

**Ф. Франк**

**Дифференциальные и интегральные  
уравнения математической физике. Часть 2**

**Книга 2**

УДК 51  
ББК 22.1  
Ф11

**Ф. Франк**  
Ф11 Дифференциальные и интегральные уравнения математической физике. Часть 2: Книга 2 / Ф. Франк – М.: Книга по Требованию, 2024. – 384 с.

**ISBN 978-5-8853-3885-1**

Предлагаемая книга не есть учебник теоретической физики, она имеет дело только с медленно меняющейся\* частью ее, являющейся промежуточным звеном между системой гипотеза и опытом и представляющей собой необходимое орудие в самых различных ее областях. Теория возмущений, разработанная Лапласом и Лагранжем для вычисления влияния одних планет на орбиты других, оказалась полезной в применении к столь важному в квантовой теории спектров изменению энергии атомов в электрическом поле, приводящему к Штарк-эффекту. Методы, открытые Фурье в его теории теплопроводности, Эйнштейн и Смолуховский применили почти без изменений к выводу законов броуновского движения при различных внешних условиях. Введенные Даламбером, Эйлером и Пуассоном методы вычисления собственных колебаний струн и мембран применяются в волновой механике Шредингера для определения стационарных состояний атомов. Наконец, теория потенциала, созданная Лапласом- и Гауссом, Коши и Риманом, в наше время нашла применение, между прочим, к вычислению поддерживающей силы самолета.

**ISBN 978-5-8853-3885-1**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2024  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



(например, посредством тающего льда и кипящей воды) обе параллельные грани при постоянных, но неравных температурах; тогда со временем устанавливается стационарное состояние, при котором через пластинку от нагретой к холодной поверхности течет постоянный тепловой поток определенной интенсивности, который можно определить из количества льда, растаявшего в единицу времени, или из количества конденсированного пара.

Под „тепловым потоком“  $Q$  мы понимаем количество тепла, протекающее в одну секунду через грань пластинки. Обозначим через  $\Delta$  толщину пластинки, через  $F$  — площадь, через  $t$  — время и через  $u_1$  и  $u_2$  обе постоянные температуры; тогда имеем следующее эмпирическое соотношение:

$$(2) \quad Qt = k \frac{u_1 - u_2}{\Delta} \cdot F \cdot t.$$

Величина  $k$  называется внутренней теплопроводностью вещества, она в первом приближении есть материальная постоянная, точнее — некоторая функция температуры. Чтобы не очень усложнять наши задачи, мы в дальнейшем будем считать  $k$  постоянным. Смотря по величине  $k$ , мы называем тела хорошими или плохими проводниками тепла.

Обобщим теперь задачу на случай произвольного тела. Представим себе, что в какой-либо точке  $P$  тела проведен элемент поверхности  $dF$  и параллельно ему на расстоянии  $dn$  — другой, равный по величине. Разность температур между этими поверхностями обозначим через  $du$ .

Полагаем, что тепловой поток в малом цилиндре в течение очень малого времени  $dt$  подчиняется предельному случаю закона (2) в виде:

$$(3) \quad dq = -k \frac{\partial u}{\partial n} dF \cdot dt,$$

где знак минус поставлен потому, что тепловой поток имеет направление убывающих  $u$ . Теперь можно ввести вектор  $\Omega$  — плотность теплового потока, величина которого равна  $\frac{dq}{dFdt}$ , и записать (3) в векторной форме:

$$(4) \quad \Omega = -k \text{grad } u, \quad Q = \int \Omega_n dF = - \int \left( k \frac{\partial u}{\partial n} \right) dF,$$

При этом  $k$ , вообще говоря, может быть как функцией места, так и направления вектора  $\Omega$  по отношению к какой-либо твердо связанной с телом системе координат.  $Q$  есть полное количество тепла, протекающее в направлении  $n$ , в единицу времени через единицу поверхности.

Если две однородных среды с различными теплопроводностями  $k_1$  и  $k_2$  касаются друг друга вдоль некоторой поверхности, то для нее необходимо ввести некоторые специальные предположения касательно передачи тепла. Мы предположим, что при переходе от одного тела к другому температура не претерпевает скачка, так что всегда

$$(5) \quad u_1 = u_2.$$

Далее, физически, очевидно, что в силу отсутствия для теплового потока поверхностных источников или стоков на границе должно быть:

$$(6) \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n},$$

т. е. градиент температуры на границе двух различных сред претерпевает разрыв.

Мы должны, наконец, знать закономерности, имеющие место для теплового потока через „поверхность“ тела. Понятие „поверхность“ несколько неопределенно, так как каждую поверхность можно понимать как границу двух тел, кроме разве случая границы с „абсолютной пустотой“. Во многих случаях однако, например, на границе с воздухом или другим газом, теплопроводность внешней среды так незначительна, что мы можем пренебречь тепловым потоком теплопроводности. Тогда теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой происходит, во-первых, путем теплового излучения, во-вторых, путем конвекции вследствие течения окружающей жидкости или газа. Истинный закон этого процесса очень сложен и сильно изменяется от случая к случаю. Поэтому для аналитического рассмотрения пользуются грубым приближением, называемым законом охлаждения Ньютона: если температура поверхности тела  $u$ , температура окружающей среды  $U$ , далее  $dF$  — элемент внешней поверхности, то тепловой поток перпендикулярно к  $dF$  за время  $dt$  равен:

$$(7) \quad dq = h(u - U) dF dt,$$

где  $h$  есть зависящая от обстоятельств постоянная, — так называемая внешняя теплопроводность. Закон (7) справедлив только с ограниченной точностью, величина  $h$  определена весьма неточно. Ниже мы увидим, что при некоторых определенных предположениях закон Ньютона допускает точное обоснование.

Из непрерывности теплового потока на поверхности следует окончательное условие на поверхности:

$$(8) \quad k \frac{\partial u}{\partial n} = h(u - U).$$

**2. Дифференциальное уравнение теплопроводности.** Пользуясь законом (4), мы можем без труда вывести дифференциальное уравнение теплопроводности в твердых телах, для чего подсчитаем баланс тепла, входящего и выходящего из некоторого мысленно выделенного в теле элемента объема  $dV$ . Допустим сперва, что вещество неоднородно, но изотропно, тогда  $k$  есть скалярная функция точки.

Излишек входящего в  $dV$  количества тепла над выходящим мы получаем из формулы для  $Q$  [уравнение (4)], если распространим интегрирование на поверхность элемента объема. По теореме Гаусса этот интеграл равен объемному интегралу. Так как мы рассматриваем лишь объемный элемент, то имеем  $\text{div } \Omega dV = \text{div}(k \text{ grad } u) dV$  [см. уравнение (4)]. Далее, в элементе  $dV$  может, посредством каких-либо процессов (например, химической или электрической природы), возникать тепло. Если обозначить через  $A$  количество тепла, возникающего в одну секунду в единице объема, то к полученному выражению надо прибавить еще  $A dV$ . С другой стороны, вследствие увеличения количества тепла в элементе  $dV$  температура его возрастает на  $\frac{\partial u}{\partial t}$  (в единицу времени), или, согласно (1), количество тепла — на  $\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV$ , где  $\rho$  обозначает плотность вещества. Приравнявая это выражение сумме, указанной выше, получим искомое дифференциальное уравнение:

$$(9) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = A + \text{div}(k \text{ grad } u) = A + k \Delta u + (\text{grad } u, \text{ grad } k).$$

Если среда анизотропна, что имеет, например, место для многих кристаллов, то направление теплового потока и направление градиента температуры, вообще говоря, не совпадают друг с другом, и скалярная величина  $k$  заменяется теперь

тензором  $K$ , с составляющими  $k_{xx}, k_{xy}, \dots$ . Изменение дифференциального уравнения (9) сводится при этом просто к замене произведения  $k \operatorname{grad} u$  произведением  $K \operatorname{grad} u$ . Вместо (9) для анизотропных тел имеем, следовательно:

$$(10) \quad \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = A + \operatorname{div} (K \operatorname{grad} u).$$

Если предположить, что тензор  $K$  — симметричный тензор, что довольно надежно установлено опытными исследованиями над различными кристаллами, то всегда можно выбрать такую координатную систему, что все составляющие с двумя различными индексами исчезнут и останутся одни „главные составляющие“  $k_x, k_y, k_z$  по трем направлениям  $x, y, z$ , соответственно. Далее мы будем всегда пользоваться этой координатной системой.

Если  $k$  или  $K$  — постоянные величины, то из (10) следует:

$$(11) \quad \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = A + k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и из (9), в силу  $\operatorname{grad} k = 0$

$$(12) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \Delta u + \frac{A}{\rho c_p}.$$

Если, кроме того,  $A = 0$ , то дифференциальное уравнение имеет простой вид

$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \Delta u = a^2 \Delta u.$$

Величина  $a^2$ , если теплоемкость постоянна, также постоянна и носит название температуры проводности.

В стационарном состоянии, в котором  $u$  есть функция только точки  $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$ , из (12) следует:

$$(14) \quad \Delta u + \frac{A}{k} = 0,$$

то есть уравнение Пуассона теории потенциала. При  $A = 0$  из него получается

$$(15) \quad \Delta u = 0,$$

т. е. уравнение Лапласа. В этом случае задачи теплопроводности приводятся, следовательно, к задачам теории потенциала. Общее уравнение (13) есть линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Если  $u$  зависит лишь от одной пространственной координаты  $x$ , то оно имеет вид  $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , то есть мы имеем дело с параболическим дифференциальным уравнением.

Задачей теории теплопроводности является нахождение решения  $u(t, x, y, z)$  дифференциального уравнения (10) [соответственно (11), (12) или (13)], переходящего при  $t = 0$  внутри конечной области пространства в некоторую заданную функцию от  $x, y, z$ , причем на границе температура  $u$  или падение температуры  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , или линейная комбинация обоих [как, например, в уравнении (8)], при  $t > 0$ , заданы как функции  $t$ . При этом  $u$  должно быть для  $t > 0$  регулярно во всей области.

**3. Основные понятия диффузии при отсутствии внешних сил.** Под диффузией мы понимаем следующее явление: если имеются две смеси различных концентраций 1 и 2 из двух составных частей  $A$  и  $B$ , находящиеся

в жидком или газообразном состоянии и соприкасающиеся по некоторой граничной поверхности, так что на обеих сторонах последней давление и температура одинаковы, то наблюдается некоторое течение между обеими смесями, такое, что составная часть  $A$  (а также  $B$ ) течет из смеси с большей концентрацией в смесь с меньшей до тех пор, пока концентрации в смесях  $1$  и  $2$  не сравняются.

Под „смесью“ понимаются здесь смеси или растворы двух жидкостей одной другой, растворы твердых или газообразных тел в жидкостях, смеси двух газов наконец, „туман“ из твердых или жидких частиц в газах. При этом, раствор могут быть как молекулярные, так и коллоидные, т. е. смешение смеси может идти до молекулы или только до молекулярных комплексов растворенных веществ.

Если количество одного из двух тел преобладает над количеством другого как, например, в большинстве растворов твердых тел в жидкостях, то изменение концентрации жидкости по отношению к твердому веществу можно пренебречь и позволительно говорить о диффузии одного только растворенного вещества хотя растворитель также должен диффундировать. Для упрощения мы будем исследовать далее лишь этот последний случай, результаты переносятся на другие случаи без затруднений.

Чтобы найти закономерности диффузионного тока, произведем следующий опыт: поместим в двух очень больших резервуарах  $1$  и  $2$  один и тот же раствор двух различных концентраций  $c_1$  и  $c_2 > c_1$ . Оба сосуда соединим друг с другом посредством капилляра длины  $l$ . Пусть гидростатические давления на обоих концах капилляра равны. Тогда мы заметим, что растворенное вещество течет через капилляр из сосуда  $2$  в сосуд  $1$  и что количество  $Q$  вещества, прошедшее через капилляр за время  $t$ , определяется формулой:

$$(16) \quad Q = \kappa \frac{c_2 - c_1}{l} t.$$

Величина  $\kappa$  есть постоянная, зависящая от поперечного сечения капилляра, а также от природы растворенного вещества и растворителя. Мы видим, что закон диффузии вполне аналогичен закону (2) для теплового потока через пластинку, но градиент температуры заменяется здесь „градиентом концентрации“. Этот же опыт можно произвести и так, что оба сосуда связаны друг с другом посредством фитиля или полосы фильтровальной бумаги, или посредством разделяющей их твердой перегородки из пористого вещества, которую можно представить себе как связку капиллярных трубок. В последнем случае явление обыкновенно называют осмосом.

Ту же формулу (16) мы получим, если представим себе, что растворенное вещество проходит через капилляр под влиянием гидростатической разности давлений  $p_1 - p_2$ , так как сила трения в капилляре прямо пропорциональна его длине. Таким образом, разность концентраций  $c_1 - c_2$  действует, как пропорциональная ей гипотетическая разность давлений  $p_1 - p_2$ . Давление  $p$  мы назовем осмотическим давлением; между ним и концентрацией имеем соотношение:

$$(17) \quad p = \gamma c,$$

где  $\gamma$  уже не зависит от концентрации.

Существование осмотического давления можно непосредственно доказать и измерить само давление, когда капилляр или поры осмотической перегородки настолько узки, что сквозь них могут проходить молекулы растворителя, но не растворенного вещества. В этом случае растворитель из сосуда  $1$  с меньшей концентрацией течет в сосуд  $2$  с большей концентрацией. Если оба сосуда замкнуты и снабжены манометрами, то давление в сосуде  $2$  возрастает, а в сосуде  $1$  понижается до тех пор, пока не возникнет разность давлений, равная осмотической разности давлений, и действующая в обратном направлении, и не установится равновесие.

Так можно найти подтверждение закону (17) и обнаружить смысл величины  $\gamma$ . Обозначим через  $v$  объем одной граммолекулы растворенного вещества в растворе, тогда  $c = \frac{1}{v}$ , и закон (17) можно написать в форме,

$$(18) \quad pv = RT,$$

где  $T$  означает абсолютную температуру, а  $R$  — некоторую универсальную постоянную, которая оказывается совпадающей с газовой постоянной. Отсюда следует, что законы осмотического давления вполне аналогичны законам идеального газа; величина осмотического давления не зависит от природы капилляров или осмотических мембран. Мы можем теперь обобщить результат, полученный из описанного опыта, поступая как в 1 для теплопроводности, представляя себе, что во всяком растворе, в котором концентрация есть функция точки, на малый элемент жидкости действует сила осмотического давления, пропорциональная, согласно (17), градиенту концентрации и направленная от мест с большей концентрацией к местам с меньшей концентрацией.

Таким образом для плотности потока диффундирующего вещества мы получим, аналогично (4), векторное уравнение:

$$(19) \quad \Omega = -D \text{ grad } c,$$

где  $D$  означает независимую от  $c$  величину, могущую зависеть от вещества и температуры, которую мы назовем коэффициентом диффузии. Он играет в теории диффузии ту же роль, как коэффициент внутренней теплопроводности в теории теплопроводности. В некоторых случаях  $D$  может быть определено теоретически. Вследствие существования градиента осмотического давления на растворенное в единице объема вещество действует, по законам гидростатики, сила  $K = -\text{grad } p$ ; под ее действием вещество получит скорость  $v = \frac{K}{r}$ ; здесь  $r$  — возникающая при движении сила трения (разделенная на скорость), которая очевидно равна силе трения, действующей на одну молекулу, умноженной на число молекул в единице объема. Обозначим величину, обратную силе трения на одну молекулу, через  $B$  (подвижность) и через  $N$  — число молекул в граммолекуле (число Лошмидта), тогда  $r = \frac{1}{B} cN$ , откуда  $v = -\frac{B}{cN} \text{ grad } p$ . Так как, согласно (18),  $p = RTc$  и  $\Omega = cv$ , то  $\Omega = -\frac{RT}{N} B \text{ grad } c$ ; сравнивая с (19), получаем:

$$(20) \quad D = \frac{RT}{N} B.$$

Величина  $B$ , вообще говоря, не может быть вычислена, она представляет собою некоторую постоянную, характеризующую данное вещество. Для шарообразных частиц твердого вещества в жидком растворе по закону Стокса (см. гл. XI, § 3)

$$(21) \quad B = \frac{1}{6\pi\mu a},$$

где  $\mu$  есть коэффициент внутреннего трения растворителя и  $a$  — радиус частицы.

4. Дифференциальное уравнение диффузии. Мы можем сразу получить теперь, по образцу 2, дифференциальное уравнение диффузии. Избыток количества растворенного вещества, вытекающего за время  $dt$  в малый элемент объема  $dV$ , над вытекающим равен в граммолекулах —  $\text{div } \Omega \, dV dt = D \text{ div grad } c \, dV dt$ .

С другой стороны, та же самая величина равна  $\frac{\partial c}{\partial t} dt dV$ . Приравнивая оба выражения, мы получаем:

$$(22) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c.$$

Это есть дифференциальное уравнение диффузии, которое формально тождественно с уравнением теплопроводности (1), если  $c$  отождествить с температурой, а  $D$  с  $a^2$ . Поэтому формально задачи теории диффузии могут быть сведены к задачам теории теплопроводности и обратно.

Уравнение (22) справедливо во всякой точке внутри рассматриваемой жидкости или газа. Если соприкасаются две различные жидкие или газообразные смеси, разделенные пористой перегородкой, то, согласно (17), должно иметь место следующее условие для нормальной составляющей осмотического тока через элемент поверхности  $dF$  за время  $dt$ :

$$(23) \quad \mathcal{Q}_n dt = D^* (c_1 - c_2) dF dt,$$

где  $D^*$  зависит не только от природы вещества, но еще и от рода пористой перегородки. Если  $D^*$  для растворителя отличается от нуля, а для растворенного вещества равно нулю, то перегородку называют полупроницаемой.

## § 2. Теплопроводность и диффузия в неограниченных телах

**1. Тело, бесконечно протяженное в одном измерении. Общее решение.** В этом параграфе мы предполагаем, что  $k$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  постоянны и  $A = 0$ . Тело одномерно, изотропно и неограниченно по всем направлениям, но предполагается, что  $u$  зависит только от одной координаты  $x$ . Ниже мы покажем, что подобной зависимости от одной координаты можно действительно добиться подходящим выбором начальных условий. Уравнение (13) сводится теперь к

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Наша задача — найти решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям: при  $t = 0$   $u$  равняется заданной функции  $\Phi(x)$ , и для всех позднейших времен  $t > 0$  функция  $u$  во всем пространстве конечна, непрерывна и непрерывно-дифференцируема.

Ищем частное решение, как произведение функции только от  $x$  на функцию только от  $t$ :

$$(2) \quad u = X(x) T(t).$$

Подставляя в уравнение (1), получим  $X \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$  или  $\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 X}{X \partial x^2}$ . Здесь в левой части стоит функция только от  $t$ , в правой — функция только от  $x$ . Поэтому уравнение может иметь место для всех значений  $x$  и  $t$  только тогда, когда обе части равны одной и той же постоянной  $\alpha$ . Отсюда следует  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T$ , или  $T = A e^{\alpha t}$ . Положив  $\alpha = -\lambda^2 a^2$ , получим для  $X$  дифференциальное уравнение  $\frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X$ . Оно имеет частные интегралы  $\sin \lambda x$  и  $\cos \lambda x$ . Функции  $X$  и  $T$  для всех  $t > 0$  и всех  $x$  только тогда конечны, если  $\alpha$  вещественно и отрицательно, следовательно,  $\lambda^2$  вещественно и положительно. Согласно (2), мы получаем два решения  $A e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x$  и  $B e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x$ . Здесь  $\lambda$  — произвольное вещественное число, считаемое нами положительным,  $A$  и  $B$  произвольные величины,

которые мы считаем функциями от  $\lambda$ . Так как суммирование любого числа этих частных решений дает всегда новое решение, то, интегрируя по  $\lambda$ , мы получим решение:

$$(3) \quad u = \int_0^{\infty} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda,$$

зависящее от двух произвольных функций  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ . Посмотрим, можно ли выбрать их так, что будет выполнено начальное условие  $u = \Phi(x)$  при  $t = 0$ . Согласно интегральной теореме Фурье, функция  $\Phi(x)$ , удовлетворяющая внутри конечного интервала условиям Дирихле и исчезающая вне его, может быть представлена в следующем виде:

$$(4) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \cos \lambda(\alpha - x) d\alpha.$$

При  $t = 0$  из (3) получаем:

$$(5) \quad u = \int_0^{\infty} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) d\lambda.$$

Разлагая косинус в (4) и сравнивая (4) и (5), имеем:

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \cos \alpha d\alpha, \quad B = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha d\alpha,$$

и после подстановки в (3):

$$(6) \quad u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \cos \lambda(\alpha - x) d\alpha,$$

откуда при  $t = 0$ , в силу (4), следует  $u = \Phi(x)$ .

Переставим теперь порядок интегрирования в (6); тогда

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\alpha - x) d\lambda.$$

Интегрирование по  $\lambda$  можно выполнить, что дает:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\alpha - x) d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}}.$$

так что для  $u$  мы получим:

$$(7) \quad u = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}} d\alpha.$$

В том, что (7) представляет решение нашей задачи, можно убедиться и непосредственно. Функция  $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}}$  для любого  $\alpha$  есть частный интеграл уравнения (1), в чем убеждаемся подстановкой.

Чтобы доказать, что при  $t=0$   $u$  сводится к  $\Phi(x)$ , вводим в (7) новую переменную  $\xi = \frac{\alpha - x}{2a\sqrt{t}}$ . Это даст  $\alpha = x + 2\xi a\sqrt{t}$  и

$$(8) \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x + 2\xi a\sqrt{t}) e^{-\xi^2} d\xi;$$

при  $t=0$  это дает

$$u = \Phi(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \Phi(x).$$

Решение (7) допускает весьма наглядное физическое толкование на основе следующих соображений.

Рассмотрим частный интеграл

$$(9) \quad u = \frac{\gamma}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}},$$

нашего дифференциального уравнения (1) где  $\gamma$  означает пока произвольную постоянную. При  $t=0$  эта формула дает  $u=0$  везде за исключением точки  $x=\alpha$ . Это соответствует, следовательно, начальному условию, что во всем пространстве господствует равная нулю температура, за исключением области, непосредственно окружающей плоскость  $x=\alpha$ . В бесконечности  $u$  исчезает для всех времен.

Если вычислить полное количество тепла, которое в некоторый момент находится в цилиндре с сечением 1, простирающемся в бесконечность в обе стороны параллельно оси  $x$ , то, согласно § 1, найдем:

$$Q = \rho\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = \rho\sigma\gamma,$$

где интеграл находится с помощью примененной выше подстановки  $\alpha = x + 2\xi a\sqrt{t}$ . Количество содержащегося в теле тепла при нуле температуры положено равным нулю.

Итак  $Q$  не зависит от времени, т. е. полное количество тепла сохраняет свое (конечное) значение; в момент нуль оно сжато в бесконечно узкой полосе, распространяется затем путем теплопроводности по всей бесконечной области и для бесконечно большого времени бесконечно разрезается. Величина  $\gamma$  играет, следовательно, в формуле  $Q = \rho\sigma\gamma$  роль произведения объема узкой полосы на начальную температуру в точке  $x=\alpha$ . Для одного только „источника“, создающего тепловой поток, т. е. узкого слоя температуры  $\Phi(\alpha)$  и ширины (= объему)  $d\alpha$ , вследствие соотношения  $\gamma = \Phi(\alpha) d\alpha$ , температура в какой-либо точке  $x$  в какой-либо момент  $t$ , согласно (9), представляется выражением:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \Phi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} d\alpha.$$

Если в каждой точке  $\alpha$  находится „источник“ и  $\Phi(\alpha)$ , как и выше, есть функция распределения температуры в момент  $t=0$ , то поток создается как бы действием многих единичных изолированных независимых друг от друга источников, и  $u$  есть сумма всех этих потоков. Тогда выражение (7) можно назвать интегралом по источникам теплового потока, или короче, интегралом по источникам дифференциального уравнения (1). Это толкование мы будем употреблять и ниже.

Вышеупомянутые формулы, согласно § 1,4, где нами установлено формальное тождество между дифференциальными уравнениями диффузии и теплопроводности, дают одновременно решения аналогичной диффузионной задачи, если заменить количество тепла количеством вещества, а температуру — концентрацией.

2. Примеры. Рассмотрим ряд простых примеров.

В качестве первого примера рассмотрим следующее распределение температур (или концентраций) при  $t=0$ :  $u=0$  всюду за исключением слоя между  $x=+1$  и  $x=-1$ , где  $u$  постоянно и равно, например, 1. Это обозначает, что  $\Phi(x)=0$  для  $x > 1$  и  $x < -1$  и  $\Phi(x)=1$  для  $-1 < x < +1$ . Подставляя эти значения  $\Phi(x)$  в (8), замечая, что подинтегральная величина отличается от нуля

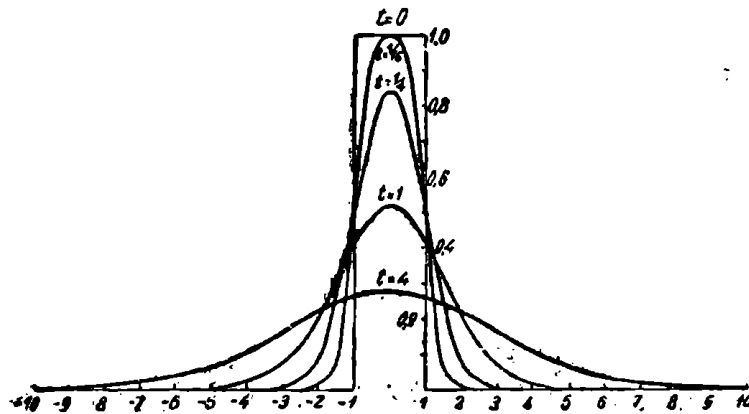


Рис. 59.

только между пределами  $x \pm 2\xi a \sqrt{t} = \pm 1$  и вычисляя отсюда пределы для  $\xi$ , получим из (8):

$$(10) \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{(1+x)}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \left\{ \psi \left( \frac{1-x}{2a\sqrt{t}} \right) + \psi \left( \frac{1+x}{2a\sqrt{t}} \right) \right\},$$

где через  $\psi$  обозначен интеграл Гаусса

$$(11) \quad \psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

Непосредственно видно, что  $u$  удовлетворяет начальным условиям и исчезает везде при  $t = \infty$ , так как конечное количество тепла распространяется по бесконечной области. На рис. 59 представлена температура как функция  $x$  в различные моменты времени.

В качестве второго примера рассмотрим такое начальное распределение температуры, что для  $x > 0$   $\Phi(x) = 0$  и для  $x < 0$   $\Phi(x) = 1$ .

По формуле (8) получаем:

$$(12) \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \psi \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right\}.$$

На рис. 60, представляющем распределение температуры для различных моментов времени, видно, как тепло течет из отрицательного в положительное полупространство. Заметим, что ни в одном месте положительного полупространства ни для какого времени температура не может быть выше  $1/2$ .

Этот пример дает одновременно аналитическое толкование основного опыта по диффузии. Возьмем два равных достаточно длинных цилиндрических сосуда с основаниями, совпадающими друг с другом, но разделенных перегородкой. Один цилиндр содержит чистый растворитель ( $c = 0$ ), другой — раствор с концентрацией  $c_0$ . Удалим перегородку и через некоторое время  $T$  снова поставим ее на место. Согласно (12), растворенное вещество будет диффундировать из 1-го цилиндра во 2-ой. Чтобы определить количество перешедшего вещества, заметим, что, согласно § 1, (19), за время  $dt$  через открытую перегородку проходит количество вещества  $dq = D \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)_{x=0} F dt$ , где  $F$  означает поперечное сечение цилиндра.

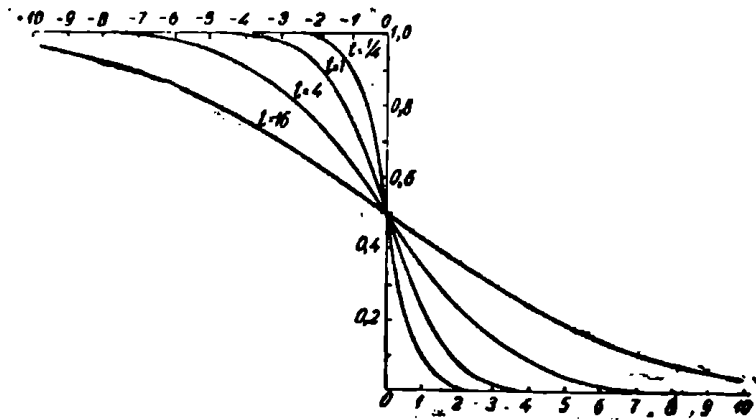


Рис. 60.

Подставляя сюда выражение (12) (для  $u = c$ ,  $\sqrt{a} = D$ ,  $u_0 = C_0$ ), получим протекшее за время  $T$  количество вещества:

$$(13) \quad Q = \int_0^T dq = C_0 \sqrt{\frac{DT}{\pi}}.$$

Измеряя  $Q$ , мы можем по этой формуле определить коэффициент диффузии  $D$ .

Вернемся теперь к формуле (12) и посмотрим, с какою скоростью распространяется некоторая температура в положительном полупространстве. Если обозначить  $u$  через  $u_0$ , то искомую скорость мы найдем, положив в (12)  $u = u_0$  и разрешив уравнение относительно  $x$ .

Мы получаем:

$$(14) \quad x = 2a \sqrt{t} \psi^*(1 - 2u_0),$$

где  $\psi^*$  означает функцию, обратную  $\psi$ . Поэтому искомая скорость равна:

$$(15) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{a}{\sqrt{t}} \psi^*(1 - 2u_0).$$

Мы замечаем, что для каждой температуры  $u_0$  скорость распространения непрерывно уменьшается со временем, или, соответственно, с удалением от температурной границы, и в первый момент бесконечно велика; что, далее, скорость