Зеленяк Олег Петрович

Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 004
ББК 32.81
З-48

Зеленяк Олег Петрович
З-48 Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем / Зеленяк Олег Петрович – М.: Lennex Corp, — Подготовка макета: ООО «Книга по Требованию», 2025. – 330 с.

ISBN 978-5-94074-422-1

В книге предлагается четкая, проверенная многолетней практикой система обучения решению задач по планиметрии - эффективная технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Все задачи снабжены решениями, которые сравниваются, анализируются и обобщаются. Особое внимание уделено культуре чертежей и вычислений, логике и способам решений, отбору и систематизации задач.Отличительная особенность пособия - наличие материалов, предназначенных для интегрированного изучения математики и информатики.Издание предназначено для учащихся, абитуриентов, студентов педВУЗов, учителей.

ISBN 978-5-94074-422-1

© Lennex Corp, 2025
© Зеленяк Олег Петрович, 2025

О. П. Зеленяк

Решение задач по планиметрии

Технология
алгоритмического подхода
на основе задач-теорем

Моделирование
в среде Turbo Pascal

ДМК ПРЕСС
издательство

торгово-издательский дом
DiaSoft

Москва • Санкт-Петербург • Киев

Предисловие

"Я прошу всех беспристрастно посмотреть на следующие темы, занимающие большое место в школьной математике: I. Задачи на построение циркулем и линейкой. II. Свойства "традиционных" фигур, таких, как треугольники, четырехугольники, окружности и системы окружностей … – все это со всеми изощрениями, накопленными поколениями "геометров" и преподавателей в поисках подходящих экзаменационных задач… ни с чем подобным человек никогда в жизни не столкнется… надо учить принципам и только им! (***Ж. Дьедонне***).

"И все-таки что-то мешает мне признать правоту этих слов. Само понятие "образование" более сложно. Оно состоит не только в приобретении знаний и навыков, но и в тренировке мышления. На протяжении, по-видимому, двух столетий (а, может быть, и больше) задачи на бассейны, задачи на построение, задачи на треугольники и преобразования тригонометрических формул выполняли великую роль – они давали пищу для ума, приучали к точности и аккуратности, учили рассуждать, искать истину, преодолевать трудности, испытывать разные пути к цели, учили достигать ее. Они одаривали радостью успеха и ощущением красоты. В конечном счете, они моделировали творчество. Чем заменить все это? И стоит ли? … Тренировать мышление можно лишь на конкретных, "частных" задачах, а не на "общих" принципах…" (***В.М. Тихомиров***).

"В школе большую пользу для развития фантазии приносит решение геометрических задач. Это должны быть настоящие задачи, требующие, чтобы ученик сам придумал решение, подыскал построение. Интересно, что именно это занятие встречает общее несочувствие. Стараются устранить в школе решение задач. Существует странный взгляд, отделяющий геометрию от решения задач, как два различных предмета. Предполагают, что можно знать первый из них, не владея вторым. Или стараясь облегчить работу учеников, издают для них готовые решения задач, правила и шаблоны для такого решения, настолько же вредные, как планы для писания сочинений на заданные темы" (*из доклада первого ректора КПИ* ***В.Л. Кирпичева*** *"Значение фантазии для инженеров*", 1903 *год*).

"Планиметрия представляет собой замкнутую модель науки, внутри которой можно бесконечно совершенствоваться. Она дает большие возможности для развития творческого, интеллектуального. Особая роль элементарной геометрии по отношению к серьезной науке, причем не только математической, состоит также в том, что она является неисчерпаемым источником интересных и оригинальных идей, облегчает поиск решения самых различных научных и технических проблем … *Сегодня геометрия является одним из немногих экологически чистых продуктов, потребляемых в образовании* ... Представляется полезным выделить некоторое множество задач (будем называть их опорными), в которых формулируется некий факт, достаточно часто используемый в задачах, либо иллюстрируется какой-либо метод или прием решения задач" (***И.Ф. Шарыгин***).

Предоставляем читателю продолжить поиск истины. Приведенные выше пары противоречивых высказываний заставляют серьезно задуматься.

Но что является бесспорным сегодня? Это то, что роль геометрии как учебного предмета в школе недооценивается. Его потенциал огромен.

На контрольной работе, экзамене требуется решить задачу и получить верный ответ, а не формулировать тот или иной принцип.

Как научиться решать задачи по планиметрии?

Прежде всего необходимо систематизировать и обобщить знания по предмету. Одним из проверенных практикой эффективных методов обучения является *алгоритмический метод*, который предполагает обязательный объем начальных сведений. Здесь уместна аналогия с шахматами. Много ли комбинаций составит шахматист, сверяющий ходы фигур по справочнику?

Как сообщить обязательный объем начальных сведений?

Во-первых, их нужно выделить. Так в литературе появились термины: опорные, базисные задачи, *задачи-теоремы*. Это задачи, которые часто и эффективно используются при решении других задач наряду с главными теоремами геометрии: Пифагора, косинусов, синусов и др. В книге выделено 25 задач-теорем. Во-вторых, задачи-теоремы нужно выучить наизусть. Только после этого и большого количества самостоятельно решенных задач можно говорить о начале приобретения собственного опыта и формирования геометрической интуиции.

Основываясь на практическом опыте, можно утверждать, что ***знаний и умений применения выделенных задач-теорем достаточно для решения планиметрических задач, взятых из школьных учебников, практики вступительных экзаменов в вузы и большинства олимпиадных задач.***

Материалы гл. 1 заимствованы из учебников [5] и [6]. В гл. 2 рассмотрены "азбучные" сведения курса. Без их знания систематизация невозможна.

Задачи-теоремы приведены в гл. 3. Гл. 4 содержит сто примеров их применения и практические советы. Большинство задач-примеров взято из популярных сборников [1] и [2] (читатель может совершенствовать отбор и систематизацию).

В гл. 5 рассмотрены основные методы решения планиметрических задач.

Содержимое гл. 6 – попытка приоткрыть процесс поиска решения геометрической задачи. Там же показан поиск различных решений одной задачи и поиск общей идеи решения разных задач. В гл. 7 содержатся более трудные задачи, при решении которых комбинировано применяются несколько задач-теорем.

Гл. 8 посвящена координатам, векторам и множествам точек плоскости.

В гл. 9 приведены примеры моделирования на планиметрическом материале.

Предполагается, что читатель знаком с основами программирования в среде Turbo Pascal, изучать которые изолированно от решения "непоставленных" задач малоэффективно. Задачи математики, физики, химии, биологии и др., в процессе решения которых необходимо пройти путь от постановки задачи и представления данных до получения и анализа результатов, интегрируют знания учащихся по информатике и другим предметам.

Все главы книги можно использовать и в процессе изучения планиметрии.

Это пособие – не решебник! Плодящиеся под девизом "Новому термину – "новое" качество" решебники предоставили новый вид работы – *критический анализ содержащихся в них решений*. В настоящем пособии уделено особое внимание культуре чертежей и вычислений, логике и способам решений, отбору и систематизации задач.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Краткий исторический очерк

Геометрия возникла из практических потребностей людей. При изготовлении орудий труда, строительстве жилищ у человека появилась необходимость определять форму и размеры предметов. Дошедшие до нас памятники материальной культуры и многочисленные письменные документы древности свидетельствуют о том, что уже около 4000 лет тому назад жители Древнего Египта и Вавилона обладали значительным запасом геометрических сведений.



Например, египетские пирамиды (гробницы фараонов) отличаются удивительной правильностью формы. Одно из самых грандиозных сооружений древности – пирамида Хеопса – имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой 150 м и боковым ребром 220 м. Ясно, что руководить их строительством могли лишь люди, располагавшие геометрическими знаниями.

В древнеегипетских папирусах, относящихся к 2000 – 1700 гг. до н.э., содержится решение ряда геометрических задач, причем некоторые из них решены безукоризненно. Вот одно из таких решений. "Сделать усеченную пирамиду (в папирусе она изображена в виде трапеции), если известно: 6 – высота, 4 – внизу, 2 – наверху. Поступай, как следует: возвысь в квадрат 4, что дает 16, удвой 4, что дает 8; далее возвысь в квадрат 2, что дает 4. К 16 прибавь 8 и 4, что даст 28. Далее возьми 1/3 от 6, что дает 2; далее возьми 28 дважды, что дает 56. Это есть 56. То, что хотели найти, – правильно". Если обозначить стороны оснований и высоту через *a, b, H*, то предложенное древнеегипетским математиком решение может быть записано с помощью формулы: $V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{H}{3}$. Эта

формула выражает совершенно точный способ вычисления объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями.



Заслуги в деле дальнейшего накопления и систематизации геометрических сведений принадлежат ученым Древней Греции.

Первые доказательства геометрических фактов связывают с именем ***Фалеса Милетского*** (639 – 548 гг. до н.э.). Ему приписывается доказательство признаков равенства треугольников, доказательство теоремы о равных отрезках, отсекаемых на двух прямых параллельными прямыми, и др.

Автором доказательств многих теорем называют ***Пифагора*** (564 – 473 гг. до н.э.). Впрочем, знаменитая "теорема Пифагора" была известна задолго до него. Остается неустановленным, кто впервые доказал эту теорему и какое доказательство было дано самим Пифагором (американский любитель математики Е. Лумис собрал и напечатал 367 различных доказательств этой замечательной теоремы – фундаментального соотношения евклидовой геометрии).



Пифагору приписывают доказательство теоремы о сумме внутренних углов треугольника, открытие правильных многогранников. Правильный звездчатый пятиугольник (пифагорейская звезда) был у пифагорейцев священным знаком, символом здоровья и радости, а также паролем. Пифагор ввел общеизвестный теперь дедуктивный метод. Пифагорейцы преобразовали давно известные практические правила в научные положения, обоснованные точными доказательствами. Главным содержанием пифагорейской математики есть учение о числе. Они первыми ввели четные и нечетные числа, простые и составные числа, дали несколько классификаций натуральных чисел.

В V и IV вв. до н.э. были предприняты попытки последовательного изложения геометрического материала в виде ряда утверждений, подкрепленных доказательствами (Пифагор, Демокрит,

Гиппократ Хиосский, Платон, Аристотель). ***Платоном*** и особенно ***Аристотелем*** была создана теория доказательств и разработаны общие принципы дедуктивного построения науки.



Первые работы по систематизации геометрии до нас не дошли: все они были забыты после появления в Александрии знаменитых "Начал" ***Евклида*** (около 300 г. до н.э.). Последовательность и строгость изложения сделали это произведение источником геометрических знаний во многих странах мира в течение более двух тысячелетий. Опираясь на созданные постулаты и аксиомы, используя законы формальной логики, Евклид доказывает 465 утверждений в 13 книгах. Его постулаты по существу представляют собой правила построений с помощью идеальной линейки и идеального циркуля. Под решением задачи понимаются такие построения. Для Евклида найти площадь или объем означало *построить циркулем и линейкой* квадрат или куб, равный данной фигуре. "Начала" завершались построениями пяти правильных многогранников, вписанных в сферу данного радиуса и исследованием полученных несоизмеримых величин.

Наиболее известен пятый постулат Евклида о параллельных прямых. Математики считали, что Евклид ошибся и, что его можно доказать как теорему. Много и настойчиво над тайной этого постулата рассуждал К.Ф. Гаусс. В 1826 г. Н.И. Лобачевский доказал логическую независимость пятого постулата от других постулатов и аксиом Евклида и то, что его нельзя доказать на их основе. Оказалось, что Евклид не ошибся. Евклид блестяще решил и методическое задание потому, что он писал научное пособие для учащихся своей школы, которое стало пособием для поколений учеников. До недавнего времени почти все школьные учебники геометрии были во многом сходны с "Началами".

Аксиоматическое построение геометрии оказало глубокое влияние на мыслителей всех времен. Подобное изложение, как идеальный образец изложения научных теорий, использовали позже И. Ньютон в своей основополагающей работе "Математические начала натуральной философии", Б. Спиноза, излагая основы этики.

Величайший математик древности ***Архимед*** (287 – 212 гг. до н.э.) углубил и дополнил теоретические положения Евклида. Архимед творил в "золотой век" геометрии, занимаясь вычислением площадей и объемов фигур. Решая многочисленные задачи, он прокладывал новые пути в математике. Среди открытий ученого отметим глубокую разработку вопросов, связанных с измерением длины окружности и площади круга, с вычислением объемов фигур, в том числе цилиндра и шара. Архимед завещал на надгробном камне изобразить шар, вписанный в цилиндр. Доказательство того, что объем этого шара составляет 2/3 объема цилиндра, явилось одним из его научных открытий.



Архимед погиб как патриот, защищая родной город Сиракузы от нападения римлян. Известно, что с помощью системы зеркал он на расстоянии полета стрелы сжигал римские корабли. Как инженер, ученый решал задачи строительной механики и кораблестроения. Архимед открыл закон обратно пропорциональной зависимости между силой и плечом рычага, закон про тело, погруженное в жидкость и др.

Современник Архимеда, ***Аполлоний Пергский***, написал обстоятельный трактат о конических сечениях: эллипсах, гиперболах и параболах. Несколько позже, во II в. до н.э. ***Гиппарх*** составил первую таблицу хорд, она заменяла применяющиеся сейчас таблицы синусов. Ряд работ, посвященных правилам вычислений в геометрии, появляется в I и II вв. до н.э. Так, в книге ***Герона*** из Александрии "Метрика" даны правила вычисления площадей и объемов. Таблица хорд, составленная математиком и астрономом Птолемеем, содержала длины хорд для углов от 0º до 180º с шагом 0,5º.

После гибели рабовладельческих государств древности, в средние века, центр передовой науки перемещается в страны Востока – в Среднюю Азию, арабские страны, Индию. В области математики арабы использовали достижения ученых Индии, Китая и труды античных авторов. К концу IX в. на арабский язык были переведены творения Евклида, Архимеда, Аполлония и др. В XII в. в связи с крестовыми походами в Европе возникает интерес к ма-

тематической культуре арабов. Бурное развитие техники, начавшееся в странах Западной Европы в XVI – XVII вв., привело к не менее значительным результатам в математике.



Но влияние "Начал" Евклида было столь фундаментальным, что никаких других формулировок геометрии не было предложено до Декарта. ***Рене Декарт*** (1596 – 1650), французский философ, математик, физик, физиолог, в своей "Геометрии" впервые ввел в математику переменные величины. Он рассматривал линии на плоскости как графики функций. У Декарта отрезки равносильны по свойствам действительным числам, которые выступали как отношения длин отрезков к единичному. Тем самым Декарт заложил основы *аналитической геометрии* плоскости. Он создал метод прямолинейных координат, что позволило выразить геометрические задачи алгебраически, вымостив путь к изучению высших плоских кривых и ньютоновскому анализу. Координаты резко повысили вычислительные возможности, соединив две великие области математики.

С именем Декарта связаны такие понятия, как координаты, произведение, парабола, лист, овал и др.

Переменные величины окончательно укоренились в математике благодаря работам ***Исаака Ньютона*** (1643 – 1727, Англия) и ***Готфрида Вильгельма Лейбница*** (1646 – 1716, Германия), завершивших создание основ дифференциального и интегрального исчисления. Математические открытия Декарта, Ньютона и Лейбница стали подлинной революцией в этой науке. С помощью новых разделов математики было легко найдено решение многих геометрических задач: о проведении касательной к произвольной кривой, о вычислении площадей и объемов различных фигур.

С XVII в. трудами французских ученых ***Дезарга*** и ***Паскаля*** положено начало новому направлению в геометрии, получившему в дальнейшем наименование *проективной геометрии*. Полутора столетиями позднее их соотечественник ***Гаспар Монж*** разработал метод изображения фигур с помощью ортогонального проектирования на две плоскости. Работы Монжа послужили основой технического черчения и *начертательной геометрии*.

С XVIII в. в России начинают печататься учебники и научные труды по геометрии. Разделы, посвященные геометрии, имелись в первом русском учебнике математики – "Арифметика" Л.Ф. Магницкого, вышедшем в 1703 г.



В России многие годы творил выдающийся ученый ***Леонард Эйлер*** (1707 – 1783). XVIII столетие вошло в историю как "эпоха Просвещения". Если до него были еще возможны такие всеобъемлющие гении, как Леонардо да Винчи или Г.В. Лейбниц, вобравшие в себя все накопленные человечеством знания, то, начиная с этого столетия, появляется все больше и больше ученых-специалистов, досконально владеющих отдельными научными дисциплинами. Но Эйлер воплотил научное сознание своего времени. Он является автором первостепенной важности открытий в различных разделах математического анализа, теории чисел, геометрии и механике. Почти во всех областях математики и ее приложений встречается имя Эйлера: теоремы Эйлера, тождества Эйлера, эйлеровские постоянные, углы, функции, интегралы, формулы, уравнения, подстановки. Один из наиболее известных геометрических результатов Эйлера также вошел в историю математики под его именем. Во всяком выпуклом многограннике сумма числа вершин B и числа граней $Г$ на две единицы больше числа его ребер P: $B + Г - P = 2$. В элементарной геометрии известны окружность Эйлера, прямая Эйлера и т.д.

Эйлеру принадлежат более 886 научных трудов. Статистические подсчеты показывают, что он в среднем делал одно открытие в неделю. По случаю 200-летия со дня рождения ученого в Швейцарии начато издание полного собрания его сочинений. Оно должно состоять из 72 больших томов по 600 страниц каждый.

Ученый прекрасно знал лучших писателей древнего мира, историю, языки (в том числе и русский), ботанику, химию, физику, анатомию, медицину. Своими знаниями он поражал специалистов из этих областей знаний. Эйлер с увлечением слушал музыку и написал трактат по математической теории музыки.

Благодаря исследованиям Эйлера и Монжа в XVIII в. возникает метод изучения свойств геометрических фигур, основанный на применении производной, – *дифференциальная геометрия*.