

А.А. Харкевич

Примеры технических расчетов в области акустики

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
А11

А11 **А.А. Харкевич**
Примеры технических расчетов в области акустики / А.А. Харкевич – М.: Книга по Требованию, 2013. – 100 с.

ISBN 978-5-458-57045-9

ISBN 978-5-458-57045-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

П Р Е Д И С Л О В И Е

Неоднократно отмечалось, что слушатели Академии, получив достаточную общую и специальную подготовку, не умеют иногда применить свои теоретические познания к решению практических задач. Такого рода навыки несомненно разовьются в процессе практической работы. Также несомненно, однако, и то, что эти навыки можно и очень полезно прививать еще в стенах Академии.

Весной 1933 года нами был поставлен в виде опыта небольшой специальный курс расчетов для оканчивающих Академию слушателей. Этот опыт оказался, по-видимому, в общем удачным. Поэтому мы нашли целесообразным издать настоящую брошюру, в которую вошла часть материалов указанного курса и которая предназначается в качестве пособия, главным образом, для слушателей, заканчивающих учебный план и приступающих к дипломному проектированию.

Пособие такого типа издается впервые, его выпуск имеет характер педагогического эксперимента.

Имея поэтому было бы крайне желательно получение критических отзывов, которые просьба направлять в ВЭТА, автору.

А. ХАРКЕРИЧ.

I. РАСЧЕТ ПРЕДЕЛОВ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

При технических расчетах соотношения выражаются, как правило, приближенными зависимостями. Важно уметь оценить пределы применимости такого рода зависимостей. Иногда приближение дает вполне удовлетворительные результаты в очень широких пределах; так, например, приближенные (с релятивистской точки зрения) законы классической механики безоговорочно могут применяться для всех технических расчетов. В других же случаях те или иные соотношения справедливы лишь в весьма узких пределах; переход за эти пределы может повлечь грубые ошибки, а иногда совершенно превратные суждения о явлениях. Ниже приведено несколько примеров оценки пределов применимости различных употребительных в технической акустике приближенных зависимостей.

1. Частотная характеристика перемещения системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + \alpha x = F,$$

выражается формулой

$$\begin{aligned} \frac{x}{F} &= \frac{1}{\sqrt{(s - \omega_0^2)^2 + \omega^2 r^2}} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Известно, что при малых частотах это выражение приводится к виду

$$\frac{x}{F} \underset{\omega \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{s}. \quad (2)$$

что легко получить из /1/, пренебрегая членами, содержащими ω .

Спрашивается, вплоть до каких значений ω можно пользоваться вместо /1/ приближенной формулой /2/, допуская ошибку 20% от точного значения?

Прежде всего заметим, что при $\omega < \omega_0$ и малых затуханиях формула /1/ дает большие значения $|\frac{x}{F}|$, нежели формула /2/. Для решения поставленной задачи нужно взять отношение значений $|\frac{x}{F}|$ по формулам /2/ и /1/ и приравнять это отношению $0,8 \frac{(100-20)}{100}$:

$$\frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}{\omega_0^2} = 0,8$$

или

$$(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 4 \frac{\alpha^2}{\omega_0^4} \omega^2 = 0,64.$$

Раскрывая скобки, приводя подобные члены и вводя обозначения $\gamma = \frac{\omega}{\omega_0}$ и $k = \frac{\alpha}{\omega_0}$, получаем биквадратное уравнение

$$\gamma^4 + 2(2k^2 - 1)\gamma^2 + 0,36 = 0.$$

Искомое значение частоты зависит от относительного затухания k . Заметим, что наименее выгоден случай $k = 0$. В этом случае уравнение принимает вид

$$\gamma^4 - 2\gamma^2 + 0,36 = 0,$$

откуда

$$\gamma^2 = 1 \pm 0,8.$$

Решение со знаком + мы сразу отбросим, так как оно, очевидно, соответствует исходящей ветви резонансной кривой (ветви резонанса); таким образом,

$$\gamma^2 = 0,2$$

и

$$\gamma = 0,447,$$

что и является ответом на поставленный вопрос при $k = 0$.

При веравном нулю затухании можно повысить границу диапазона. Пусть, например, $k = 0,4$. Тогда имеем

$$\gamma^4 + 2(0,32-1)\gamma^2 + 0,36 = 0$$

$$\gamma^2 = 0,36;$$

$$\gamma = 0,6.$$

При $k > 0,447 = \sqrt{0,2}$ фор-ла /1/ дает значения меньше /2/; поэтому отношение значений следует приравнивать не 0,8, а 1,2, что дает уравнение

$$\gamma^4 + 2(2k^2-1)\gamma^2 - 0,44 = 0,$$

имеющее только один положительный вещественный корень. Так, например, при $k = 0,5$ уравнение принимает вид

$$\gamma^4 - \gamma^2 - 0,44 = 0,$$

что дает

$$\gamma^2 = 1,33;$$

$$\gamma = 1,15.$$

При $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ второй член пропадает, и мы имеем

$$\gamma^4 = 0,44;$$

$$\gamma = 0,814.$$

Дальнейшее увеличение k ухудшает результат. Так, например, при $k = 1$ (критическое затухание) $\gamma^2 = 0,2$, $\gamma = 0,447$, т.е. тот же результат, что и при $k = 0$.

На рис. 1 построены частотные характеристики, т.е. функции

$$f(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + 4k^2\gamma^2}}$$

при значениях $k = 0; 0,4; 0,5; 0,707$ и 1. Найденные выше граничные значения отмечены кружками. На рис. 1 отмечены также допуски. Верхняя прямая соответствует значению $\frac{1}{0,8} = 1,25$, нижняя - значению

$\frac{1}{1,2} = 0,833$. На рис. 2 построена графика зависимости граничных значений γ в зависимости от K . Функция

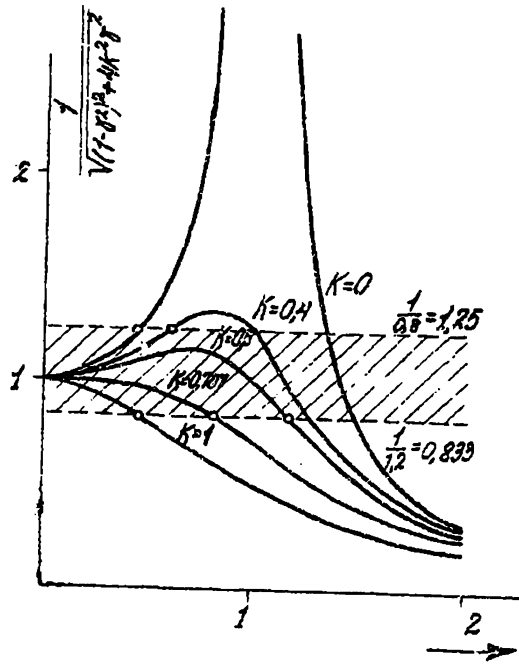


Рис. 1.

эта имеет разрыв при $K = 0,447 = \sqrt{0,2}$, о чем говорилось выше.

2. При записи и воспроизведении звука (а также в телевидении) приходится встречаться со свойствами читающего органа. В частности, в звуковом кино чтение записи происходит при посредстве щели. Термин "щель" применяют часто в более широком смысле, имея в виду вообще конечные размеры читающего органа. Ширина щели должна быть мала по сравнению с длиной волны; если это условие нарушается, то щель вносит искажения, которые, как обычно, можно описать посредством частотной характеристики щели. Эта характеристика при низких частотах идет параллельно оси абсцисс (частот). При повышении частоты начинается спад характеристика; когда длина волны оказывается равной ширине щели, отдача читающего органа падает до нуля.

Справивается, какова, например, должна быть ширина щели для того, чтобы спад характеристики не превышал 5 дБ на частоте 8000 гц при скорости ленты 0,5 м/сек.?

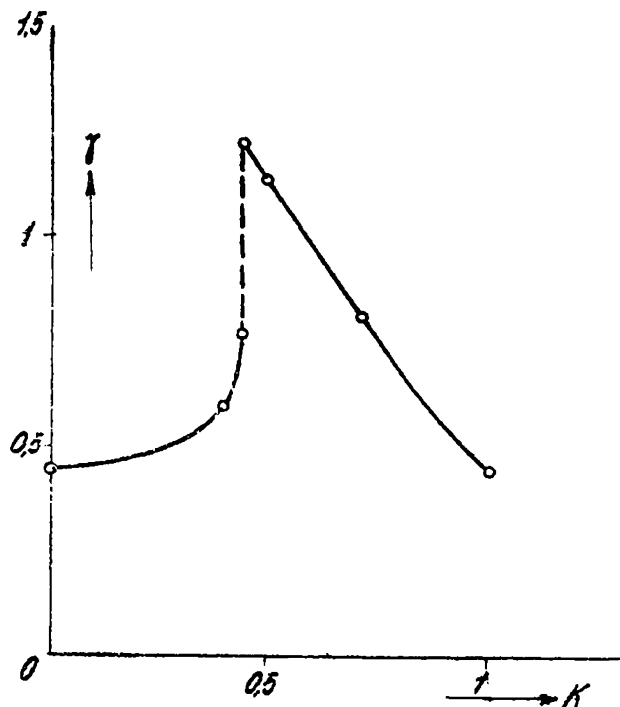


Рис. 2.

Прежде всего напомним вывод выражения для частотной характеристики щели. Уравнение записанной на ленте волны в функции координаты x , направленной вдоль щели будет

$$y = \frac{l}{2} \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right),$$

где $\lambda = \frac{v}{f}$ - длина волны, v - линейная скорость ленты, f - частота. Амплитуда колебания принята равной половине длины щели l (модуляция 100%).

Эффект щели $g(x)$ определяется отношением площади, ограниченной кривой $y(x)$ в пределах щели, к площади половины щели:

$$z(x) = \frac{2}{d} \int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) x dx,$$

это дает по выполнению интегрирования

$$z(x) = 1 + \frac{\sin \pi \frac{d}{\lambda}}{\pi \frac{d}{\lambda}} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Как видим, амплитуда переменной составляющей функции $z(x)$ зависит от частоты при неизменной амплитуде функции $y(x)$. В этом и состоит влияние цели. Это влияние сказывается тем сильнее, чем больше ширина цели d . При весьма малой ширине цели амплитуда функции $z(x)$ не зависит от частоты; это следует из того, что, как известно,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{a} = 1.$$

Частотной характеристикой цели является множитель

$$A = \frac{\sin \pi \frac{d}{\lambda}}{\pi \frac{d}{\lambda}}.$$

Теперь мы располагаем всеми необходимыми для решения поставленной задачи.

По условию

$$20 \text{ дБ} = -5,$$

получаем

$$= 10^{-0,25} = 0,562.$$

Таким образом, мы имеем transcendентное уравнение

$$\frac{\sin \pi \frac{d}{\lambda}}{\pi \frac{d}{\lambda}} = 0,562.$$

Решая его помощью таблиц натуральных тригонометрических функций, получаем для первого корня

$$\pi \frac{d}{\lambda} = 1,75,$$

откуда

$$\alpha = 1,75 \frac{\lambda}{\pi} = \frac{1,75 \cdot \nu}{\pi \cdot f} = \frac{1,75 \cdot 50}{\pi \cdot 8 \cdot 10^3} =$$

$$= 3,48 \cdot 10^{-2} \text{ см} \approx 0,035 \text{ мм.}$$

Эта цифра и является ответом на поставленный вопрос. Как видно, заданные условия чрезвычайно жестки; их выполнение наталкивается на значительные технические трудности.

3. При пользовании так называемым методом насоса (пистонфонов) полагают обычно, что размеры камеры малы по сравнению с длиной волны. Сделав это допущение, можно легко найти выражение для избыточного давления, развиваемого в камере. Обозначая через p_0 и V_0 — атмосферное давление и объем камеры, а через p и V — избыточное давление и объем, описываемый поршнем при его перемещении, можем записать

$$p_0 V_0^{\kappa} = (p_0 + p) (V_0 - V)^{\kappa},$$

что дает

$$1 + \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{-\kappa},$$

или, полагая

$$\frac{V}{V_0} \ll 1$$

$$p \approx \kappa p_0 \frac{V}{V_0}. \quad //$$

Таким образом, избыточное давление оказывается не зависящим ни от координат, ни от частоты. Этот результат предвещает "статическую" трактовку вопроса. Очевидно, что вышеприведенная формула // приближена.

Спрашивается, вплоть до каких частот формула // дает результат, отличающийся от точного не более чем на 10% при длине камеры равной 1 м и при рас-

положении рассматриваемой точка непосредственно у стенки камеры, противолежащей поршню?

Для ответа на этот вопрос нам нужно прежде всего восстановить точную формулу. Предположим, что камера имеет цилиндрическую форму и что площадь поршня равна площади сечения камеры. Это предположение упрощает формулу, но не нарушает общности последующих заключений. Направляя координату X вдоль цилиндра и выбирая начало координат у поршня, можем записать общее выражение для избыточного давления:

$$p^* = \rho c x \frac{\cos \beta (1 - X)}{\sin \beta l}, \quad /2/$$

где ρ - плотность воздуха, c - скорость звука, x - перемещение поршня, $\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, ω - круговая частота, l - длина цилиндрической камеры.

С другой стороны, формула /1/ может быть переписана в виде

$$p = \rho c^2 \frac{x}{l} \quad /3/$$

на том основании, что, очевидно, $V_0 = Sl$ и $V = Sx$, где S - площадь поршня (или, что то же, площадь сечения цилиндра). Легко видеть, что /2/ переходит в /3/ при $\beta \rightarrow 0$, т.е. при низких частотах. Задача наша состоит в нахождении той предельной, частоты, при которой расхождение между значениями давления, определяемыми по формулам /2/ и /3/, достигает 10%. Для этого разделим /3/ на /2/

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{\beta l} \frac{\sin \beta l}{\cos \beta (1 - X)}. \quad /4/$$

По условию требуется исследовать соотношения непосредственно у стенки, т.е. при $X = 1$. Для этого случая имеем

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\sin \beta l}{\beta l}.$$

Приравнявая это отношение 0,9, получаем в точности такое же трансцендентное уравнение, как и в предыдущей задаче:

$$\frac{\sin \beta l}{\beta l} = 0,9,$$

откуда

$$\beta l = \frac{2\pi f l}{c} = 0,79; \quad f = \frac{0,79c}{2\pi l} = \frac{0,79 \cdot 3,34 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 100} = 42 \text{ гц.}$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Нужно заметить, что с точки зрения частотных зависимостей задняя стенка камеры наименее благоприятное место. Гораздо лучше обстоит дело по середине камеры. Более того $X = \frac{l}{2}$, получаем из 4/

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{\beta l} \frac{\sin \beta l}{\cos \frac{1}{2}\beta l}.$$

После преобразования получаем уравнение

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\beta l}{\frac{1}{2}\beta l} = 0,9,$$

откуда, как и раньше

$$\frac{1}{2}\beta l = 0,79; \quad f = 2,42 = 84 \text{ гц.}$$

Таким образом, для середины камеры пограничная частота лежит вдвое выше, чем для стенки. Более подробное исследование вопроса показывает, что наилучшее с точки зрения частотных зависимостей место лежит около $X = 0,45l$. На рис. 3 построены частотные характеристики, т.е. значения отношения $\frac{p^*}{p}$ в зависимости от βl при $\frac{X}{l} = 10,5$ и 0,4.

4. Перейдем к нескольким примерам, относящимся к области линеаризации заведомо нелинейных соотношений.

В предыдущей задаче при выводе выражения для