

Н. Лобачевский

**Новыя начала геометрии с
полной теорией параллельных**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н. Лобачевский**
Новые начала геометрии с полной теорией параллельных / Н. Лобачевский –
М.: Книга по Требованию, 2013. – 50 с.

ISBN 978-5-458-56756-5

ISBN 978-5-458-56756-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

принадлежности, также какъ и всѣ вообще свойства многоугольника. Ясно, что послѣдній изъ боковъ съ его наклоненіями къ двумъ сосѣднимъ въ многоугольникѣ, опредѣляется величиною всѣхъ другихъ угловъ и боковъ.

Составленіе многоугольниковъ, изъ его боковъ съ углами по порядку, приводитъ такимъ образомъ къ предложеніямъ.

Многоугольники одинаковы, когда въ числѣ всѣхъ n боковъ будутъ $n - 1$ равныхъ съ $n - 2$ углами при нихъ.

Многоугольники одинаковы, когда въ числѣ всѣхъ n боковъ, $n - 2$ равныхъ съ $n - 1$ углами при нихъ.

О треугольникахъ, прямолинейныхъ и сферическихъ, въ особенности должно сказать.

Треугольники одинаковы, когда два бока съ угломъ между ними равны.

Треугольники одинаковы, когда боки съ углами при немъ равны.

Отсюда слѣдуетъ.

Прямоугольные треугольники одинаковы, когда катеты равны, потому что равенство прямыхъ угловъ подразумѣвается.

Прямоугольные треугольники одинаковы, когда катетъ и при немъ уголъ равны.

Въ кругѣ противъ равныхъ хордъ углы равны, потому что равенство полупоперечниковъ дополняетъ здѣсь одинаковость треугольниковъ.

32. Прямолинейные треугольники одинаковы, когда три бока равны.

Въ треугольникахъ ABC , $A'B'C'$ (чер. 76) предполагаемъ бока $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$. Пусть AC тотъ изъ нихъ, при которомъ углы A, B острые (ст. 49). Прикладываемъ $\triangle A'B'C'$ къ $\triangle ABC$, бокомъ $A'B'$ къ равному съ нимъ AB , точкой A' въ A , B' въ B . Соединяемъ теперь острия C, C' линіей, которая должна проходить между концовъ A, B перпендикулярно къ боку AB , потому что служить основаніемъ въ двухъ равнобедренныхъ треугольникахъ ACC' , BCC' , гдѣ бокъ AB проходитъ чрезъ вершины (ст. 52). Въ треугольникахъ ACB , $AC'B$ углы при точкахъ C, C' равны, составляясь изъ рав-

ныхъ частей (ст. 50), слѣдовательно самыя треугольники одинаковы (ст. 31); это значитъ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

83. *Сферическіе треугольники одинаковы, когда три бока равны.*

Въ треугольникахъ ABC , $A'B'C'$ (чер. 77) полагаемъ бока $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Прикладываемъ $\triangle A'B'C'$ къ $\triangle ABC$, точкой A' въ A , B' въ B , потомъ острія C, C' соединяемъ дугою, которая пусть пересѣкаетъ бокъ AB . Составятся два равнобедренныхъ треугольника ACC' , BCC' , гдѣ при точкахъ C, C' углы равны (ст. 64), слѣдовательно въ треугольникахъ ACB , $AC'B$ тоже; какъ и всякой разъ, будетъ ли дуга проходить внутри треугольниковъ, или внѣ (чер. 78), или наконецъ сливаясь съ однимъ изъ боковъ (чер. 79). Во всѣхъ случаяхъ дѣлается $\triangle ABC \cong \triangle ABC' \cong \triangle A'B'C'$ (ст. 31).

84. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда равны два бока съ угломъ противъ большаго.*

Пусть въ треугольникахъ ABC , $A'B'C'$ (чер. 80) бока $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $AC > BC$, углы $B = B'$. Полагаемъ $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ меньшимъ бокомъ $B'C'$ на BC , точкой B' въ B , C' въ C . Тогда бокъ $A'B'$ слѣдуя направленію BA долженъ окончиться въ A , потому что точка A' не можетъ быть ни по ту,

ни по другую сторону. Иначе составилъ бы $\triangle A C A'$ равнобедренной съ острыми углами при основаніи $A A'$, изъ которыхъ къ одному смежной тупой принадлежалъ бы треугольнику $A B C$, либо треугольнику $A' B C$, гдѣ былъ бы вмѣстѣ самымъ большимъ угломъ (ст. 49), тогда какъ онъ лежитъ противъ меньшаго бока $B C$, либо $B' C'$ (ст. 54).

Отсюда слѣдуетъ, что *прямоугольные треугольники одинаковы, когда катетъ и гипотенуза равны*, потому что прямой уголъ не только равенъ, но лежитъ еще противъ большаго бока.

85. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда равны два бока съ угломъ противъ меньшаго; при томъ оба треугольники вмѣстѣ остроугольные, либо тупоугольные.*

Пусть въ треугольникахъ $A B C$, $A' B' C'$ (чер. 81) бока $A C = A' C'$, $B C = B' C'$, $A C > B C$, углы $A = A'$. Должно предполагать углы: либо всѣ острые, либо которой нибудь тупой, а два другихъ острые. Въ первомъ случаѣ треугольники покрываютъ другъ друга, когда переносимъ точкой A' въ A , C' въ C . Третья B' не можетъ помѣщаться ни между двухъ A, B , ни по другую сторону B на продолженіи $A B$. Иначе произошелъ бы треугольникъ $C B B'$ равнобедренной съ острыми углами при основаніи $B B'$, изъ которыхъ

одинъ былъ бы смѣжной съ тупымъ либо въ $\triangle ABC$, либо въ $\triangle AB'C$.

Если въ треугольникахъ ABC , $A'B'C'$ одинъ уголъ тупой, такъ онъ долженъ быть противъ самаго большаго бока, слѣдовательно либо противъ $AC=A'C'$, либо противъ AB и $A'B'$. Въ томъ и другомъ случаѣ при наложеніи треугольниковъ точка B' не можетъ приходить въ другое мѣсто, кромѣ B , чтобы не составилъ равнобедренной треугольникъ BCB' , въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ принадлежитъ либо треугольнику ABC противъ AC , либо треугольнику $AB'C$ противъ AC , либо производитъ смѣжной уголъ тупой въ данномъ треугольникѣ, сверхъ тупаго угла при точкахъ C, C' .

Итакъ если треугольники ABC , $A'B'C'$ не должны быть одинаковы, хотя въ нихъ бока $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, $\angle A=\angle A'$, то разность ихъ произойти можетъ отъ того только, что въ одномъ противъ большаго бока тупой уголъ, тогда какъ въ другомъ острый. Пусть напримѣръ уголъ $B < \frac{1}{2}\pi$ въ $\triangle ABC$, тогда какъ $AC > BC$. Описывая кругъ около C поперечникомъ CB , находимъ еще точку B пересѣченія между концовъ A, B (ст. 51). Такъ составитъ треугольникъ $AB'C$, который долженъ быть одинаковъ съ $\triangle A'B'C'$ и гдѣ слѣдовательно B' тупой уголъ.

86. *Сферическіе треугольники одинаковы, когда равны два бока съ угломъ противъ равныхъ боковъ, но подъ условіемъ, чтобъ углы противъ другихъ равныхъ боковъ были въмѣстѣ $< \frac{1}{2}\pi, = \pi, > \frac{1}{2}\pi$.*

Пусть въ треугольникахъ ABC , $A'B'C'$ (чер. 82) бока $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$. Поперечникомъ BC чертимъ на сферѣ кругъ около точки B . Онъ можетъ коснуться дуги AC въ одной только точкѣ C , либо кромѣ C пересѣкаться еще въ одной той же кругъ, котораго AC составляетъ часть (ст. 66). Въ первомъ случаѣ BC перпендикулярна къ AC , также какъ и въ $\triangle A'B'C'$ бокъ $B'C'$ къ $A'C'$. Въ другомъ случаѣ, будетъ ли точка пересѣченія C между концовъ $A'C$ или въ C'' на продолженіи AC чрезъ острѣе C , всегда произойдетъ равнобедренной треугольникъ BCC' или BCC'' , гдѣ углы при основаніи равны. Далѣе треугольникъ ABC не можетъ быть одинаковъ съ $\triangle A'B'C'$, потому что когда уголъ $B'C'A' = B'CA$, то $\angle B'C'A' + \angle B'CA = \angle B'C'A + \angle B'CA = \pi$. Треугольникъ $A'B'C'$ также не можетъ быть одинаковъ съ $\triangle ABC$, потому что какъ скоро $\angle B'C'A' = \angle B'C'A$, то $\angle B'C'A' + \angle B'CA = \angle B'C'A + \angle B'CA = \pi$. Остается необходимой одинаковость только треугольниковъ $A'B'C'$ съ ABC .

Отсюда слѣдуетъ *одинаковость треугольниковъ, когда равны два бока съ угломъ прямымъ или ту-*

пымъ противъ одного изъ этихъ боковъ, которыхъ сумма предполагается меньше полукруга, потому что противъ другаго бока въ обоихъ треугольникахъ долженъ быть острый уголъ (ст. 74).

87. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда равны бокъ, при немъ уголъ и другой противъ него.*

Пусть въ треугольникахъ ABC , $A'B'C'$ (чер. 83) бокъ $AC = A'C'$, углы $A = A'$, $B = B'$. Когда переносимъ $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ равными боками $AC = A'C'$, точкой A' въ A , то бокъ $A'B'$ пойдётъ по направлению AB и долженъ окончиться въ точкѣ B . Иначе составитъ треугольникъ BCB' , гдѣ одинъ изъ равныхъ угловъ B, B' будетъ при линіи BB' внутренній, а другой внѣшній, которой однакожъ всегда болѣе внутренняго (ст. 53).

Итакъ *прямоугольные треугольники одинаковы, когда равны гипотенуза съ однимъ острымъ угломъ, либо катетъ съ противоположнымъ угломъ, потому что равенство прямыхъ угловъ дополняетъ одинаковость.*

88. *Сферическіе треугольники одинаковы, когда въ нихъ равны: бокъ, при немъ уголъ и другой про-*

тивъ него, подѣ условіемъ, чтобы сумма двухъ другихъ боковъ противъ равныхъ угловъ не составляла полкруга.

Пусть въ треугольникахъ ABC , $A'B'C'$ (чер. 84) бокъ $AB = A'B'$, углы $A = A'$, $C = C'$. Когда полагаемъ $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ равными боками $A'B'$ на AB , то бокъ $A'C'$ начинаясь въ A , пойдетъ по AC и не можетъ оканчиваться ни въ C' по сю, ни въ C'' по ту сторону точки C на продолженіи AC . Иначе составитъ либо треугольникъ $BC C'$, либо $BC C''$, гдѣ по равенству угловъ внѣшняго съ внутреннимъ при дугѣ AC' надобно, чтобы сумма противоположныхъ боковъ, слѣдовательно $BC + B'C'$, составляла π (ст. 74).

Если при томъ уголъ $C = \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно $C' = \frac{1}{2}\pi$, то треугольники $BC C'$, $BC C''$ дѣлаясь равнобедренными, требуютъ, чтобы $BC = B'C' = \frac{1}{2}\pi$, также $AB = A'B' = \frac{1}{2}\pi$, наконецъ уголъ $A = A' = \frac{1}{2}\pi$ (ст. 62). Итакъ *прямоугольные сферическіе треугольники одинаковы, когда равны гипотенуза съ однимъ острымъ угломъ.*

89. *Сферическіе треугольники одинаковы съ тремя равными углами.*

Пусть въ треугольникахъ ABC , $A'B'C'$ (чер.

85) углы $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Это предполагает поверхности треугольниковъ равныя (ст. 68), слѣдовательно когда переносимъ $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ боками двухъ равныхъ угловъ, напримѣръ угловъ A, A' , то неодинаковость треугольниковъ требуетъ, что бы каждой выходилъ частію вонъ изъ другаго. Пусть $A'B' < AB$, слѣдовательно $A'C' > AC$, такъ что $B'C'$ начинаясь на боку AB внутри треугольника пересѣкаетъ BC въ точкѣ D , потомъ уже въ точкѣ C' встрѣчаетъ продолженіе AC за точку C . Произойдутъ два треугольника BDB' , $CD C'$, гдѣ $BD + B'D = \pi$, $CD + C'D = \pi$ (ст. 74), слѣдовательно $BC + B'C' = 2\pi$; но какъ $BC, B'C'$ вмѣстѣ съ угломъ A должны быть либо $< \pi$, либо $= \pi$, либо $> \pi$ (ст. 46), то можно допускать только $BC = B'C' = \pi$. Однакожъ и въ этомъ послѣднемъ случаѣ треугольники $ABC, A'B'C'$ дѣлаясь вырѣзками сферы, бываютъ одинаковы при равенствѣ плоскостныхъ угловъ.

90. Въ прямолинейномъ треугольникѣ сумма всѣхъ угловъ не можетъ быть $> \pi$.

Называемъ въ треугольникѣ сумму всѣхъ угловъ S . Въ случаѣ неравенства полагаемъ A самой меньшей или вообще не болѣе двухъ другихъ. Мы видѣли (ст. 53), что всякой треугольникъ ABC (чер. 46) можетъ быть обращенъ въ другой AFC , гдѣ сумма всѣхъ угловъ остается таже, тогда какъ сумма кото-

14 НОВЫЯ НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИ И ПРОЧ.—(ЛОВАЧЕВСКАГО.)

рыхъ нибудь двухъ $ABC + ACB$ изъ перваго треугольника, составляетъ одинъ уголъ ACF въ новомъ, слѣдовательно третій BAC переходитъ сюда раздѣляясь на два AFC, FCA . Итакъ пусть ABC тотъ самой треугольникъ, гдѣ сумма всѣхъ угловъ S ; затѣмъ уголъ $BAC = A$ не болѣе двухъ другихъ. Въ новомъ треугольникѣ AFC сумма всѣхъ угловъ опять S ; одинъ изъ угловъ при точкахъ A, F долженъ быть $\leq \frac{1}{2} A$. Между тѣмъ въ треугольникѣ ACF

$$\begin{aligned} S &= \angle ACF + \angle FCA + \angle AFC \\ &= \pi - \angle FCD + A \\ &< \pi + A \end{aligned}$$

Раздѣляя въ послѣднемъ треугольникѣ бокъ пополамъ противъ угла $\leq \frac{1}{2} A$, и продолжая такимъ образомъ все превращать одинъ треугольникъ въ другой, должны заключить вообще, что

$$S < \pi + 2^{-n} \cdot A$$

гдѣ n цѣлое положительное число можетъ быть какъ угодно велико, съ этимъ вмѣстѣ $2^{-n} \cdot A$ какъ угодно мало; послѣ чего нельзя допускать чтобъ $S - \pi$ былъ какой нибудь положительной уголъ, но дозволяется только принимать или $S = \pi$, или $S < \pi$.