Ж. Лагранж

Аналитическая механика

Том 2. Серия "Классики естествознания"

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Ж11

Ж. Лагранж

Ж11 Аналитическая механика: Том 2. Серия "Классики естествознания" / Ж. Лагранж – М.: Книга по Требованию, 2015. – 440 с.

ISBN 978-5-458-50358-7

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) является одним из наиболее выдающихся деятелей точного естествознания 18 века. Особенно велики его заслуги в области математики, аналитической и небесной механики.Вторая часть трактата излагает аналитическую динамику таких же механических систем, причем в основу вывода системы дифференциальных уравнений движения и вывода главнейших первых интегралов этой системы (именуемых Лагранжем « принципами» или «общими свойствами движения», «относящимися к центру инерции», «к площадям», «к живым силам» и т. п.) кладется аналитическая запись «общей формулы динамики», выражающей собою комбинацию принципа Даламбера (или «петербургского принципа») с принципом возможных перемещений.

ISBN 978-5-458-50358-7

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ФРАНЦУЗСКОМУ ИЗДАНИЮ.

Опубликование настоящего второго тома «Аналитической механики» произошло с некоторым замедлением, главные причины которого мы здесь изложим. Лагранж уже отдал в печать несколько первых листов, когда смерть похитила его у наук. Наблюдение над изданием настоящего тома взял на себя Прони (Prony), причем в чтении корректур ему помогал профессор королевской военной школы Гарнье (Garnier). Рукопись VII и VIII отделов оказалась в полном порядке *), но при ознакомлении с IX отделом обнаружилось, что эта часть является неполной и что закончен лишь первый ее параграф. Тогда было предложено Бинэ (Binet) совместно с Прони и Лакруа (Lacroix) произвести необходимые изыскания в бумагах Лагранжа с тем, чтобы восполнить, если бы это оказалось возможным, содержание указанного отдела.

Их исследования привели к убеждению, что наш знаменитый автор подготовил лишь эту часть и что ничего вполне законченного в бумагах не затерялось.

---

*) Можно, наоборот, полагать, что если бы Лагранж прожил ещё некоторое время, то он почти совершенно изменил бы отдел VIII, который, очевидно, был составлен не столь тщательно, как остальная часть его труда. Встречающиеся здесь ошибки в выкладках таковы, что их совершенно невозможно исправить, не изменяя текста, в силу чего мы вынуждены воспроизвести их в настоящем издании. (*Прим. Бертрана.*)

Так как многочисленные занятия не дали возможности Прони следить за печатанием, которое, в особенности в IX отделе, требовало большого внимания с целью согласования содержания и обозначений прежнего издания с той частью нового, которая уже была напечатана, Бинэ согласился обременить себя этой, временами трудной, работой. Были использованы все заметки, обнаруженные на полях экземпляра Лагранжа и сделанные его рукой.

Ввиду невозможности поместить в тексте некоторые записи, касающиеся вращательного движения, слишком неполные, чтобы составить отдельный параграф, они были объединены в заметки, помещенные в конце тома. Другая заметка получилась из замечания Лагранжа, найденного также среди его рукописей; она касается проблемы определения орбит комет, которая рассмотрена в § III отдела VII.

Ж. ЛАГРАНЖ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Том

II

ДИНАМИКА

(продолжение)

ОТДЕЛ СЕДЬМОЙ.

О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ СВОБОДНЫХ ТЕЛ, РАССМАТРИВАЕМЫХ КАК ТОЧКИ И НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ПРИТЯЖЕНИЯ.

Все системы действующих друг на друга тел, движения которых могут быть определены с помощью законов механики, могут быть распределены на три группы; в самом деле, их взаимодействие может проявиться лишь тремя известными нам различными способами: либо с помощью сил притяжения, когда тела изолированы друг от друга, либо с помощью соединяющих их связей, либо, наконец, непосредственным столкновением. Наша планетная система принадлежит к первой группе, поэтому относящиеся к ней проблемы должны занять первое место среди проблем динамики. Их мы и сделаем объектом исследования настоящего отдела.

Хотя в случае систем этой группы, где все тела рассматриваются нами как движущиеся свободно, очень легко найти уравнения их движения, так как необходимо лишь привести все силы к трем взаимно перпендикулярным направлениям и на основе принципа ускоряющих сил приравнять силу по каждому из этих направлений элементу скорости по тому же направлению, разделенному на элемент времени, — тем не менее следует всегда предпочесть применение формул, приведенных в отделе IV, так как они прямо и без всякого предварительного разложения сил дают наипростейшие дифференциальные уравнения, каковы бы ни были координаты, примененные для определения положения тел, и даже в том случае, когда тела вместо того, чтобы быть совершенно свободными, вынуждены двигаться по заданным поверхностям или линиям.

Начнем с напоминания формул, которыми мы воспользуемся.

1. Пусть m, m', m'', ... — массы различных тел, рассматриваемых как точки; x, y, z — прямоугольные координаты тела m; x', y', z' — тела m' и т. д., причем все эти координаты отнесены к одним и тем же неподвижным осям в пространстве. Получим

$$T = m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{2dt^2} + \ldots$$

А если вместо прямоугольных координат x, y, z желательно применить какие-либо другие: ξ, η, ζ, нужно только заменить величины x, y, z функциями величин ξ, η, ζ в выражении $dx^2+dy^2+dz^2$; точно так же в выражении $dx'^2+dy'^2+dz'^2$ величины x', y', z' должно заменить функциями величин ξ', η', ζ', если желательно преобразовать прямоугольные координаты x', y', z' в ξ', η', ζ' и т. д. Таким образом, величина T станет функцией переменных ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', ... и их первых производных.

Пусть теперь R, Q, P, ... — силы, которыми каждая точка массы m притягивается к центрам, неподвижным или движущимся, расстояния которых r, q, p, будучи заданы в координатах x, y, z, станут также функциями ξ, η, ζ.

Получим

$$\delta\Pi = R\delta r + Q\delta q + P\delta p + \ldots$$

независимо от того, будет ли $\delta\Pi$ полным дифференциалом или нет; обозначая теми же самыми буквами со штрихом, с двумя штрихами, ..., аналогичные величины, относящиеся к телам m', m'', ..., получим

$$\delta V = m\delta\Pi + m'\delta\Pi' + m''\delta\Pi'' + \dots$$

Если, помимо этих сил, направленных к заданным центрам, имелись бы еще силы взаимного притяжения между всеми частицами тел m и m', то, обозначив через r расстояние между этими телами, рассматриваемыми как точки, и через R — силу притяжения, зависящую или не зависящую от расстояния, следует к δV прибавить член $mm'R\delta r$ и совершенно так же поступить для всех других тел, между которыми имеется взаимное притяжение.

Но так как мы предположили, что тела свободны, то координаты, определяющие их положение в пространстве, независимы, и каждая из них, например ξ, дает уравнение следующего вида:

$$d\frac{\delta \mathbf{T}}{\delta d\xi} - \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta\xi} + \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta\xi} = 0.$$

2. Если величины $\delta\Pi$, $\delta\Pi'$, ... являются полными дифференциалами, что всегда имеет место, когда силы пропорциональны каким-либо функциям расстояний от центров притяжения, а этот случай и встречается в природе, то проще всего сначала взять интегралы Π, Π', ..., которые представляются в следующем виде:

$$\Pi = \int R dr + \int Q dq + \int P dp + \dots,$$

$$\Pi' = \int R' dr' + \int Q' dq' + \int P' dp' + \dots,$$

. . . . ,

и тогда величина V принимает следующий вид:

$$V = m\Pi + m'\Pi' + m''\Pi'' + \dots;$$

если последнюю представить в виде функции переменных ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', ..., то из нее легко путем дифференцирования получить частные производные $\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta\xi}$, $\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta\eta}$, ... Если в этом случае функции T и V

не содержат конечного времени t, то мы всегда имеем интеграл

$$T+V=H,$$

где H — произвольная постоянная; этот интеграл заключает в себе принцип живых сил.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА, РАССМАТРИВАЕМОГО КАК ТОЧКА И ПРИТЯГИВАЕМОГО К НЕПОДВИЖНОМУ ЦЕНТРУ СИЛАМИ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ, И В ЧАСТНОСТИ, О ДВИЖЕНИИ ПЛАНЕТ И КОМЕТ ВОКРУГ СОЛНЦА.

3. Когда рассматривается движение только одного изолированного тела, то его массу m можно положить равной единице, и тогда получается просто

$$T=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}, \qquad V=\Pi$$

и

$$\delta V=R\delta r+Q\delta q+P\delta p+\ldots$$

В этом случае, каковы бы ни были три координаты, определяющие положение тела в пространстве, эти координаты, в силу своей независимости, дают три дифференциальных уравнения следующего вида:

$$d\frac{\delta T}{\delta d\xi}-\frac{\delta T}{\delta\xi}+\frac{\delta V}{\delta\xi}=0,$$

к которым можно еще присоединить уравнение первого порядка

$$T+V=H,$$

которое заменит одно из них.

Если бы движение происходило в сопротивляющейся среде, то, обозначив сопротивление через R, следовало бы лишь к значению δV прибавить члены (отд. II, п. 8)

$$R\left(\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z\right),$$

но в этом случае уравнение $T+V=H$ уже не имело бы места.

4. Предположим, что тело m притягивается к неподвижному центру силой R, являющейся функцией расстояния r тела от центра; тогда мы имеем просто

$$V=\int Rdr.$$

Примем расстояние r за одну из координат тела, а за две другие возьмем угол ψ, образуемый радиусом-вектором r с плоскостью xy, и угол φ, образуемый проекцией r на эту плоскость с осью x; если начало прямоугольных координат x, y, z поместить в неподвижном центре, так что

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

то мы легко найдем

$$x=r\cos\psi\cos\varphi,\quad y=r\cos\psi\sin\varphi,\quad z=r\sin\psi,$$

и отсюда

$$T=\frac{r^2(\cos^2\psi\, d\varphi^2+d\psi^2)+dr^2}{2dt^2},\qquad V=\int Rdr.$$

Таким образом, мы получим три дифференциальных уравнения относительно r, ψ, φ:

$$d\frac{\delta T}{\delta dr}-\frac{\delta T}{\delta r}+\frac{\delta V}{\delta r}=0,$$

$$d\frac{\delta T}{\delta d\psi}-\frac{\delta T}{\delta\psi}+\frac{\delta V}{\delta\psi}=0,$$

$$d\frac{\delta T}{\delta d\varphi}-\frac{\delta T}{\delta\varphi}+\frac{\delta V}{\delta\varphi}=0,$$

которые принимают следующий вид:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{r(\cos^2\psi\, d\varphi^2+d\psi^2)}{dt^2}+R=0,$$

$$d\,\frac{r^2\,d\psi}{dt^2}+\frac{r^2\sin\psi\cos\psi\, d\varphi^2}{dt^2}=0,$$

$$d\,\frac{r^2\cos^2\psi\, d\varphi}{dt^2}=0,$$

и уравнение

$$T+V=H$$

тотчас же дает первый интеграл

$$\frac{r^2(\cos^2\psi\, d\varphi^2+d\psi^2)+dr^2}{dt^2}+2\int R\,dr=2H,$$

в котором H является произвольной постоянной.

5. Последнее из приведенных выше трех дифференциальных уравнений интегрируется непосредственно, его интегралом будет

$$\frac{r^2\cos^2\psi\, d\varphi}{dt}=C,$$

где C — произвольная постоянная; второе же уравнение становится интегрируемым, если в него вместо $\frac{d\varphi}{dt}$ подставить выражение $\frac{C}{r^2\cos^2\psi}$, выведенное из полученного интеграла, и затем помножить на $2r^2\,d\psi$; интегралом является уравнение

$$\frac{r^4\,d\psi^2}{dt^2}+\frac{C^2}{\cos^2\psi}=E^2,$$

где E — новая произвольная постоянная.

Из этого интеграла я прежде всего делаю тот вывод, что если допустить, что ψ и $\frac{d\psi}{dt}$ в некоторое мгновение одновременно становятся равными нулю, то они обязательно всегда остаются равными нулю; в самом деле, если для некоторого мгновения положить $\psi=0$ и $\frac{d\psi}{dt}=0$, то последнее уравнение даст