

Мостовской А.П.

Геометрия и система Mathematica

Учебное пособие

**Москва
Издательство Нобель Пресс**

УДК 51
ББК 22.1
М84

М84 **Мостовской А.П.**
Геометрия и система Mathematica: Учебное пособие / Мостовской А.П. – М.: Lennex Corp, — Подготовка макета: Издательство Нобель Пресс, 2014. – 309 с.

ISBN 978-5-519-01767-1

В данном пособии приведены примеры решения задач аналитической и дифференциальной геометрии с применением системы компьютерных вычислений Mathematica. Пособие будет полезно преподавателям, студентам физико-математических факультетов университетов, педагогических институтов при проведении практических занятий по геометрии, лабораторных занятий по практикуму на эвм, при написании курсовых и дипломных работ. Широкое распространение персональных компьютеров и таких программ как Mathematica делает материал данного пособия актуальным для образовательного процесса в вузе.

ISBN 978-5-519-01767-1

© Издательство Нобель Пресс, 2014
© Мостовской А.П., 2014

Введение

Данное пособие, предназначенное для студентов и преподавателей математических отделений педагогических университетов и институтов, позволяет органично объединить практические занятия по основным разделам аналитической и дифференциальной геометрии и обучение основам программирования в математическом пакете *Mathematica*.

Основное время на практических занятиях по аналитической или дифференциальной геометрии расходуется на составление уравнений прямых и плоскостей, вычисление производных, векторных произведений и определителей, решение систем уравнений и проведение других вычислительных операций, повторяющихся от задачи к задаче. Конечно, приобретение подобных навыков входит в программу обучения студентов, но в геометрии решение таких задач носит прикладной, непринципиальный характер. С другой стороны, усилия и время, потраченные на решение этих задач, отодвигают на второй план геометрический смысл задачи. Одна из целей данного пособия заключается в попытке свести к минимуму усилия, необходимые на решение прикладных задач. Для этой цели в пособии подробно рассматривается возможность применения к решению задач по аналитической и дифференциальной геометрии мощных средств компьютерных вычислений - математических пакетов.

В настоящее время существует множество программ с удобным интерфейсом, позволяющих производить численные и символьные вычисления при решении широкого класса задач. Наиболее распространенными математическими пакетами являются такие пакеты как *Mathematica*, *Maple*, *MathLab*, *MathCad*, *Gauss*, бесплатно распространяемая программа *wxMaxima* и другие программы. При первом знакомстве довольно трудно разобратся во всех программах и отличие одной программы от другой часто носит скорее эмоциональный, чем принципиальный характер. Программы решают один и тот же круг математических задач, имеют схожие интерфейсы.

Тем не менее, лидирующее положение среди математических пакетов занимает пакет *Mathematica*. Эта программа достаточно широко распространена во всем мире, она применяется в научных и инженерных исследованиях, в системе образования. Компания Wolfram Research, производящая систему *Mathematica*, активно работает над усовершенствованием программы. Ежемесячно выпускается журнал с обсуждением актуальных проблем, работает сайт в Интернете www.folfram.com, ведется активная работа с пользователями программы. На всемирных математических конгрессах (раз в четыре года) фирма Wolfram Research имеет свой стенд, а математики компании читают лекции и проводят семинарские занятия. В США, Японии и некоторых странах Западной Европе вузовская система образования тесно связана с системой *Mathematica*. Каждые два года проходит международный математический симпозиум по приложениям компьютерной алгебры в различных областях образования и исследований.

Программа *Mathematica* естественным образом интегрируется в систему математического образования не только будущих учителей математики, но и студентов технических и экономических специальностей. Основы работы с программой студенты могут освоить самостоятельно, либо на соответствующих факультативных занятиях, либо в рамках какой-нибудь дисциплины, на практикуме на ЭВМ. На втором курсе, например для будущих учителей математиков, читается курс "Информационные технологии в математике" цель которого подготовить студентов к работе с математическими пакетами и издательской системой ТрХ. Дифференциальная геометрия в педагогических университетах обычно изучается в третьем семестре. Поэтому, на втором курсе часть занятий по дифференциальной геометрии можно проводить с использованием программы *Mathematica* на практических занятиях по курсу "Информационные технологии в математике". К таким занятиям мож-

но отнести занятия, посвященные решению вычислительных задач на нахождение всевозможных кривизн кривой или поверхности, элементов канонической системы координат кривой или поверхности, уравнений различных видов кривых на поверхности (асимптотических линий, линий кривизны, геодезических линий). При этом можно построить не только изучаемую кривую или поверхность, но и выяснить расположение геометрических образов относительно друг друга.

Данное пособие написано в пакете *Mathematica* версии 6. Такие программы являются достаточно дорогими программами, и не каждый студент имеет к ним доступ. Адаптировать геометрические команды, представленные в пособии, для других версий *Mathematica* или для других программных продуктов, таких как *wxMaxima*, *MatLab* и др. является полезной и интересной задачей как для студентов, так и для преподавателей. Постановка таких и аналогичных задач может послужить хорошей основой для множества курсовых работ и дипломных проектов.

Пособие построено следующим образом. Каждый параграф начинается с краткого изложения теории. Затем рассматриваются несколько примеров с пошаговым, подробным решением с применением системы *Mathematica*. На основе разобранных примеров строится универсальная команда, решающая рассмотренные задачи. В заключении приводится список задач для самостоятельной работы.

При самостоятельном решении задач желательно разбирать каждый шаг, как это сделано в примерах, а построенной универсальной командой можно пользоваться при рассмотрении других, более общих задач. Какие вспомогательные задачи используются в примере или в той или иной команде, приводится в первой строке примера или команды в виде перечисления имен таких команд, например, $(*norm, bas*)$. Это запись означает, что перед рассмотрением примера или запуском команды, необходимо ввести команды *norm* и *bas*, построенные ранее.

При загрузке программы *Mathematica* становятся доступными команды ядра программы. Система *Mathematica* содержит в своем ядре более двух тысяч команд. Одна команда системы позволяет найти предел функции, интеграл, решить систему уравнений и многое другое. Объединение всех команд представляет собой язык программирования математических задач. В этом языке программирования присутствуют и традиционные для процедурного языка программирования команды, такие как команды цикла (*Do*, *For*, *While*), ветвления (*If*, *Which*, *Switch*). В Приложении 2 приведены основные встроенные в ядро команды программы *Mathematica*, в основном, встречающиеся в тексте пособия. Подробное объяснение каждой команды ядра с приведением примеров можно найти в программе помощи системы *Mathematica* (см. также [2], [8]). Для вызова описания команды, необходимо выделить команду и нажать клавишу F_1 .

Команды ядра можно дополнять командами пользователей. В каждой новой версии программы *Mathematica* многие команды расширения, присутствующие в ранних версиях программы, помещаются в ядро программы.

К командам расширения ядра программы можно отнести и геометрические команды, построенные в данном пособии. Их так же можно отнести к некоторому языку программирования геометрических задач.

Важно понимать пример, приводящий к команде. При этом, желательно разобрать каждый шаг решения. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Допустим, требуется программно найти старший индекс в следующей системе уравнений:

$$\text{In}[1]:= \text{eq} = \{\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{x}_6 == 0, 7\mathbf{x}_1 + 16\mathbf{x}_2 - 6 == 0\};$$

Для решения такой задачи достаточно написать две строчки команд:

$$\text{In}[2]:= \mathbf{h} = \text{Position}[\text{eq}, \text{Subscript}]/.\{0 -> 2\};$$

```
m = Extract[eq, h]
```

```
Out[2]= {3, 6, 1, 2}
```

В результате получили список индексов, из которого командой *Max* выбираем максимальный индекс.

```
In[3]:= Max[m]
```

```
Out[3]= 6
```

Как объяснить такой результат? Раз речь идет о части выражения, то надо вспомнить полную форму выражения, которая содержит все части выражения. Рассмотрим полную форму выражения *eq* (см. Приложение 2):

```
In[3]:= FullForm[eq]
```

```
Out[3]= List[Equal[Plus[Subscript[x,3],Times[2,Subscript[x,6]]],0],
  Equal[Plus[-6,Times[7,Subscript[x,1],Times[16,Subscript[x,2]]],0]]
```

Переменная с индексом, например, x^3 во внутреннем представлении системы имеет следующий вид: *Subscript[x, 3]*. Позиция первого заголовка *Subscript* в выражении *eq* есть (1, 1, 1, 0). Это значит, что *eq*[[1, 1, 1, 0]] есть заголовок *Subscript*:

```
In[4]:= eq[[1, 1, 1, 0]]
```

```
Out[4]= Subscript
```

Тогда *eq*[[1, 1, 1, 2]] есть второй аргумент первого *Subscript*, то есть первый индекс 3 системы *eq*.

```
In[5]:= eq[[1, 1, 1, 2]]
```

```
Out[5]= 3
```

Следующая команда находит позиции все заголовков *Subscript* в выражении *eq*.

```
In[6]:= h = Position[eq, Subscript]
```

```
Out[6]= {{1, 1, 1, 0}, {1, 1, 2, 2, 0}, {2, 1, 2, 2, 0}, {2, 1, 3, 2, 0}}
```

Для определения позиций всех индексов, сделаем замену в *h* - заменим 0 на 2 и получим список всех позиций индексов:

```
In[7]:= h = Position[eq, Subscript]/.{0->2}
```

```
Out[7]= {{1, 1, 1, 2}, {1, 1, 2, 2, 2}, {2, 1, 2, 2, 2}, {2, 1, 3, 2, 2}}
```

Зная позиции частей выражения, можно выбрать все эти части следующей командой:

```
In[8]:= Extract[eq, h]
```

```
Out[8]= {3, 6, 1, 2}
```

Пример 2. Разберем действие следующих команд.

```
In[1]:= s = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}};
```

```
x = Max[#]&/@Partition[Flatten[s2], 2]
```

```
Out[1]= {4, 16, 36}
```

Первая команда, входящая в *x*, возводит в квадрат все числа из списка *s*. Получается список, который обозначим буквой *a*:

```
In[3]:= a = s2
```

```
Out[3]= {{1, 4, 9}, {16, 25, 36}}
```

Следующая команда

```
In[4]:= q = Flatten[a]
```

убирает внутренние фигурные скобки списка *a*.

```
Out[4]= {1, 4, 9, 16, 25, 36}
```

Команда

```
In[5]:= p = Partition[q, 2]
```

группирует все элементы списка *q* в списки по 2 элемента

```
Out[5]= {{1, 4}, {9, 16}, {25, 36}}
```

Последняя команда¹, входящая в x , команда $/@$ (или `Map`) применяет так называемую чистую функцию $Max[\#]&$, к каждому элементу списка p :

```
In[6]:= Max[#]&/@p
Out[6]= {4, 16, 36}
```

Задачи для самостоятельной работы. Объяснить работу следующих команд.

1. `a = {}; Do[a = Append[a, i], {i, 1, 5}]; Apply[Dot, Reverse[a]]`
2. `Partition[Flatten[Map[Sin, #]&/@{{1, 2}, {3, 4}}], 1]`
3. `a = {3, -4, 2, -4, -7, 5, 6}; Position[a, First[Select[a, Negative]]]`

Отметим, что при копировании команды с pdf варианта книжки в ноутбук системы *Mathematica* ряд символов могут быть заданы другим кодом и команда не будет работать правильно.

Все геометрические команды книжки размещены на сайте www.books-vuzi.narod.ru.

¹Замену каждого элемента списка p значением функции $F[x]$ от элемента можно сделать командой *Map* (другое ее обозначение $/@$) по следующему правилу: $Map[F[\#]&, p]$ (или $F[\#]&/@p$).

Глава 1

Аналитическая геометрия

§1 Система координат

Аффинной системой координат в пространстве называется совокупность точки O и базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ векторов пространства и обозначается $R = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Координатами точки M в системе координат $R = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$ в базисе системы координат $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Обозначение координат: $M(x, y, z)$.

Аффинная система координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, где $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ - декартов (ортонормированный) базис, называется декартовой (прямоугольной) системой координат.

Аналогично определяются аффинная систем координат и координаты точек на плоскости.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ в аффинной системе координат $R = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Тогда

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (1)$$

в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Если система координат R - декартова, то модуль вектора или, что то же самое, длина отрезка

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2)$$

Если $M(x, y, z)$ - середина отрезка с концами в точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (3)$$

Везде ниже система координат декартова.

Пример 1. Найти длину отрезка ab , где¹

In[1]:= $\mathbf{a} = \{-3, 2, 4\}$; $\mathbf{b} = \{1, 5, 2\}$;

Воспользуемся формулой (2).

In[2]:= $\mathbf{ab} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (2 - 5)^2 + (4 - 2)^2}$

Out[2]:= $\sqrt{29}$

Определим команду, вычисляющую длину вектора. Пусть x - список координат вектора. Тогда $x[[1]]$, $x[[2]]$, ... - координаты вектора, а $Length[x]$ - число координат вектора. Так как длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат, то команду, вычисляющую длину вектора, можно записать в следующем виде:

¹В системе Mathematica для пользовательских обозначений лучше применять строчные буквы, так как некоторые прописных буквы (C , N , E и др.) заняты системой. Но, можно применять слова, содержащие прописные буквы: CN , N и др.

$$\text{In}[3] := \text{norm}[\mathbf{x}_-] := \sqrt{\sum_{i=1}^{\text{Length}[\mathbf{x}]} \mathbf{x}[[i]]^2}$$

Применение команды. Найдем еще раз длину отрезка ab как длину вектора $\overline{ab}$. Применяя формулу (1), найдем координаты вектора $\overline{ab}$.

$$\text{In}[4] := \overline{\mathbf{ab}} = \{-3 - 1, 2 - 5, 4 - 2\}$$

$$\text{Out}[4] = \{-4, -3, 2\}$$

Заметим, что вектор $\overline{ab}$ равен разности координат точек b и a :

$$\text{In}[5] := \overline{\mathbf{ab}} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

$$\text{Out}[5] = \{-4, -3, 2\}$$

Отсюда получаем.

$$\text{In}[6] := \text{norm}[\overline{\mathbf{ab}}]$$

$$\text{Out}[6] = \sqrt{29}$$

В дальнейшем, при вводе, черточку, обозначающую вектор, писать не будем.

Пример 2 (*norm*). Даны две противоположные вершины квадрата

$$\text{In}[1] := \mathbf{p} = \{2, 1\}; \mathbf{q} = \{-3, 4\}.$$

Найти координаты двух других вершин.

Для этого найдем координаты вектора $\overline{pq} : q - p = (-5, 3)$ и вычислим длину d диагонали квадрата.

$$\text{In}[2] := \mathbf{d} = \text{norm}[\mathbf{p} - \mathbf{q}]$$

$$\text{Out}[2] = \sqrt{34}$$

Найдем длину стороны квадрата.

$$\text{In}[3] := \mathbf{a} = \mathbf{d} / \sqrt{2}$$

$$\text{Out}[3] = \sqrt{17}$$

Пусть

$$\text{In}[4] := \mathbf{m} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$$

-неизвестная вершина квадрата. Тогда $pm = a$, $qm = a$. Записывая эти равенства в координатах, получим следующую систему уравнений:

$$\text{In}[5] := \mathbf{eq} = \{\text{norm}[\mathbf{m} - \mathbf{p}] == \mathbf{a}, \text{norm}[\mathbf{m} - \mathbf{q}] == \mathbf{a}\}$$

$$\text{Out}[5] = \{\sqrt{(-2 + x)^2 + (-1 + y)^2} == \sqrt{17}, \sqrt{(3 + x)^2 + (-4 + y)^2} == \sqrt{17}\}$$

Решаем систему:

$$\text{In}[6] := \mathbf{s} = \text{Solve}[\mathbf{eq}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}]$$

$$\text{Out}[6] = \{\{x - > -2, y - > 0\}, \{x - > 1, y - > 5\}\}$$

Находим координаты двух других вершин квадрата.

$$\text{In}[7] := \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} /. \mathbf{s}$$

$$\text{Out}[7] = \{\{-2, 0\}, \{1, 5\}\}$$

Пример 3 (*norm*). Написать уравнение сферы, проходящей через точки

$$\text{In}[1] := \mathbf{a} = \{1, 2, 3\}; \mathbf{b} = \{4, 2, 2\}; \mathbf{c} = \{2, 3, -3\}; \mathbf{d} = \{3, -2, 1\};$$

Пусть

$$\text{In}[2] := \mathbf{s} = \{\mathbf{x0}, \mathbf{y0}, \mathbf{z0}\};$$

-центр сферы. Расстояние $\text{norm}[\mathbf{s} - \mathbf{d}]$ от центра s до произвольной точки сферы d равно радиусу сферы r . Введем систему уравнений такие равенств для данных точек.

$$\text{In}[3] := \mathbf{eq} = \{\text{norm}[\mathbf{s} - \mathbf{a}] == \mathbf{r}, \text{norm}[\mathbf{s} - \mathbf{b}] == \mathbf{r},$$

$$\text{norm}[\mathbf{s} - \mathbf{c}] == \mathbf{r}, \text{norm}[\mathbf{s} - \mathbf{d}] == \mathbf{r}\}$$

$$\text{Out}[3] = \{\sqrt{(-1 + x0)^2 + (-2 + y0)^2 + (-3 + z0)^2} == r, \\ \sqrt{(-4 + x0)^2 + (-2 + y0)^2 + (-2 + z0)^2} == r, \\ \sqrt{(-2 + x0)^2 + (-3 + y0)^2 + (3 + z0)^2} == r, \\ \sqrt{(-3 + x0)^2 + (2 + y0)^2 + (-1 + z0)^2} == r\}$$

Получили систему уравнений относительно координат центра сферы и радиуса сферы. Решаем систему:

In[4]:= **m = Solve[eq, {x0, y0, z0, r}]**

Out[4]:= $\{\{r - > \frac{\sqrt{1739}}{12}, x0 - > \frac{19}{12}, y0 - > \frac{11}{12}, z0 - > -\frac{1}{4}\}\}$

В общее уравнение сферы подставим найденные координаты центра сферы и радиус и получим уравнение искомой сферы:

In[5]:= **(x - x0)² + (y - y0)² + (z - z0)² == r² /. m[[1]]**

Out[5]:= $(-\frac{19}{12} + x)^2 + (-\frac{11}{12} + y)^2 + (\frac{1}{4} + z)^2 == \frac{1739}{144}$

Задачи для самостоятельной работы.

1. При каком значении k треугольник с вершинами в точках $A(1, 3)$, $B(2, -1)$, $C(4, k)$ - равносторонний?

2. Даны диагональные точки квадрат $P(1, 1)$, $Q(-3, 1)$. Найти координаты двух других вершин.

3. Найти координаты вершины равностороннего треугольника $\triangle ABC$, если две его вершины даны: $A(1, 1)$, $B(2, -1)$.

4. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$.

5. Вычислить площадь треугольника $\triangle ABC$, если $A(2, 1)$, $B(3, 4)$, $C(1, 6)$.

6. Вершина C треугольника $\triangle ABC$ лежит на оси OX , $A(1, 2)$, $B(5, -1)$. Найти координаты точки C , если площадь треугольника $\triangle ABC$ равна 2.

7. Дан треугольник $\triangle ABC$, $A(2, -1, 4)$, $B(3, 2, -6)$, $C(-5, 0, 2)$. Вычислить длину медианы, проведенной из вершины A .

8. Написать уравнение сферы, проходящей через точки $a = (1, 2, 3)$, $b = (4, 2, 2)$, $c = (2, 3, -3)$ и касающейся координатной плоскости XOY .

9. Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ в аффинной системе координат $R = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. В системе Mathematica написать команду вычисления расстояния между точками AB .

§2 Скалярное произведение векторов

Координаты векторов в этом параграфе рассматриваются только в декартовом базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Скалярным произведением $\bar{a} \cdot \bar{b}$ векторов $\bar{a} = (x, y, z)$ и $\bar{b} = (x_1, y_1, z_1)$ называется число

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x x_1 + y y_1 + z z_1.$$

Для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и числа α справедливы следующие равенства:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$; 2) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$; 3) $(\alpha \bar{a}) \cdot \bar{b} = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{b})$; 4) $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}}$.

Число $\bar{a} \cdot \bar{a}$ обозначается $\bar{a}^2$ и называется скалярным квадратом вектора $\bar{a}$: $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a}$. Свойство 4) можно переписать так: $|\bar{a}|^2 = \bar{a}^2$.

Свойство 4) позволяет ввести команду, вычисляющую длину вектора, в следующем виде:

In[1]:= **norm[x_] := Sqrt[x.x]**

Для ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ скалярное произведение

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \angle(\bar{a}, \bar{b}), \quad (1)$$

где $\angle(\bar{a}, \bar{b}) \in [0, \pi]$ - угол между векторами.

Пример 1 (*norm*). Даны векторы $\bar{a} = (1, 3, -2)$, $\bar{b} = (5, -2, 4)$. Найти длину вектора $\bar{a}$, скалярное произведение и угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Введем координаты векторов.

In[2]:= **a** = {1, 3, -2}; **b** = {5, -2, 4};

Найдем длину вектора $\bar{a}$.

In[3]:= **norm**[a]

Out[3]= $\sqrt{14}$

Найдем скалярное произведение векторов.

In[4]:= **a.b**

Out[4]= -9

Выразим угол $\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$ между векторами из формулы (1).

In[5]:= $\varphi = \text{ArcCos}\left[\frac{\mathbf{a.b}}{\text{norm}[\mathbf{a}] \text{norm}[\mathbf{b}]}\right]$

Out[5]= $\text{ArcCos}\left[-\frac{3}{\sqrt{70}}\right]$

В дальнейшем удобно применять следующую команду вычисления угла между векторами:

In[6]:= (***norm***)
 $\text{angle}[\mathbf{x_}, \mathbf{y_}] := \text{ArcCos}\left[\frac{\mathbf{x.y}}{\text{norm}[\mathbf{x}] \text{norm}[\mathbf{y}]}\right]$

Вычислим еще раз угол φ , применяя введенную команду.

In[7]:= **angle**[a, b]

Out[7]= $\text{ArcCos}\left[-\frac{3}{\sqrt{70}}\right]$

Задачи для самостоятельной работы.

1. Вычислить $\sqrt{\bar{a}^2}$, $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{c} - \bar{d})$, если $\bar{a}(-1, 5)$, $\bar{b}(3, 5)$, $\bar{c}(-2, 8)$, $\bar{d}(3, 1)$.
2. Найти $\cos ABC$, если $\overline{AB} = (2, 2, 1)$, $\overline{BC} = (1, 4, 8)$.
3. Принять равенство (1) за определение скалярного произведения векторов. Написать команду вычисления скалярного произведения через координаты векторов в произвольном базисе.

§3 Ориентация плоскости, пространства

Рассмотрим два базиса плоскости $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ и $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$. Пусть

$$\begin{aligned}\bar{e}'_1 &= c_{11}\bar{e}_1 + c_{12}\bar{e}_2, \\ \bar{e}'_2 &= c_{21}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2.\end{aligned}\tag{1}$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

составленная из координат векторов базиса B' в базисе B , называется **матрицей перехода от базиса B к базису B'** . Так как базисные векторы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$ не параллельны, то $\det C \neq 0$. Поэтому либо $\det C > 0$, либо $\det C < 0$.

Базисы B и B' называются **одинаково (противоположно) ориентированными**, если определитель матрицы перехода от базиса B к базису B' положителен (отрицателен).

Отношение одинаковой ориентированности на множестве всех базисов разбивает это множество на два непересекающихся подмножества O_1, O_2 . Два базиса принадлежат к одному такому множеству, если они одинаково ориентированы и к разным, если они ориентированы противоположно.

Ориентацией плоскости называется различие между множествами O_1 и O_2 .

Установим одно такое различие следующим образом. Зафиксируем некоторый базис $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ (Рис.1) и назовем одинаково с ним ориентированные базисы **правыми**, остальные базисы назовем **левыми**. Введение правых базисов означает, что мы установили различие между множествами O_1 и O_2 или ввели ориентацию плоскости.

Аналогично можно ввести ориентацию пространства.

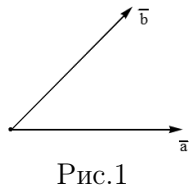


Рис.1

В ориентированном пространстве под ориентацией плоскости будем понимать следующее: плоскость π в пространстве будем считать ориентированной, если выбран и зафиксирован какой-нибудь вектор $\bar{n}$, не параллельный плоскости. Базис $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ плоскости π назовем правым (левым), если базис $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{n}\}$ - правый (левый) базис пространства.

Можно доказать, что одинаково ориентированные базисы можно перевести один в другой непрерывным изменением углов между векторами базисов и длин самих векторов так, что в каждый момент деформации изменяющиеся векторы одного базиса не были бы параллельными в случае плоскости или компланарными, в случае пространства.

Вспомогательная команда.

В дальнейшем нам понадобится команда сравнения двух переменных a и b или $x = a - b$ и 0 и возвращающая *False*, если x не является числом, возвращающая *True* если $x = 0$ или $x = 0$. или x есть не преобразованное выражение равное 0 (например, $\text{Cos}[w]^2 + \text{Sin}[w]^2 - 1$).

```
In[1]:= srav[a_, b_] := Rationalize[(a - b)/N//FullSimplify] === 0
```

Пример 1 (*srav*). Покажем на примерах действие введенной команды.

```
In[2]:= Clear[x]
        {0. == 0, 0. === 0, srav[0., 0], srav[x, 0]}
Out[2]= {True, False, True, False}
In[3]:= {Sin[x]^2 + Cos[x]^2 - 1 == 0, Sin[x]^2 + Cos[x]^2 - 1 === 0,
        srav[Sin[x]^2 + Cos[x]^2 - 1, 0]}
Out[3]= {Sin[x]^2 + Cos[x]^2 - 1 == 0, False, True}
```

Ориентированный угол между векторами.

Пусть на плоскости s введена ориентация векторов и выбран правый декартов базис $\{\bar{i}, \bar{j}\}$.

Ориентированным (или направленным) углом между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ плоскости s называется число

$$\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{cases} +\angle(\bar{a}, \bar{b}), & \text{если } \{\bar{a}, \bar{b}\} - \text{правый базис или } \bar{a} \uparrow \uparrow \bar{b}; \\ -\angle(\bar{a}, \bar{b}), & \text{если } \{\bar{a}, \bar{b}\} - \text{левый базис}; \\ \pm\pi, & \text{если } \bar{a} \uparrow \downarrow \bar{b}, \end{cases}$$

где $\angle(\bar{a}, \bar{b}) \in [0, \pi]$ - угол между векторами. Ориентированный угол $\angle(\bar{a}, \bar{b}) \in [-\pi, \pi]$.

Справедливы следующие свойства ориентированных углов: для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

- 1) $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = -\angle(\bar{b}, \bar{a})$,
- 2) $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \angle(\bar{a}, \bar{c}) + \angle(\bar{c}, \bar{b}) + 2\pi k$,

при этом $k = -1, 0, 1$ всякий раз подбирается так, чтобы правая часть в 2) принадлежала $[-\pi, \pi]$.

Пусть $\bar{a} = (x, y)$ в декартовом базисе $\{\bar{i}, \bar{j}\}$, $\alpha = \angle(\bar{i}, \bar{a})$ - направленный угол между векторами $\bar{i}$ и $\bar{a}$. Тогда

$$x = |\bar{a}| \cos \alpha, \quad y = \pm |\bar{a}| \sin \alpha,$$

где выбирается "+" , если базис $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ правый и "-" в противном случае.

Составим команду, например с именем *oangle*, вычисляющую ориентированный угол между векторами на координатной плоскости XOY или в пространстве. Будем считать, что координаты всех векторов заданы в правых базисах. Аргументами команды *oangle* будут списки координат векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и не обязательный аргумент вектор $\bar{p}$, задающий ориентацию плоскости векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в трехмерном случае. Аргумент $\bar{p}$ можно не писать в двумерном случае.

Так как система не позволяет изменять аргументы команды, то сразу же вводим копию $\bar{q}$ аргумента $\bar{p}$.

Поясним строение команды. Команда охватывает оба случая, плоскости и пространства. Если длина вектора $\bar{x}$ ($Length[x]$) равна 2, то рассматривается случай плоскости, координаты векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ добавляются третьей координатой, равной нулю, и новые векторы обозначаются $\bar{xv}$ и $\bar{yv}$, а вектору $\bar{q}$ присваиваются координаты $(0, 0, 1)$. Если длина вектора $\bar{x}$ равна 3, то $\bar{xv} = \bar{x}$, $\bar{yv} = \bar{y}$.

Далее находим решение s уравнения $\bar{xv} = t \bar{yv}$:

$$s = Solve[\bar{xv} == t \bar{yv}, t]. \quad (2)$$

Если векторы $\bar{xv}$, $\bar{yv}$ не параллельны, то уравнение (2) не имеет решения, $s = \{\}$ и ориентированный угол между такими векторами можно вычислить по формуле

$$Sign[Det[\{\bar{xv}, \bar{yv}, \bar{q}\}]] ArcCos\left[\frac{\bar{xv} \cdot \bar{yv}}{norm[\bar{xv}] norm[\bar{yv}]}\right],$$

здесь $Sign[Det[\{\bar{xv}, \bar{yv}, \bar{q}\}]]$ - знак определителя двумерной матрицы $\{\bar{xv}, \bar{yv}\}$ перехода от правого базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ к базису $\{\bar{xv}, \bar{yv}\}$ в двумерном случае ($\bar{q} = (0, 0, 1)$) и знак определителя трехмерной матрицы $\{\bar{xv}, \bar{yv}, \bar{q}\}$ перехода от правого базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ к базису $\{\bar{xv}, \bar{yv}, \bar{q}\}$ в трехмерном случае.

Если хотя бы один из векторов $\{\bar{xv}, \bar{yv}\}$ нулевой, то считается, что данные векторы сонаправлены, а ориентированный угол между ними равен 0.

Если векторы $\{\bar{xv}, \bar{yv}\}$ не нулевые и параллельны, то решение системы (2) в этом случае имеет вид $s = \{t -> a\}$. При этом, если коэффициент пропорциональности $a > 0$, то векторы $\{\bar{xv}, \bar{yv}\}$ сонаправлены, а при $a < 0$ векторы $\{\bar{xv}, \bar{yv}\}$ противоположно направлены. Отметим, что $s[[1, 2]]$ есть a .

Команда ветвления *Which* позволяет рассмотреть все эти случаи следующим образом.

```
In[1]:= (*norm, srav*)
oangle[x_, y_, p_...] :=
Block[{otvet, xv, yv, q = p},
If[Length[x] == 2,
xv = Append[x, 0]//FullSimplify;
yv = Append[y, 0]//FullSimplify;
q = {0, 0, 1},
xv = x//FullSimplify;
yv = y//FullSimplify];
```