Брандт З.

Статистические методы анализа наблюдений

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Б87

Брандт З.

Б87 Статистические методы анализа наблюдений / Брандт З. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 312 с.

ISBN 978-5-458-31023-9

Книга представляет собой краткое введение в статистический анализ данных наблюдений и предназначена для лиц, не являющихся математиками, но которым в своей практической работе приходится иметь дело с использованием статистических методов обработки данных.Книга состоит из 12 глав и 6 небольших приложений. Первые главы посвящены краткому изложению основ теории вероятностей и математической статистике, В последующих главах изложены вопросы статистики, чаще всего встречающиеся в приложениях: метод максимального правдоподобия, статистическая проверка гипотез, метод наименьших квадратов, дисперсионный анализ, линейная регрессия. В приложениях собраны элементы программирования на ФОРТРАНе, основные формулы матричного исчисления, комбинаторный анализ и наиболее употребительные формулы и таблицы. В книге имеется много иллюстраций и численных примеров, ее легко читать даже лицам, впервые встречающимся с математической статистикой. Она, несомненно, принесет большую пользу широкому кругу читателей, сталкивающихся со статистическим анализом данных.

ISBN 978-5-458-31023-9

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В связи с резким увеличением за последние годы применений математики в самых различных областях исследований заметно возросла потребность в руководствах по прикладной статистике. Этим вопросам и посвящена предлагаемая в русском переводе советскому читателю книга Брандта «Статистические методы анализа наблюдений». Книга рассчитана на геофизиков, физиков, экономистов, биологов, медиков и других специалистов, имеющих дело с практическим использованием статистических методов при обработке наблюдений.

Автор не приводит строгих математических доказательств формулируемых им утверждений. При рассмотрении различных статистических задач упор сделан, скорее, на рецептурную сторону рассматриваемых вопросов, Вместе с тем, нельзя назвать эту книгу просто сборником формул и статистических правил, так как автор уделяет большое внимание выяснению наглядного смысла статистических понятий и методов и их иллюстрации на многочисленных примерах. Из имеющихся на русском языке руководств по прикладной статистике книга Брандта несколько похожа на книгу Д. Худсона «Статистика для физиков», М., «Мир», 1970 г. и на книгу Л. З. Румшисского «Математическая обработка результатов наблюдений», М., «Наука», 1971 г. Однако в отличие от перечисленных книг она охватывает более широкий круг статистических задач, и, главное, в ней гораздо больше внимания уделено вычислительной стороне рассматриваемых методов. В частности, для многих статистических формул приведены вычислительные программы на ФОРТРАНе, а в приложении изложены основные сведения по программированию на ФОРТРАНе.

Изложение материала в книге Брандта является доступным даже для тех, кто впервые сталкивается с математической статистикой. Книга снабжена большим количеством иллюстраций и численных примеров. Поэтому она позволяет читателю ознакомиться с основами математической статистики, так сказать, «с минимальной затратой энергии». Для более глубокого ознакомления с методами математической статистики в форме, доступной для прикладников, можно рекомендовать книгу Ван дер Вардена «Математическая статистика», М., ИЛ., 1960 г.

Следует отметить, что в книге Брандта рассмотрены лишь наиболее важные статистические методы, чаще всего используемые на практике, такие, как метод максимального правдоподобия, метод наименьших квадратов, статистическая теория проверки гипотез, дисперсионный анализ, линейная регрессия и т. д.

В конце книги приводится сводка основных статистических формул и наиболее употребительные статистические таблицы. Благодаря этому книга может служить не только введением в прикладную статистику, но и удобным кратким статистическим справочником. Думается, что книга принесет пользу широкому кругу специалистов не только как практическое руководство по применению статистики, но и, возможно, как ступень для более глубокого овладения статистическими методами, освещенными в специальных монографиях.

При переводе на русский язык были устранены некоторые опечатки и неточности, имеющиеся в оригинале.

В. Ф. Писаренко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга основана на лекциях, прочитанных в 1967/1968 г. студентам-физикам и специалистам по физике элементарных частиц Гейдельбергского университета. В ней обсуждаются разделы математической статистики, наиболее полезные для анализа наблюдений. Книга предназначена для студентов и научных работников в области естественных наук, медицины, техники и экономики, сталкивающихся с проблемой обработки экспериментальных данных.

Книга рассчитана на читателя, которому нужно применять методы математической статистики. Математическая строгость не преследовалась, однако это не просто список рекомендаций для различных практических приложений, а попытка объяснить идеи и принципы обсуждаемых статистических методов. Часть материала, представленного в книге, основана на лекциях и обзорных статьях, написанных физиками и для физиков [2, 15, 22].

Основные сведения из анализа читателю предполагаются известными. Другой необходимый математический аппарат, в частности теория вероятностей, кратко изложен в книге. Существенная особенность изложения состоит в использовании матричных обозначений, позволяющих компактно изложить многие вопросы, например метод наименьших квадратов. Основы матричного исчисления даны в приложении.

Наиболее сложные задачи анализа наблюдений решаются сейчас с помощью ЭВМ; для нескольких таких задач в книге приведены программы, написанные на ФОРТРАНе. В приложении даны основные сведения о ФОРТРАНе. Там же приведена краткая библиотека подпрограмм для оперирования с матрицами, составленная на основе программ, написанных Бёком в ЦЕРНе (Женева).

Предполагается, что эта книга послужит не только введением в статистический анализ, но и будет использоваться в повседневной работе. Поэтому в книге содержится несколько статистических таблиц и сводка наиболее важных формул, с тем чтобы их можно было быстро найти.

Мне бы хотелось выразить благодарность проф. Филтусу за проявленный интерес к этой теме, что послужило толчком к

чтению курса лекций. Я благодарен группе моих коллег по Гейдельбергскому университету: д-рам Бендеру, Брокейту, Гизеке, Роте и Шнейдеру за обсуждение книги и в особенности д-ру Шаху за прочтение рукописи и внесение большого числа полезных замечаний и улучшений. Хочется поблагодарить также д-ра Теннера (Амстердам) за плодотворные советы по расположению материала в книге. Примеры 8.2, 11.1 и 11.2 принадлежат д-ру Иммичу (Гейдельберг). Гравюру для титульного листа сделал д-р Френк (Ветцлар).

Примеры и статистические таблицы напечатаны на ЭВМ IBM-360. Рис. 5.8 выполнен с помощью графопостроителя по программе, написанной д-ром Шнейдером.

З. Брандт

Гейдельберг, январь 1970 г.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

В любой отрасли экспериментальной науки вслед за более ранней стадией качественного описания интересующего нас явления следует стадия его количественного изучения, т. е. измерения. Наряду с планированием и проведением эксперимента важной задачей является точная оценка получаемых данных и полное их использование. Перечислим несколько типичных проблем.

1. Изучается воздействие различных средств на увеличение веса в группе подопытных животных. После применения вещества А к 25 животным наблюдалось среднее увеличение веса на 5%. Вещество В, применявшееся к 10 животным, дало увеличение веса на 3%. Является ли средство А более эффективным? Средние цифры 5 и 3% практически не дают ответа на этот вопрос, так как меньшая цифра могла быть вызвана влиянием какого-то одного животного с самым маленьким весом. Следовательно, необходимо изучить *распределение* весов животных и их отклонения от среднего значения. Кроме того, надо решить, позволит ли количество взятых для испытания животных с определенной точностью различить эффекты от применяемых веществ.

2. В экспериментах по выращиванию кристаллов основной проблемой является поддержание точного соотношения между различными компонентами. Из группы, содержащей 500 кристаллов, отбираются и анализируются 20 кристаллов. Какие выводы можно сделать относительно остальных 480 кристаллов? Такая задача *выборки* возникает, например, при контроле на производстве, при испытании на надежность автоматических измерительных устройств, при опросе общественного мнения.

3. Получен некоторый экспериментальный результат. Требуется выяснить, не противоречит ли он уже известному теоретическому значению или ранее проведенным экспериментам? Тем самым эксперимент используется для *проверки гипотезы*.

4. Известен общий вид закона, выражающего зависимость между измеряемыми величинами; необходимо получить из эксперимента значения параметров этого закона. Например, при радиоактивном распаде число N атомов, распадающихся за секунду, убывает во времени по экспоненциальному закону $N(t) =$

$=\text{const} \times \exp(-\lambda t)$. Постоянная распада λ и ошибка ее измерения должны быть определены с помощью нескольких наблюдений $N_1(t_1)$, $N_2(t_2)$, ... Эта проблема *оценивания параметра*, возможно, является наиболее интересной для многих экспериментаторов.

Все эти примеры иллюстрируют характерные особенности анализа данных. В частности, мы видим, что исход эксперимента не однозначно определяется условиями его проведения, а содержит элемент случайности, т. е. является *случайной величиной*. Эта стохастическая тенденция лежит либо в природе эксперимента (подопытные животные неизбежно различны, радиоактивность является случайным явлением), либо в неизбежных погрешностях, вносимых применяемым оборудованием, т. е. в ошибках измерения. По этой причине следующая глава посвящена обзору наиболее важных понятий теории вероятности.

В 3-й и 4-й главах вводится понятие случайной величины. Рассматривается распределение случайной величины и параметры, которыми оно характеризуется, такие, например, как среднее значение и дисперсия. Особое внимание уделяется рассмотрению зависимости нескольких случайных величин. В гл. 5 изучаются распределения, представляющие специальный интерес для приложений; в частности, подробно рассматриваются свойства нормального, или гауссовского, распределения.

На практике распределение должно быть определено с помощью конечного числа наблюдений, т. е. *выборки*. Различные случаи выборочных процедур рассматриваются в гл. 6. Функции от выборки, т. е. функции от отдельных наблюдений, могут быть использованы для оценки параметров, характеризующих распределение. Выводятся требования, которым должна удовлетворять хорошая выборочная оценка. На этом этапе вводится величина χ^2, являющаяся мерой среднего отклонения отдельных наблюдений из выборки от среднего значения и, следовательно, служащая показателем качества измерений.

Метод наибольшего правдоподобия, рассмотренный в гл. 7, составляет ядро современного статистического анализа. Он позволяет строить оценки с оптимальными свойствами. Метод рассмотрен для случаев одного и нескольких параметров и иллюстрирован рядом примеров.

Глава 8 посвящена способам проверки гипотез. Она содержит наиболее часто используемые критерии F, t и χ^2 и основные сведения из теории.

В гл. 9 предметом обсуждения является *метод наименьших квадратов* — наиболее широко применяемый статистический метод. Сначала подробно рассмотрены частные случаи прямых и косвенных измерений, а также измерений со связями, которые часто встречаются на практике. Затем обсуждается общий случай. Для общей задачи о наименьших квадратах приведена программа на

ФОРТРАНе, и ее применение проиллюстрировано серией примеров. Любую задачу о наименьших квадратах можно свести к задаче о нахождении минимума функции нескольких переменных. Это же верно и для оценивания параметров методом наибольшего правдоподобия. В гл. 10 кратко описаны несколько вычислительных методов нахождения таких минимумов.

Дисперсионный анализ (гл. 11) можно рассматривать как обобщение F-критерия. Он широко используется в биологии и медицине для изучения зависимости или, точнее, для проверки независимости измеряемых величин от условий эксперимента, характеризуемых другими переменными. Для нескольких переменных возникают довольно сложные ситуации. С помощью программы на ФОРТРАНе посчитано несколько простых численных примеров.

Линейная *регрессия*, рассматриваемая в последней главе, представляет собой специальный случай метода наименьших квадратов и поэтому встречается уже в гл. 9. До появления вычислительных машин обычно поддавались решению лишь линейные задачи наименьших квадратов. В линейной регрессии все еще используется специальная терминология, что оправдывает выделение этого вопроса в отдельную главу. В то же время гл. 10 является развитием гл. 9. Так, например, определяются доверительные интервалы для решения и изучаются соотношения между регрессией и дисперсионным анализом.

ГЛАВА 2

ВЕРОЯТНОСТИ

2.1. ЭКСПЕРИМЕНТЫ, СОБЫТИЯ, ВЫБОРОЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Так как эта книга посвящена анализу данных, получаемых из эксперимента, нам необходимо сначала выяснить, что понимается под экспериментом и его результатом. Аналогично лабораторному опыту мы определяем эксперимент как строгую последовательность заранее определенных действий, ведущих к получению одной или множества величин, представляющих результат эксперимента. Эти величины могут изменяться непрерывно (температура, длина, электрический ток) или дискретно (число частиц, день рождения человека, один из трех возможных цветов). Независимо от точности выполнения условий, при которых проводится эксперимент, результаты повторных экспериментов будут, вообще говоря, различны. Это вызывается либо внутренней природой исследуемого явления, либо ограниченной точностью измерения. Следовательно, для каждой величины возможные результаты будут лежать в некоторой ограниченной области. Множество этих областей для всех величин, составляющих результат эксперимента, образует *выборочное пространство* этого эксперимента. Так как точное определение допустимых областей для всех величин, измеряемых в данном эксперименте, затруднительно и часто вообще невозможно, фактически пространство выборок берется несколько бóльшим, содержащим истинное выборочное пространство в качестве подпространства. В дальнейшем мы будем пользоваться этим более широким определением выборочного пространства.

Пример 2.1. При изготовлении сопротивлений важно выдержать заданные значения величин R (электрическое сопротивление, измеряемое в омах) и N (максимальное рассеяние мощности, измеряемое в ваттах). Выборочным пространством для R и N может служить координатная плоскость с осями R и N. Так как обе величины всегда положительны, то первый квадрант также является выборочным пространством.

Пример 2.2. На практике точные значения R и N несущественны, пока они находятся в заданных интервалах (например, 99 кОм $< R <$ 101 кОм; 0,49 Вт $< N <$ 0,60 Вт). В таких случаях будем говорить, что сопротивление обладает свойствами

R_n, N_n. Если значение выходит за нижнюю или верхнюю границу интервала, то индекс n будем заменять соответственно на — или +. Следовательно, возможные значения электрического сопротивления и рассеянной мощности будут соответственно R_-, R_n, R_+ и N_-, N_n, N_+. Выборочное пространство состоит в этом случае из 9 элементов:

$$\begin{array}{lll} R_-N_-, & R_-N_n, & R_-N_+, \\ R_nN_-, & R_nN_n, & R_nN_+, \\ R_+N_-, & R_+N_n, & R_+N_+. \end{array}$$

Часто представляют интерес некоторые подпространства выборочного пространства. Например, элемент пространства выборок R_nN_n из примера 2.2 соответствует случаю, когда сопротивление полностью удовлетворяет техническим условиям. Обозначим такие подпространства A, B, ... и будем говорить, что если результат эксперимента попал внутрь какого-либо подпространства, то произошло соответствующее событие A (или B, C, ...). Если событие A не произошло, мы будем говорить об осуществлении *дополнительного* события $\bar{A}$ (не A). Все выборочное пространство соответствует событию, которое осуществляется в каждом эксперименте. Обозначим его через E. В конце этой главы мы определим, что́ понимается под вероятностью осуществления события.

2.2. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим простейший эксперимент — бросание монеты. Как и подобные ему эксперименты с игральными костями и картами, он не представляет практического интереса, но весьма полезен для целей обучения. Какова вероятность того, что при первом бросании идеальной монеты выпадет «орел»? Интуиция подсказывает нам, что эта вероятность равна $\frac{1}{2}$. Мы исходим из того, что все точки выборочного пространства (здесь мы имеем только две точки: «орел» и «решка») равновероятны и событие E (в данном случае заключающееся в выпадании «орла» *или* «решки») наступает с вероятностью 1. Этот способ определения вероятности может быть применен лишь в случае абсолютно симметричных экспериментов и, следовательно, имеет очень малое практическое применение. (Однако он крайне важен в статистической физике и квантовой механике, где постулат о равных вероятностях всех допустимых состояний является основой весьма успешных теорий.)

Если же абсолютная симметрия отсутствует — например, в случае обычной «физической» монеты, — то целесообразно поступить следующим образом. Пусть в большом числе экспериментов

N событие A имело место n раз. Определим вероятность появления события A как предел

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N}. \tag{2.1}$$

Это несколько неточное *частотное определение* вероятности удобно для практических целей, хотя оно и не является математически строгим. Одна из трудностей, возникающих при таком определении, заключается в необходимости проведения бесконечного числа экспериментов, что, естественно, невозможно сделать и теоретически трудно объяснить. Хотя фактически в этой книге мы будем пользоваться частотным определением вероятности, хотелось бы привести основные понятия аксиоматической теории вероятности, принадлежащей Колмогорову [12]. Обычно используется следующий минимальный набор аксиом:

а) Каждому событию A соответствует некоторое неотрицательное число — его вероятность

$$P(A) \geqslant 0. \tag{2.2}$$

б) Событие E имеет вероятность, равную единице:

$$P(E) = 1. \tag{2.3}$$

в) Если события A и B *несовместны*, то вероятность наступления события A *или* B, т. е. события $(A + B)$, равна

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{2.4}$$

Из этих аксиом сразу получаются следующие полезные соотношения. Из (б) и (в)

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1; \tag{2.5}$$

кроме того, из (а)

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \tag{2.6}$$

Из (в) можно легко получить более общую теорему для взаимно несовместных событий A, B, C, ...

$$P(A + B + C + \cdots) = P(A) + P(B) + P(C) + \cdots \tag{2.7}$$

Необходимо заметить, что единственным способом комбинирования событий является уже упоминавшееся *исключающее «или»*. Любая другая комбинация должна быть получена с помощью этой логической операции. В эксперименте с бросанием игральной кости событие A может означать выпадание четного числа очков, B — нечетного числа очков, C — выпадание менее 4-х очков и D — 4-х или более очков. Представляет интерес вероятность события (A *или* C) (A и C, очевидно, не являются несов-