось выбросить. Все эти вещи, которые легко могут заполнить том, равносильный настоящему, я опубликую, как только для этого представится случай.

То, что во многих трудных исследованиях я пользовался синтетическими доказательствами и опускал анализ, при помощи которого они были найдены, объясняется главным образом требованиями краткости, которым я, насколько это возможно, должен был стремиться удовлетворить.

Теория деления круга или теория правильных многоугольников, которая рассматривается в разделе VII, сама по себе не принадлежит арифметике; однако ее принципы следует черпать только в

высшей арифметике; это будет для математиков, быть может, столь же неожиданным, сколь, надо надеяться, приятными бывают для них обычно истины, черпаемые из этого источника.

На это я хотел обратить внимание читателя. О самом предмете судить не мне. Я ничего не желаю столь горячо, как того, чтобы эти исследования понравились тем, кто принимает близко к сердцу успехи науки, как те, которые восполняют имевшиеся до сих пор пробелы, так и те, что открывают путь к новому.
