

Марков Андрей Андреевич

**Исчисление конечных разностей
А. Марков**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
А65

А65 **Андрей Андреевич М.**
Исчисление конечных разностей А. Марков / Марков Андрей Андреевич – М.: Книга
по Требованию, 2023. – 126 с.

ISBN 978-5-519-95457-0

ISBN 978-5-519-95457-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг — не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель — вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания — решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ГЛАВА I.

0 формулахъ интерполірованія.

§ 1. Задачу интерполирования въ довольно общемъ видѣ можно поставить такъ.

Для некоторой функции $f(z)$ вычислены, соответственно данным значениям z :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m,$$

значенія самой функціи и нѣсколькихъ ея послѣдовательныхъ производныхъ:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} f(a_1), & f(a_2), & f(a_3), & . . . , & f(a_{m-1}), & & f(a_m) \\ f'(a_1), & f'(a_2), & f'(a_3), & . . . , & f'(a_{m-1}), & & f'(a_m) \\ f''(a_1), & f''(a_2), & f''(a_3), & . . . , & f''(a_{m-1}), & & f''(a_m) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f^{\alpha_1-1}(a_1), & f^{\alpha_2-1}(a_2), & f^{\alpha_3-1}(a_3), & \dots, & f^{\alpha_{m-1}-1}(a_{m-1}), & & f^{\alpha_m-1}(a_m) \end{array} \right\} (1).$$

Требуется воспользоваться этими числами для вычисления $f(z)$ при некотором новом значении z :

$$z = x.$$

Такая постановка вопроса заключаетъ въ себѣ много неопредѣ-
леннаго и оставляетъ мѣсто для произвола.

Изъ различныхъ способовъ пользоваться данными (1) мы раз-
смотримъ только одинъ.

Онъ состоитъ въ томъ, что подбираютъ цѣлую функцію $F(z)$ наи-
низшей степени, которая удовлетворяла бы условіямъ:

$$\left. \begin{aligned} F(a_1) &= f(a_1), & F(a_2) &= f(a_2), & \dots &, & F(a_m) &= f(a_m) \\ F'(a_1) &= f'(a_1), & F'(a_2) &= f'(a_2), & \dots &, & F'(a_m) &= f'(a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F^{\alpha_1-1}(a_1) &= f^{\alpha_1-1}(a_1), & F^{\alpha_2-1}(a_2) &= f^{\alpha_2-1}(a_2), & \dots &, & F^{\alpha_m-1}(a_m) &= f^{\alpha_m-1}(a_m) \end{aligned} \right\} (2).$$

и затѣмъ полагаютъ приближенно

$$f(x) = F(x) \quad (3).$$

Подобныя приближенныя равенства называются **формулами интер-
полированія**.

Здѣсь представляются двѣ задачи: надо, во первыхъ, **найти фор-
мулу интерполированія** и, во вторыхъ, **оцѣнить погрѣшность** ея.

§ 2. Приступая къ опредѣленію функціи $F(z)$, прежде всего
важно замѣтить, что система (2) содержитъ

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$$

условій.

Соотвѣтственно этому, обозначая для краткости сумму

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$$

буквою n , полагаемъ $F(z)$ равною нѣкоторой цѣлой функціи $n - 1$ ^ю
степени относительно z :

$$F(z) = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots + P_{n-1} z^{n-1}.$$

Тогда число неизвѣстныхъ коэффициентовъ

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$$

будетъ равно числу условій (2) и эти послѣднія приведутся къ системѣ
и уравненій первой степени относительно неизвѣстныхъ

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}.$$

Если же искомую нами цѣлую функцію представимъ въ слѣдую-
щемъ видѣ

$$\begin{aligned} Q_0 &+ Q_{\alpha_1}(z-a_1)^{\alpha_1} + \dots + Q_{n-\alpha_m}(z-a_1)^{\alpha_1} \dots (z-a_{m-1})^{\alpha_{m-1}} \\ + Q_1(z-a_1) &+ Q_{\alpha_1+1}(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2) + \dots \\ + Q_2(z-a_1)^2 &+ Q_{\alpha_1+2}(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^2 + \dots \\ &\dots \\ + Q_{\alpha_1-1}(z-a_1)^{\alpha_1-1} + \dots + Q_{n-1}(z-a_1)^{\alpha_1} \dots (z-a_{m-1})^{\alpha_{m-1}}(z-a_m)^{\alpha_m-1} \end{aligned}$$

то можно будетъ легко опредѣлять неизвѣстныя

$$Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$$

по порядку одно за другимъ: стоитъ только разсматривать въ системѣ
(2) послѣдовательно сначала условія перваго столбца, затѣмъ втораго,
третьяго и т. д.

Пусть напримѣръ функція $F(z)$ должна удовлетворять пяти
условіямъ

$$\begin{aligned} F(a_1) = f(a_1), \quad F'(a_1) = f'(a_1), \quad F(a_2) = f(a_2), \quad F'(a_2) = f'(a_2), \\ F(a_3) = f(a_3). \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} F(z) = Q_0 + Q_1(z-a_1) + Q_2(z-a_1)^2 + Q_3(z-a_1)^3(z-a_2) + \\ + Q_4(z-a_1)^3(z-a_2)^2, \end{aligned}$$

приходимоъ къ пяти уравненіямъ

$$Q_0 = f(a_1), Q_1 = f'(a_1), Q_0 + Q_1(a_2 - a_1) + Q_2(a_2 - a_1)^2 = f(a_2),$$

$$Q_1 + 2Q_2(a_2 - a_1) + Q_3(a_2 - a_1)^2 = f'(a_2),$$

$$\left. \begin{aligned} Q_0 + Q_1(a_3 - a_1) + Q_2(a_3 - a_1)^2 + \\ + Q_3(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2) + Q_4(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2)^2 \end{aligned} \right\} = f(a_3),$$

изъ которыхъ послѣдовательно находимъ

$$Q_0 = f(a_1), Q_1 = f'(a_1), Q_2 = \frac{f(a_2) - f(a_1) - (a_2 - a_1)f'(a_1)}{(a_2 - a_1)^2}$$

$$Q_3 = \frac{(a_2 - a_1)\{f'(a_1) + f'(a_2)\} + 2\{f(a_1) - f(a_2)\}}{(a_2 - a_1)^3}$$

$$Q_4 = \frac{f(a_3)}{(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2)^2} + \frac{(3a_1 - a_2 - 2a_3)f(a_1)}{(a_3 - a_1)^2(a_2 - a_1)^3} + \frac{(3a_2 - a_1 - 2a_3)f(a_2)}{(a_3 - a_2)^2(a_1 - a_2)^3} \\ - \frac{f'(a_1)}{(a_2 - a_1)^2(a_3 - a_1)} - \frac{f'(a_2)}{(a_1 - a_2)^2(a_3 - a_2)}.$$

При послѣдовательномъ опредѣленіи коэффиціентовъ

$$Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}$$

не трудно убѣдиться въ томъ, что **условіямъ (2) удовлетворяетъ одна и только одна цѣлая функція $F(z)$, $n - 1^{\text{ой}}$ или низшей степени.**

Тѣмъ же **условіямъ (2) удовлетворяютъ и многія другія цѣлыя функція $F(z)$, только не $n - 1^{\text{ой}}$, а высшей степени.**

Разность между любую изъ нихъ и цѣлою функціею $F(z)$, составленною по выше указанному правилу, должна дѣлиться безъ остатка на произведение

$$(z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_m)^{\alpha_m}.$$

Итакъ, для составленія цѣлой функціи $F(z)$ наинизшей степени слѣдуетъ взять то или другое общее выраженіе цѣлой функціи $n - 1$ ой степени отъ z и затѣмъ подобрать коэффиціенты этого выраженія согласно нашимъ условіямъ (2).

Разсмотримъ подробнѣе нѣкоторые частные случаи.

Первый случай (формула Тейлора): $m = 1$, $\alpha_1 = n$, $a_1 = a$.

Въ этомъ случаѣ таблица (1) приводится къ одному столбцу и для функціи $F(z)$ имѣемъ слѣдующія условія:

$$F(a) = f(a), F'(a) = f'(a), \dots, F^{n-1}(a) = f^{n-1}(a).$$

По формулѣ Тейлора получаемъ

$$F(z) = f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{n-1}(a) \quad (4).$$

Второй случай (формула Лагранжа):

$$m = n, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 1.$$

Таблица (1) приводится къ одной строкѣ и соотвѣтственно этому для функціи $F(z)$ имѣемъ слѣдующія условія:

$$F(a_1) = f(a_1), F(a_2) = f(a_2), \dots, F(a_m) = f(a_m).$$

Пользуясь формулою Лагранжа, находимъ:

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= Z_1 f(a_1) + Z_2 f(a_2) + \dots + Z_m f(a_m), \\ \text{гдѣ вообще} \\ (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_m) &= \omega(z), \\ Z_i &= \frac{\omega(z)}{(z - a_i) \omega'(a_i)} \end{aligned} \right\} \quad (5).$$

Третій случай:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 2, \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_m = 1, k + m = n.$$

Таблица (1) приводится къ двумъ строкамъ и соотвѣтственно этому для функціи $F(z)$ имѣемъ слѣдующія условія:

$$F(a_1)=f(a_1), \dots, F(a_k)=f(a_k), F(a_{k+1})=f(a_{k+1}), \dots, F(a_m)=f(a_m), \\ F'(a_1)=f'(a_1), \dots, F'(a_k)=f'(a_k).$$

Для рѣшенія нашей задачи составимъ сначала функцію

$$\left. \begin{aligned} F_0(z) &= Z_1 f(a_1) + Z_2 f(a_2) + \dots + Z_m f(a_m) \\ \text{гдѣ} \quad Z_i &= \frac{\lambda_i \omega(z)}{(z-a_i) \omega'(a_i)} \\ \text{и} \quad \omega(z) &= (z-a_1)(z-a_2) \dots (z-a_m) \end{aligned} \right\} \quad (6).$$

Затѣмъ полагаемъ

$$F(z) = F_0(z) + \omega(z) \cdot O(z).$$

Здѣсь $O(z)$ нѣкоторая неизвѣстная цѣлая функція отъ z .

Она должна удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

$$f'(a_1) = F'_0(a_1) + \omega'(a_1) O(a_1), f'(a_2) = F'_0(a_2) + \omega'(a_2) O(a_2), \dots, \\ f'(a_k) = F'_0(a_k) + \omega'(a_k) O(a_k).$$

Отсюда выводимъ

$$O(a_1) = \frac{f'(a_1) - F'_0(a_1)}{\omega'(a_1)}, O(a_2) = \frac{f'(a_2) - F'_0(a_2)}{\omega'(a_2)}, \dots, O(a_k) = \frac{f'(a_k) - F'_0(a_k)}{\omega'(a_k)}$$

и потому согласно формулъ Лагранжа

$$O(z) = U_1 \{f'(a_1) - F'_0(a_1)\} + U_2 \{f'(a_2) - F'_0(a_2)\} + \dots + U_k \{f'(a_k) - F'_0(a_k)\},$$

гдѣ вообще

$$U_j = \frac{\omega(z)(a_j - a_{k+1})(a_j - a_{k+2}) \dots (a_j - a_m)}{(z - a_j) \{\omega'(a_j)\}^2 (z - a_{k+1})(z - a_{k+2}) \dots (z - a_m)} \quad (7).$$

Съ другой стороны, составляя производную отъ $F_0(z)$ по z , получаемъ

$$F'_0(z) = Z'_1 f(a_1) + Z'_2 f(a_2) + \dots + Z'_m f(a_m),$$

при чемъ

$$Z'_i = \frac{(z - a_i) \omega'(z) - \omega(z)}{(z - a_i)^2 \omega'(a_i)}.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно

$$z = a_1, a_2, \dots, a_k$$

можемъ вычислить

$$F'_0(a_1), F'_0(a_2), \dots, F'_0(a_k).$$

Для насъ важно замѣтить, что $F'_0(a_1), F'_0(a_2), \dots, F'_0(a_k)$ линейныя однородныя выраженія относительно $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)$ и вовсе не содержатъ производныхъ $f'(a_1), f'(a_2), \dots, f'(a_k)$.

Поэтому, не вдаваясь въ дальнѣйшія преобразованія, можемъ написать формулу слѣдующаго вида:

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= F_0(z) + \omega(z) \theta(z) \\ &= V_1 f(a_1) + V_2 f(a_2) + \dots + V_m f(a_m) + \\ &\quad + U_1 \omega(z) f'(a_1) + U_2 \omega(z) f'(a_2) \dots + U_k \omega(z) f'(a_k) \end{aligned} \right\} (8).$$

Здѣсь

$$V_1, V_2, \dots, V_m, U_1, U_2, \dots, U_k$$

нѣкоторыя вполне опредѣленныя функціи отъ z и вовсе не зависятъ отъ значеній

$$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m), f'(a_1), f'(a_2), \dots, f'(a_k);$$

притомъ

$$U_1, U_2, \dots, U_k$$

опредѣляются по формулѣ (7).

Напрямѣрь, при $k = 2$ и $m = 0$, получаемъ

$$F_0(z) = \frac{z-a_2}{a_1-a_2} f(a_1) + \frac{z-a_1}{a_2-a_1} f(a_2), \quad F'_0(z) = \frac{f(a_1)}{a_1-a_2} + \frac{f(a_2)}{a_2-a_1}$$

$$\omega(z) = (z-a_1)(z-a_2), \quad U_1 = \frac{z-a_2}{(a_1-a_2)^2}, \quad U_3 = \frac{z-a_1}{(a_2-a_1)^2}$$

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \frac{z-a_2}{(a_1-a_2)^2} f'(a_1) + \frac{z-a_1}{(a_2-a_1)^2} f'(a_2) \\ &\quad - \frac{2z-a_1-a_2}{(a_1-a_2)^3} f(a_1) - \frac{2z-a_1-a_2}{(a_2-a_1)^3} f(a_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= F_0(z) + \omega(z) \theta(z) \\ &= \frac{(z-a_2) \{ (a_1-a_2)^2 - (2z-a_1-a_2)(z-a_1) \}}{(a_1-a_2)^3} f(a_1) + \frac{(z-a_1)(z-a_2)^2}{(a_1-a_2)^2} f'(a_1) \\ &\quad + \frac{(z-a_1) \{ (a_2-a_1)^2 - (2z-a_1-a_2)(z-a_2) \}}{(a_2-a_1)^3} f(a_2) + \frac{(z-a_1)^2(z-a_2)}{(a_2-a_1)^2} f'(a_2). \\ &= \left(\frac{z-a_2}{a_1-a_2} \right)^2 \left\{ \frac{3a_1-a_2-2z}{a_1-a_2} f(a_1) + (z-a_1) f'(a_1) \right\} \\ &\quad + \left(\frac{z-a_1}{a_2-a_1} \right)^2 \left\{ \frac{3a_2-a_1-2z}{a_2-a_1} f(a_2) + (z-a_2) f'(a_2) \right\} \end{aligned}$$

Четвертый случай: $m = 2$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$.

Можемъ положить

$$F(z) = (z-b)^\beta \sum_{i=0, 1, 2, \dots, \alpha-1} A_i (z-a)^i + (z-a)^\alpha \sum_{k=0, 1, 2, \dots, \beta-1} B_k (z-b)^k;$$

тогда найдемъ

$$\begin{aligned} A_i &= \left\{ \frac{d^i}{dz^i} \frac{f(z)}{(z-b)^\beta} \right\}_{z=a} = \frac{f^{(i)}(a)}{(a-b)^\beta} - \beta \frac{f^{(i-1)}(a)}{(a-b)^{\beta+1}} + \dots \\ B_k &= \left\{ \frac{d^k}{dz^k} \frac{f(z)}{(z-a)^\alpha} \right\}_{z=b} = \frac{f^{(k)}(b)}{(b-a)^\alpha} - \alpha \frac{f^{(k-1)}(b)}{(b-a)^{\alpha+1}} + \dots \end{aligned}$$

§ 3. Возвращаясь къ общему случаю, займемся оценкою погрѣшности приближенной формулы

$$f(x) = F(x).$$

Для этой цѣли составляемъ новую цѣлую функцію $n^{\text{ой}}$ степени отъ z

$$\Phi(z) = F(z) + K(z-a_1)^{\alpha_1} (z-a_2)^{\alpha_2} \dots (z-a_m)^{\alpha_m}$$

п постоянное K подбираемъ такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$f(x) = \Phi(x) = F(x) + K(x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_m)^{\alpha_m},$$

откуда

$$K = \frac{f(x) - F(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_m)^{\alpha_m}}.$$

Затѣмъ, обозначивъ буквою A наибольшее, а буквою B наименьшее изъ чиселъ

$$a_1, a_2, \dots, a_m, x^*),$$

замѣчаемъ, что уравненіе

$$f(z) = \Phi(z),$$

въ предѣлахъ отъ $z = B$ до $z = A$, имѣетъ по крайней мѣрѣ $n + 1$ корней.

Слѣдовательно по теоремѣ Ролля въ тѣхъ же предѣлахъ (отъ $z = B$ до $z = A$)

уравненіе $f'(z) = \Phi'(z)$ имѣетъ по крайней мѣрѣ n корней

„ $f''(z) = \Phi''(z)$ „ „ „ $n - 1$ „

„ $f'''(z) = \Phi'''(z)$ „ „ „ $n - 2$ „

.....
уравненіе $f^n(z) = \Phi^n(z)$ имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень.

Обозначая одинъ изъ тѣхъ корней уравненія

$$f^n(z) = \Phi^n(z),$$

которые лежатъ между A и B , буквою ξ и принимая во вниманіе равенство

$$\Phi^n(z) = 1.2.3. \dots n.K,$$

приходимъ къ слѣдующему результату

$$K = \frac{f^n(\xi)}{1.2.3. \dots n}.$$

*) Всѣ числа нашихъ вычисленій мы постоянно предполагаемъ вещественными.

Итакъ погрѣшность приближенной формулы

$$f(x) = F(x)$$

равна

$$\frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_m)^{\alpha_m}}{1.2\dots n} f^n(\xi),$$

гдѣ ξ означаетъ нѣкоторое число среднее между числами

$$a_1, a_2, \dots, a_m, x.$$

Иначе сказать, приближенную формулу (3) мы можемъ замѣнить точною

$$f(x) = F(x) + \frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_m)^{\alpha_m}}{1.2\dots n} f^n(\xi) \quad (9).$$

Примѣняя этотъ результатъ къ вышеразобраннѣмъ частнымъ случаямъ, находимъ, что функціи (4) соотвѣствуетъ формула

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{1.2\dots n} f^n(\xi) \quad (10),$$

функціи (5) — формула

$$f(x) = \sum_{i=1,2,3,\dots,m} \frac{\omega(x)}{(x-a_i)\omega'(a_i)} f(a_i) + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)}{1.2\dots m} f^m(\eta) \quad (11)$$

и наконецъ функціи (8) — формула

$$f(x) = F_0(x) + \omega(x) O(x) + \frac{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_k)^2(x-a_{k+1})\dots(x-a_m)}{1.2\dots n} f^n(\xi) \quad (12).$$

Здѣсь ξ, η, ζ означаютъ нѣкоторые неизвѣстныя числа, изъ которыхъ первое (ξ) лежитъ между a и x , а два остальныхъ (η и ζ) лежатъ между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$a_1, a_2, \dots, a_m, x.$$

§ 4. Займемся еще тѣми случаями, когда между данными (1) установленъ нѣкоторый опредѣленный порядокъ и при томъ число ихъ зависитъ отъ насъ; такъ что по желанію можно ограничиться однимъ первымъ даннымъ, или двумя первыми данными, или тремя и т. д.