С. Чаплыгин

Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений

Серия "Классики естествознания".

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С. Чаплыгин

С11 Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений: Серия "Классики естествознания". / С. Чаплыгин – М.: Книга по Требованию, 2022. – 103 с.

ISBN 978-5-458-50418-8

Замечательный русский учёный — Сергей Алексеевич Чаплыгин создал вместе со своим учителем, «отцом русской авиации» Николаем Егоровичем Жуковским новую науку — аэродинамику и заложил основы для создания газовой динамики — теоретической базы для развития всей современной авиации. Его работы в этой области представляют собой одно из замечательнейших достижений русской науки. Кроме работ в области аэродинамики, С. А. Чаплыгин занимался и многими другими вопросами механики и прикладной математики. В этой книге собраны его работы, в которых он дал свой, ставший ныне классическим, метод приближённого решения дифференциальных уравнений.

ISBN 978-5-458-50418-8

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

О РАБОТАХ С. А. ЧАПЛЫГИНА ПО ПРИБЛИЖЁННОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Замечательный русский учёный — Сергей Алексеевич Чаплыгин создал вместе со своим учителем, «отцом русской авиации» Николаем Егоровичем Жуковским новую науку — аэродинамику и заложил основы для создания газовой динамики — теоретической базы для развития всей современной авиации. Его работы в этой области представляют собой одно из замечательнейших достижений русской науки.

Кроме работ в области аэродинамики, С. А. Чаплыгин занимался и многими другими вопросами механики и прикладной математики. В этой книге собраны его работы, в которых он дал свой, ставший ныне классическим, метод приближённого решения дифференциальных уравнений.

С. А. Чаплыгин начал заниматься вопросом о приближённом интегрировании дифференциальных уравнений в 1905 г. К этому времени относится его переписка с проф. В. П. Ермаковым об использовании для изыскания интегралов дифференциальных уравнений с остаточным членом теоремы, названной С. А. Чаплыгиным «обобщённой теоремой Ролля». 26 апреля 1905 г. С. А. Чаплыгин прочёл в Московском математическом обществе доклад «Приближённое интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка», без сомнения развивавший эти идеи.

С. А. Чаплыгин сам не публиковал эти свои работы, видимо считая их незавершёнными, пока они не распространены на уравнения n-го порядка. В его рукописях имеются наброски доказательства теоремы, обобщающей нужным образом теорему Ролля, однако полного доказательства этой теоремы в бумагах С. А. Чаплыгина найти не удалось.

Видимо, трудности, связанные с доказательством этой теоремы, заставили С. А. Чаплыгина искать других путей, в результате чего и был создан уже в советское время «Метод Чаплыгина», представляющий одно из наиболее выдающихся достижений советской науки в области прикладной математики.

Метод приближённого решения дифференциальных уравнений, созданный С. А. Чаплыгиным, был задуман им как метод, позволяющий удобно оценивать погрешность приближённого решения. Он заключается в том, что искомое решение дифференциального уравнения y всё более точно аппроксимируется двумя последовательностями функций y_n и Y_n, такими, что

$$y_n < y < Y_n.$$

Построение таких последовательностей, очевидно, позволяет приближённо решать дифференциальное уравнение с заранее известной степенью точности, определяемой разностью $Y_n - y_n$. Этого не даёт ни один из известных методов. Однако значение метода С. А. Чаплыгина не исчерпывается этим. Дело в том, что при построении последовательностей y_n и Y_n С. А. Чаплыгин использовал прием, представляющий собой обобщение на случай дифференциальных уравнений знаменитого «метода касательных», предложенного Ньютоном для решения алгебраических уравнений. Лишь сейчас становится ясным всё значение этой замечательной идеи — построения для решения функциональных уравнений метода, аналогичного самому сильному методу решения алгебраических уравнений — методу Ньютона.

Метод С. А. Чаплыгина, опубликованный им в 1919—1920 гг., некоторое время оставался мало известным, так как соответствующие статьи были помещены в изданиях, не имевших большого распространения. В 1932 году эти статьи были переизданы в Трудах Центрального аэрогидродинамического института им. Н. Е. Жуковского и сразу же привлекли к себе внимание. Академик Н. Н. Лузин обратил внимание на аналогию между методом А. С. Чаплыгина и методом Ньютона и показал, что для метода С. А. Чаплыгина имеет место такая же быстрая сходимость, как и для метода Ньютона (сходимость погрешности к нулю, начиная с некоторого n, имеет порядок 2^{-2n}). Вскоре метод С. А. Чаплыгина был распространён на интегральные уравнения и тем самым показано, что основные идеи С. А. Чаплыгина имеют универсальное значение для решения функциональных уравнений вообще. В последнее время эти идеи получили широкое развитие в работах Л. В. Канторовича, который показал, как можно построить метод решения весьма общего класса функциональных уравнений, аналогичный методу Ньютона. Но ещё и сейчас далеко не полностью использовано всё богатство оригинальных и глубоких идей, заложенных в этих замечательных работах С. А. Чаплыгина. Как и большинство его работ, работы по приближённому интегрированию дифференциальных уравнений, несомненно, ещё долго будут привлекать внимание исследователей и послужат источником новых изысканий в этом направлении.

М. В. Келдыш и Д. Ю. Панов

С. А. ЧАПЛЫГИН

Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений

ПРЕДИСЛОВИЕ

Приближённое интегрирование дифференциальных уравнений есть один из основных вопросов технической математики, а потому всякий шаг в этой области, если он даёт сколько-нибудь новое освещение процесса, представляет интерес. Вот почему я считал правильным собрать воедино свои работы по этому вопросу, частью помещённые в виде журнальных статей в периодической печати, частью изданные в виде отдельных брошюр. Все эти издания стали библиографической редкостью, а между тем, по моему мнению, в намеченном мною направлении работу следовало бы продолжить.

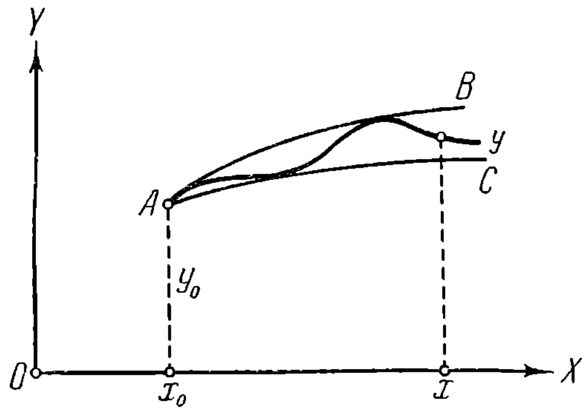
I. ОСНОВАНИЯ НОВОГО СПОСОБА ПРИБЛИЖЁННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Основная идея метода. При отыскании приближённого интеграла данного дифференциального уравнения обычно ставится один из двух вопросов: либо требуется с возможной точностью построить аналитическое выражение искомой функции, либо вычислить её числовую величину при заданном значении независимого переменного.

Для решения первого вопроса единственным, дающим практически удобный приём вычисления способом является разложение интеграла в ряд. Приём этот, однако, даже в простейших случаях, приводит обычно к чрезвычайно сложным, а при значительном числе подлежащих подсчёту членов — практически едва преодолимым трудностям вычисления, — обстоятельство тем более тягостное, что при пользовании лишь этим приёмом большею частью не оказывается возможным установить величину остающейся погрешности и узнать, насколько удовлетворительно разрешена поставленная задача.

Для отыскания числовых значений интеграла уравнения с числовыми коэффициентами известен ряд способов, наилучшим из которых нам представляется метод Адамса

(Adams)-Штёрмера (Störmer), позволяющий быстро подойти к решению достаточной точности. Пределы остающейся ошибки, однако, и при этого рода приёмах не устанавливаются с достаточной строгостью и точностью. Что же касается характера интегральной кривой, то её при этом приходится вычерчивать по точкам и, следовательно, лишь графически определять её ход, опять-таки без ясного представления о тех уклонениях от истинных значений ординат, которые при этом имеют место.



Фиг. 1.

Предлагаемый нами приём по идее существенно отличается от известных до сих пор. Мы ставим себе следующую задачу: по данному дифференциальному уравнению, разрешённому относительно высшей производной,

$$y^{(n)} - f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \qquad (1)$$

отыскать две функции, $z = z(x)$ и $u = u(x)$, равные искомому интегралу в начальной точке $x = x_0$, так, чтобы на прилегающем к этой точке участке соблюдалось двойное неравенство

$$z > y > u.$$