

Марков Владимир Андреевич

**О функциях, наименее
уклоняющихся от нуля в данном
промежутке**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
В57

В57 **Владимир Андреевич М.**
О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке / Марков Владимир
Андреевич – М.: Книга по Требованию, 2023. – 117 с.

ISBN 978-5-519-95461-7

ISBN 978-5-519-95461-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг — не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель — вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания — решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

только численными множителями отличаются от функций, получающихся при рѣшеніи вышеупомянутыхъ вопросовъ Золотарева и перваго вопроса, разбираемаго А. А. Марковымъ въ мемуарѣ „Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева“, вопроса, который представляетъ обращеніе частнаго случая нашего (при $k = 1$). Особенное затрудненіе для дальнѣйшихъ изслѣдованій представляетъ функція, удовлетворяющая дифференціальному уравненію, обозначенному въ настоящемъ сочиненіи номеромъ (83), и выраженная Золотаревымъ чрезъ эллиптическія функціи. При изслѣдованіи этой функціи я пользуюсь не уравненіемъ (83), а системой уравненій (84).

При разсмотрѣніи основнаго вопроса второй главы, я касаюсь имѣющаго съ нимъ связь вопроса о распредѣленіи корней нѣкоторыхъ уравненій.

Въ §§ 17 и 23 даю двѣ теоремы, составляющія дополненіе къ извѣстной теоремѣ Чебышева, но существенно отличающіяся отъ нея тѣмъ, что ихъ нельзя распространять подобно этой теоремѣ на всякіе промежутки.

Вторая глава оканчивается составленіемъ искомыхъ функцій для случаевъ $k = n - 1$ и $k = n - 2$, причемъ для $n = 3$, а также для $n = 4$ и $k = 3$ всѣ выкладки проведены до конца.

Глава третья посвящена обращенію вопроса первой главы и теоремъ §§ 17 и 23 и, главнымъ образомъ, вопросу, представляющему обобщеніе втораго вопроса, рѣшеннаго А. А. Марковымъ въ мемуарѣ „Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева“, о розысканіи высшаго предѣла уклоненія отъ нуля въ данномъ промежуткѣ производной даннаго порядка k отъ цѣлой функціи степени не выше $n^{\text{ог}}$, если уклоненіе послѣдней отъ нуля въ томъ же промежуткѣ не превосходитъ даннаго положительнаго числа. Теорема § 34 даетъ весьма простой отвѣтъ на этотъ вопросъ. Въ прибавленіи я привожу доказательства послѣдней теоремы для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, которые я имѣлъ ранѣе общаго доказательства. Въ томъ же § 34 я доказываю мимоходомъ слѣдующую весьма простую и, если я не ошибаюсь, новую теорему алгебры.

Теорема. Если корни двухъ цѣлыхъ функцій $G(x)$ и $H(x)$ вещественные и перемежающіеся, то и корни ихъ производныхъ одного и того же, но накого угодно порядка k также перемежаются между собою.

Въ текстѣ эта теорема доказана для того случая, когда степени обѣихъ функцій одинаковы, но совершенно также она доказывается и для того случая, когда эти степени разнятся на единицу. Ее можно распространить и на тотъ случай, когда функціи $G(x)$ и $H(x)$ имѣютъ равные корни *).

§ 35 дополняетъ изслѣдованія главы второй.

*) Корень функціи $G(x)$ кратности l долженъ быть корнемъ функціи $H(x)$ кратности $l - 1$, l или $l + 1$.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
2	2	функціи вида (1) $\Psi(x)$	какой угодно функціи $\Psi(x)$ (непрерывной въ промежуткѣ (a, b))
48	7	$ z > \cos \frac{\pi}{n}$	$ z \geq \cos \frac{\pi}{n}$.

ГЛАВА I.

§ 1. Здѣсь мы будемъ заниматься функціями отъ одной переменн-
ной x вида

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n \quad (1),$$

гдѣ n данное цѣлое и положительное число, а

$$p_0, p_1, \dots, p_n$$

вещественные параметры, удовлетворяющіе уравненію

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n = \alpha \quad (2),$$

гдѣ

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha$$

данныя вещественныя числа, между которыми α и, по крайней мѣрѣ,
одно изъ остальныхъ чиселъ не равно нулю.

Эти функціи мы будемъ называть функціями вида (1).

Линейную функцію

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n$$

отъ коэффициентовъ какой угодно цѣлой функціи отъ x

$$\Phi(x) = P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + \dots + P_n$$

степени не выше $n^{\text{ой}}$ будемъ обозначать чрезъ

$$\omega(\Phi).$$

Наибольшую величину, которую получает численное значение функции вида (1) $\Psi(x)$, когда x изменяется въ некоторомъ промежуткѣ *) (a, b) отъ a до $b > a$, будемъ называть **уклоненіемъ** $\Psi(x)$ отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) .

Тѣ изъ функций вида (1), которымъ соотвѣтствуетъ наименьшая величина уклоненія отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) , будемъ называть **наименѣе уклоняющимися отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функциями вида (1) **).**

§ 2. Лемма. Пусть

$$y = f(x)$$

нѣкоторая функция вида (1), L ея уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) , а

$$x_1, x_2, \dots, x_p \quad (3)$$

всѣ различные корни уравненія

$$L^2 - y^2 = 0,$$

заключающіеся въ промежуткѣ (a, b) .

Если y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функция вида (1), то не существуетъ цѣлой функции отъ x степени не выше $n^{\text{оii}}$ $g(x)$ такой, что

$$\omega(y) = 0$$

и всѣ произведенія

$$g(x_1) f(x_1), g(x_2) f(x_2), \dots, g(x_p) f(x_p)$$

отрицательны.

Обратно, если такой функции $g(x)$ не существуетъ, то y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функция вида (1).

Доказательство. Если функция $g(x)$ существуетъ, то уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функции

$$y_1 = y - \varphi g(x),$$

*) Всѣ промежутки, о которыхъ будемъ говорить, будемъ предполагать включающими предѣлы.

**) Существованіе, по крайней мѣрѣ, одной такой функции очевидно.

которая принадлежит къ функціямъ вида (1), при достаточно маломъ положительномъ значеніи числа ρ меньше L .

Дѣйствительно, рассмотримъ разность

$$L^2 - y_1^2 = L^2 - y^2 - 2\rho yg(x) - \rho^2 g^2(x).$$

Такъ какъ

$$f(x_l) g(x_l) < 0, \quad l = 1, 2, \dots, p,$$

то можно найти столь малое положительное число δ , что ни въ одномъ изъ промежутковъ

$$(x_1 - \delta, x_1 + \delta), (x_2 - \delta, x_2 + \delta), \dots, (x_p - \delta, x_p + \delta) \quad (4)$$

не будетъ корней уравненія

$$yg(x) = 0.$$

Обозначимъ чрезъ M , μ , N и ν такіа положительныя числа, что

$$\left. \begin{aligned} g^2(x) &< M, \\ -2yg(x) &> \mu \end{aligned} \right\} \text{внутри промежутковъ (4),}$$

$$\left. \begin{aligned} |2yg(x)| + g^2(x) &< N, \\ L^2 - y^2 &> \nu \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{внутри промежутка } (a, b), \\ \text{но внѣ промежутковъ (4) *} \end{array}$$

и подчинимъ ρ условію быть меньше каждаго изъ чиселъ $1, \frac{\mu}{M}, \frac{\nu}{N}$.

Тогда внутри промежутка (a, b) , но внѣ промежутковъ (4)

$$L^2 - y_1^2 > \nu - \frac{\nu}{N} N = 0,$$

а внутри промежутковъ (4)

$$L^2 - y_1^2 > \rho \left(\mu - \frac{\mu}{M} M \right) = 0,$$

*) Численное значеніе какого угодно числа r мы обозначаемъ чрезъ $|r|$.

и, слѣдовательно, уклоненіе y_1 отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) менѣе L .

Если же функція $g(x)$ не существуетъ, то разность между какою угодно функціей вида (1) и y , по крайней мѣрѣ, для одного изъ чиселъ (3) не противнаго знака съ y , и, слѣдовательно, уклоненіе какой угодно функція вида (1) отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) не менѣе L .

§ 3. Теорема 1. Пусть

$$y = f(x)$$

нѣкоторая функція вида (1), не равная $\frac{\alpha}{x_n}$, L ея уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) , а

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

всѣ различные корни уравненія

$$L^2 - y^2 = 0 \quad (5),$$

закрывающіеся въ промежуткѣ (a, b) и расположенные въ возрастающемъ порядкѣ.

Пусть притомъ

$$F(x) = \prod_{l=1}^{l=p} (x - x_l) = \sum_{i=0}^{i=p} Q_i x^{p-i} \quad (6)$$

и

$$F_l(x) = \frac{F(x)}{x - x_l}, \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (7).$$

Если y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1), то въ ряду

$$\omega(F_1)(-1)^1 f(x_1), \omega(F_2)(-1)^2 f(x_2), \dots, \omega(F_p)(-1)^p f(x_p) \quad (8)$$

нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ, а при

$$p < n + 1,$$

кромѣ того,

$$\omega(F\psi) = 0 \quad (9),$$

какова бы ни была цѣлая функція $\psi(x)$ степени не выше $n - p^{\text{ол}}$.

Обратно, если въ ряду (8) нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ, а при $p < n + 1$, кромѣ того, имѣеть мѣсто уравненіе (9) для произвольной цѣлой функціи $\psi(x)$ степени не выше $n - p^{\text{ол}}$, то y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

Доказательство. Прежде всего замѣтимъ, что

$$p \leq n + 1,$$

такъ какъ y не можетъ быть постоянной и каждый корень уравненія (5), заключающійся въ промежуткѣ (a, b) и отличный отъ a и b , долженъ быть четной кратности.

Далѣе, какова бы ни была цѣлая функція $g(x)$ степени не выше $n^{\text{ол}}$, по формулѣ Лагранжа имѣемъ

$$g(x) = AF(x)R(x) + \sum_{l=1}^{l=p} \frac{g(x_l)}{F'(x_l)} F_l(x) \quad (10),$$

гдѣ A постоянное число, а $R(x)$ цѣлая функція степени не выше $n - p^{\text{ол}}$, если $p < n + 1$, въ случаѣ же, когда $p = n + 1$,

$$R(x) = 0.$$

Изъ (10) выводимъ

$$\omega(g) = A\omega(FR) + \sum_{l=1}^{l=p} \frac{g(x_l)}{F'(x_l)} \omega(F_l) \quad (11).$$

Если при $p < n + 1$ уравненіе (9) не имѣеть мѣста для произвольной цѣлой функціи $\psi(x)$ степени не выше $n - p^{\text{ол}}$, то можно подобрать функцію $R(x)$ такъ, чтобы было

$$\omega(FR) \geq 0,$$

а затѣмъ, полагая

$$g(x_l) = -f(x_l), \quad l = 1, 2, \dots, p,$$

распорядиться числом A такъ, чтобы было

$$\omega(g) = 0,$$

и, слѣдовательно, по леммѣ § 2 y не можетъ быть наименѣе уклоняющеюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціей вида (1).

Итакъ, если y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1) и $p < n + 1$, то уравненіе (9) имѣетъ мѣсто для произвольной цѣлой функціи $\psi(x)$ степени не выше $n - p^{\text{ол}}$.

А потому, если y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1), то формула (11) приведетъ къ

$$\omega(g) = \sum_{l=1}^{l=p} \frac{g(x_l)}{F'(x_l)} \omega(F_l) \quad (12).$$

Принимая же во вниманіе равенство

$$F'(x_l) = (-1)^{p-l} \prod_{m=1}^{m=l-1} (x_l - x_m) \prod_{m=l+1}^{m=p} (x_m - x_l),$$

заключаемъ, что если въ ряду (8) есть числа противныхъ знаковъ, то уравненію

$$\omega(g) = 0 \quad (13)$$

можно удовлетворить одновременно съ неравенствами

$$g(x_1) f(x_1) < 0, \quad g(x_2) f(x_2) < 0, \quad \dots, \quad g(x_p) f(x_p) < 0 \quad (14),$$

и, слѣдовательно, по леммѣ § 2 y не можетъ быть наименѣе уклоняющеюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціей вида (1).

Если же въ ряду (8) нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ, а при $p < n + 1$, кромѣ того, имѣетъ мѣсто уравненіе (9) для произвольной цѣлой функціи $\psi(x)$ степени не выше $n - p^{\text{ол}}$, то уравненію (13) нельзя удовлетворить одновременно съ неравенствами (14), и, слѣдовательно, по леммѣ § 2 y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

функція вида (1), уклоненіе которой отъ нуля въ промѣжуткѣ (a, b) равно $\left| \frac{\alpha}{\alpha_n} \right|$, и только такая будетъ наименѣе уклоняющеюся отъ нуля въ промѣжуткѣ (a, b) функціею вида (1).

Въ этомъ случаѣ, очевидно, α_n не равно нулю.

§ 5. Теорема 2. Если существуетъ болѣе одной наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промѣжуткѣ (a, b) функціи вида (1), то между наименѣе уклоняющимися отъ нуля въ промѣжуткѣ (a, b) функціями вида (1) найдется такая, численное значеніе которой въ промѣжуткѣ (a, b) достигаетъ своей наибольшей величины не болѣе чѣмъ для μ значеній x , гдѣ

$$\mu = \frac{n+2}{2} \text{ при } n \text{ четномъ}$$

$$\mu = \frac{n+1}{2} \text{ при } n \text{ нечетномъ;}$$

и если число этихъ значеній x равно μ , то при n четномъ между ними заключаются оба числа a и b , а при n нечетномъ по крайней мѣрѣ одно изъ этихъ чиселъ.

Доказательство. Пусть y одна изъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ промѣжуткѣ (a, b) функцій вида (1), L ея уклоненіе отъ нуля въ промѣжуткѣ (a, b) , а

$$x_1, x_2, \dots, x_p \tag{15}$$

всѣ различные корни уравненія

$$L^2 - y^2 = 0,$$

закрывающіеся въ промѣжуткѣ (a, b) . Пусть η другая наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промѣжуткѣ (a, b) функція вида (1).

Обозначимъ разность

$$\eta - y$$

чрезъ $v(x)$. Тогда изъ чиселъ (15) уравненію

$$v(x) = 0 \tag{16}$$