Л.Я. Окунев

Комбинаторные задачи на шахматной доске

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Л11

Л.Я. Окунев

Л11 Комбинаторные задачи на шахматной доске / Л.Я. Окунев – М.: Книга по Требованию, 2013. – 88 с.

ISBN 978-5-458-25188-4

Книжка содержит математическое исследование нескольких знаменитых комбинаторных задач на шахматной доске, как, например, задачи о восьми ферзях и задачи Эйлера о ходе коня. При этом автор пользуется лишь средствами элементарной математики. Несмотря на это решения многих задач отличаются большим изяществом, и изучение их доставляет истинное наслаждение. Книжка имеет большое образовательное значение. Рассчитана она главным образом на молодежь и может быть использована в работе математических и шахматных кружков. Для чтения книги требуется знание алгебры в объеме курса средней школы и наличие интереса к математике. При составлении книги использованы как работы старых авторов, так и новейшие исследования.

ISBN 978-5-458-25188-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

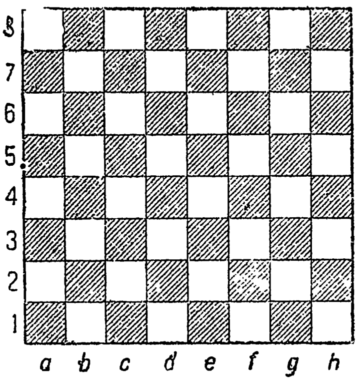
Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

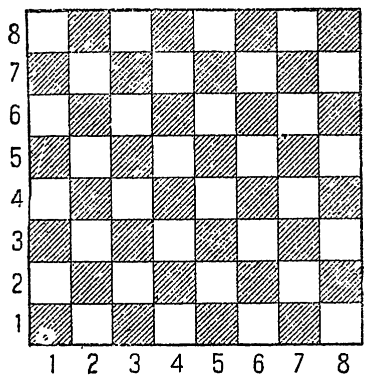
Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, шахматная доска или шашечница представляет собой квадрат, разбитый на 64 белых и черных квадратика, называемых клетками. Ради общности выводов мы будем рассматривать также квадратную шахматную доску, состоящую из n^2 клеток, и даже прямоугольную доску из pq клеток (p рядов по q клеток в каждом). На этих клетках в том или ином порядке располагают шахматные фигуры, и возникает естественный вопрос, каким образом можно записать расположение фигур. На практике весьма употребителен следующий способ записи: восемь колонн шахматной доски обозна-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

чают первыми буквами a, b, c, d, e, f, g, h латинского алфавита в порядке следования слева направо, а восемь строк занумеровывают в порядке следования снизу вверх числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (фиг. 1). Таким образом любой клетке будут соответствовать определенные буква и число — именно те, которыми обозначены колонна и строка, в которых эта клетка находится. Обратно, букве и числу будет соответствовать определенная клетка. Например, клетка $a1$ есть клетка, находящаяся в первой колонне и первой строке, т. е. левая нижняя угловая клетка.

Подобный способ записи годится для любых шашечниц. Однако для нас такой способ записи не является вполне приемлемым, так как нам необходимо добиться наиболее полного применения алгебры к решению тех или иных комбинаторных задач на шахматной доске. С этой целью попытаемся определить положение клеток с помощью чисел. Читатель, наверное, уже догадался, что вместо букв a, b, c, d, e, f, g, h надо ввести числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Действительно, тогда каждой клетке будет соответствовать пара чисел, и обратно. Эту пару чисел мы назовем координатами клетки, причем число, являющееся номером колонны, назовем абсциссой, а число, являющееся номером строки, — ординатой клетки. Например, клетка $b7$ в нашей новой записи будет обозначаться так: (2,7), причем 2 будет ее абсциссой, а 7 — ординатой (фиг. 2). Вообще если мы имеем клетку с координатами x, y (x — абсцисса, а y — ордината), то эту клетку запишем так: (x, y), причем внутри скобок всегда будем писать сначала абсциссу, а затем ординату. Очевидно, что эта запись положения клетки пригодна не только для шашечницы из 64 клеток, но и вообще для любой шахматной доски.

В процессе игры распределение фигур на доске постоянно меняется, и если мы захотим заняться исследованием законов распределения данной совокупности фигур, то неизбежно должны будем воспользоваться методами комбинаторного анализа. Как известно, комбинаторным анализом называется математическая теория, занимающаяся определением числа различных способов распределения данных предметов в известном порядке. Для дальнейшего понадобится уменье решать простейшие задачи этой теории, а именно определять числа размещений, перестановок и сочетаний. Мы приводим лишь определения и окончательные результаты, так как решение этих задач читатель может найти в любом учебнике элементарной алгебры.

Пусть дано n предметов. Так как природа этих предметов нас не интересует, мы можем занумеровать их в известном порядке и вместо n предметов рассматривать n чисел:

$$1, 2, 3, \ldots, n \tag{1}$$

и говорить только о числах.

Определение 1. *Размещениями из n чисел (1) по m называются такие группы чисел, которые можно составить из чисел (1) так, чтобы каждая группа заключала в себе m чисел и чтобы каждые две такие группы отличались друг от друга или числами или порядком их следования.*

Например, из трех чисел

$$1, 2, 3$$

можно составить шесть размещений по два числа в каждом:

$$1, 2;\quad 2, 1;\quad 1, 3;\quad 3, 1;\quad 2, 3;\quad 3, 2.$$

Обозначим знаком A_n^m число всех размещений из n чисел по m. Можно показать, что

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]. \qquad (2)$$

Определение 2. *Перестановками из n чисел называются размещения из n чисел (1) по n.*

Например, из трех чисел

$$1,\ 2,\ 3$$

можно составить всего шесть перестановок. Это будут:

$$1,\ 2,\ 3;\quad 1,\ 3,\ 2;\quad 3,\ 1,\ 2;\quad 2,\ 1,\ 3;\quad 2,\ 3,\ 1;\quad 3,\ 2,\ 1.$$

Обозначим через P_n число всех перестановок из n чисел. По определению имеем:

$$P_n = A_n^n.$$

Поэтому из (2) следует:

$$P_n = n(n-1)\ldots[n-(n-1)] = n(n-1)\ldots2\cdot1 = 1\cdot2\cdot3\ldots n,$$

т. е. P_n равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n. В математической литературе это произведение называется n-факториалом и часто обозначается сокращенно знаком $n!$. Итак,

$$P_n = n! \qquad (3)$$

Например,

$$P_3 = 3! = 1\cdot2\cdot3 = 6.$$

И действительно, как мы видели выше, из трех чисел можно составить всего шесть перестановок.

В заключение дадим определение сочетания.

Определение 3. *Сочетаниями из n чисел по m называются такие размещения из n чисел по m, которые отличаются друг от друга по крайней мере одним числом.*

Например, из четырех чисел 1, 2, 3, 4 можно составить такие сочетания по 3:

$$1,\ 2,\ 3;\quad 1,\ 2,\ 4;\quad 1,\ 3,\ 4;\quad 2,\ 3,\ 4.$$

Число C_n^m сочетаний из n чисел по m выражается следующей формулой:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{1\cdot2\cdot3\ldots m}. \qquad (4)$$

Глава первая

ЗАДАЧА О ВОСЬМИ ФЕРЗЯХ

1 июня 1850 г. в «Иллюстрированной газете» под рубрикой «Шахматы» была напечатана следующая задача:

Расставить восемь ферзей на шашечнице так, чтобы ни один ферзь не угрожал другому.

Несколько позже (29 июля 1850 г.) там же было указано число 60 как число возможных решений задачи, но в действительности решений оказалось больше, и уже в сентябре того же года было напечатано истинное число всех решений, 92.

Знаменитый математик Гаусс, читавший «Иллюстрированную газету», заинтересовался этой задачей и в своей переписке с другим математиком, Шумахером, неоднократно упоминает о ней. Очень скоро Гаусс нашел 72 решения задачи. Любопытно отметить, что Гаусс сомневался в правильности числа 92 как числа всех решений.

В современной постановке задача формулируется в следующем общем виде:

На квадратной шашечнице из n^2 клеток расставить n ферзей так, чтобы ни один не угрожал другому. Определить число всех решений.

Эта задача оказалась настолько трудной, что до сих пор не найдено общих методов ее решения, несмотря на то, что целый ряд математиков безуспешно пытался ее решить. О характере трудностей мы поговорим несколько ниже, а пока заметим, что задачу этого типа можно сформулировать не только для ферзей, но и для других фигур, а именно для ладей и слонов, но в этих случаях решение может быть получено несравненно легче. Поэтому мы и начнем нашу главу разбором этих простейших случаев.

1. Задача о ладьях

Нам предстоит определить число всех таких расположений n ладей на шашечнице из n^2 клеток, при которых ни одна ладья не угрожает другой. Кроме того, мы попутно укажем метод, позволяющий найти все расположения ладей этого рода. Решение задачи, как мы сейчас увидим, не представляет особого труда.

Пусть n ладей расположено на шашечнице так, что ни одна ладья не может бить другую.

Пользуясь способом записи клеток при помощи пар чисел, мы можем это расположение ладей представить следующим образом:

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_n, b_n). \tag{1}$$

Очевидно, что в одной колонне две ладьи стоять не могут, так как иначе они будут угрожать друг другу. Следовательно, все числа $a_1, \ldots, a_n$ должны быть различны. Например, равенство $a_1 = a_2$ невозможно, ибо в таком случае ладья (a_1, b_1) окажется в одной колонне с ладьей (a_2, b_2). Итак, должно быть

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Но эти n чисел могут принимать только значения целых чисел от 1 до n, а потому

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_3 = 3, \quad \ldots, \quad a_n = n,$$

т. е. (1) можно переписать так:

$$(1, b_1), \quad (2, b_2), \quad \ldots, \quad (n, b_n). \tag{2}$$

Точно так же и в одной строке не могут стоять две ладьи, а потому числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ все различны. Так как эти n чисел могут принимать значения от 1 до n, то среди чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ должны встретиться все числа $1, 2, 3, \ldots, n$. Иными словами, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ есть не что иное, как числа $1, 2, 3, \ldots, n$, расположенные в каком-то порядке, быть может и не в натуральном. Таким образом, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ является *перестановкой* всех чисел от 1 до n (см. введение). Обратно, образуя из n чисел перестановку $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и составив ряд (2), получим такое размещение ладей, при котором ни одна ладья не может угрожать другой. Действительно, тогда в каждой колонне и в каждой строке шашечницы будет находиться только одна фигура. Итак, существует столько решений нашей задачи, сколько можно составить перестановок из n чисел, и этим исчерпываются все решения, т. е. мы имеем:

$$P_n = n!$$

всех решений (см. введение). В частности, для обыкновенной шашечницы $n = 8$ и $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$ — довольно значительное число. Все эти решения можно получить, составляя всевозможные перестановки из восьми чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. \tag{3}$$

Мы не собираемся здесь заниматься утомительной и бесполезной задачей составления 40 тысяч решений, а ограничимся только тремя решениями. Самой простой перестановкой чисел (3) является, очевидно, расположение в порядке возрастания, т. е. перестановка

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

Она приводит к следующему решению:

$$(1,\ 1);\quad (2,\ 2);\quad (3,\ 3);\quad (4,\ 4);\quad (5,\ 5);\quad (6,\ 6);\quad (7,\ 7);\quad (8,\ 8),$$

или в обычной шахматной записи:

$$a1;\quad b2;\quad c3;\quad d4;\quad e5;\quad f6;\quad g7;\quad h8,$$

т. е. все ладьи расположены на главной черной диагонали. Другое решение получим, взяв перестановку

$$8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,$$

а именно получим:

$$(1,\ 8);\quad (2,\ 7);\quad (3,\ 6);\quad (4,\ 5);\quad (5,\ 4);\quad (6,\ 3);\quad (7,\ 2);\quad (8,\ 1),$$

или

$$a8;\quad b7;\quad c6;\quad d5;\quad e4;\quad f3;\quad g2;\quad h1,$$

т. е. все ладьи находятся на главной белой диагонали.

Наконец, составив, например, перестановку

$$2,\ 1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 4,$$

получим:

$$(1,\ 2);\quad (2,\ 1);\quad (3,\ 3);\quad (4,\ 5);\quad (5,\ 6);\quad (6,\ 7);\quad (7,\ 8);\quad (8,\ 4),$$

или

$$a2;\quad b1;\quad c3;\quad d5;\quad e6;\quad f7;\quad g8,\quad h4.$$

Предлагаем читателю самостоятельно разыскать какие-либо другие решения.

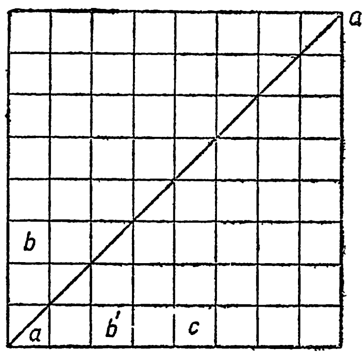
Усложним несколько задачу о ладьях, а именно потребуем дополнительно, чтобы ни одна фигура не стояла на главной черной диагонали. Это добавление уже значительно затрудняет решение задачи. Один из величайших математиков XVIII века, Эйлер, пытался определить число Q_n всех расположений n ладей на шашечнице из n^2 клеток, не стоящих на главной черной диагонали и не угрожающих друг другу, но он установил только соотношение:

$$Q_n = (n-1)(Q_{n-1} + Q_{n-2}), \tag{4}$$

с помощью которого, зная Q_{n-1} и Q_{n-2}, можно определить Q_n.

Правда, пользуясь формулой (4), можно для данного n постепенно вычислить Q_n, но общая формула для Q_n этим еще не определяется. Это общее выражение Q_n сравнительно недавно было найдено с помощью символического исчисления, и только после этого было дано элементарное решение задачи.

Выведем сперва формулу (4). В каждой колонне должна находиться одна и только одна фигура. Допустим для определенности, что в первой колонне ладья стоит на клетке b (фиг. 3). Вообще же ладья может занимать $(n-1)$ положений, так как угловая клетка лежит на главной черной диагонали и потому исключается. Возможны только следующие два случая:



Фиг. 3.

a) В первой строке имеется фигура b', симметричная с b относительно диагонали aa'. Иными словами, абсцисса клетки b' равна ординате клетки b (фиг. 3).

Тогда, уничтожая строки и колонны, проходящие через b и b', получим шашечницу из $(n-2)^2$ клеток, на которой расположены $(n-2)$ остальные фигуры, причем эти ладьи можно разместить на получившейся шашечнице Q_{n-2} способами. Но b может занимать $(n-1)$ положений в первой колонне. Поэтому будем иметь всего $(n-1)\,Q_{n-2}$ расположений типа а).

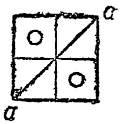
b) В первой строке стоит фигура c, не симметричная с b относительно диагонали aa'. Переставим между собой колонны, содержащие b и c. После такой перестановки c займет положение a, а b окажется на недиагональной клетке. Уничтожая затем строку и колонну, проходящие через a, получим шашечницу из $(n-1)^2$ клеток и на ней $(n-1)$ ладей, не угрожающих друг другу и не находящихся на главной диагонали. Следовательно, всего размещений типа b) будет $(n-1)\,Q_{n-1}$.

Так как этими случаями исчерпываются все возможные случаи, то

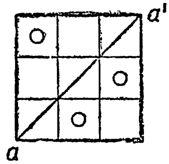
$$Q_n = (n-1)\,Q_{n-2} + (n-1)\,Q_{n-1},$$

или, вынося $(n-1)$ за скобку, получим равенство (4) Эйлера.

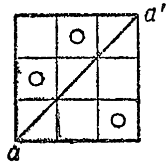
Теперь постараемся выразить Q_n через n. Как мы выше указали, существует два решения: элементарное и с помощью методов символического исчисления. Мы ограничимся здесь только первым, а второе решение интересующийся может найти в добавлении [1]. Прежде всего непосредственно можно убедиться, что $Q_2=1$ и $Q_3=2$. В самом деле, на шашечнице из четырех клеток можно расставить ладьи только одним единственным способом (фиг. 4; ладьи обозначены кружочками), а на шашечнице из девяти клеток — двумя способами (фиг. 5 и 6).



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Обратим внимание на следующий факт: если к $3Q_2$ прибавить $(-1)^3$, то получится как раз Q_3. Покажем, что этот факт имеет место для любого Q_n, т. е. что

$$Q_n = n\,Q_{n-1} + (-1)^n. \tag{5}$$

Вполне достаточно показать, что если справедливо равенство

$$Q_k = k\,Q_{k-1} + (-1)^k \tag{6}$$

для всех $k \leqslant n-1$, то равенство (5) также имеет место. Для этого переписываем равенство (4) так:

$$Q_n = (n-1)\,Q_{n-2} + (n-1)\,Q_{n-1}.$$

Согласно (6):

$$Q_{n-1} = (n-1)\,Q_{n-2} + (-1)^{n-1},$$

отсюда:

$$(n-1)\,Q_{n-2} = Q_{n-1} - (-1)^{n-1} = Q_{n-1} + (-1)^n.$$

Подставляя это значение $(n-1)\,Q_{n-2}$ в выражение Эйлера для Q_n, получим:

$$Q_n = [Q_{n-1} + (-1)^n] + (n-1)\,Q_{n-1} =$$
$$= [(n-1)\,Q_{n-1} + Q_{n-1}] + (-1)^n = n\,Q_{n-1} + (-1)^n,$$

т. е. равенство (5) [2].

---

[1] См. добавление, § 16.

[2] Метод, которым мы доказали равенства (5) или (6), называется методом математической индукции.

Он основан на следующем принципе: пусть некоторое правило [например формула (6)] верно для $k=1$; пусть, каждый раз, когда это правило ока-

Теперь без труда можно получить выражение Q_n через n. Для этой цели делим обе части (5) на $n!$

$$\frac{Q_n}{n!}=\frac{nQ_{n-1}}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!},$$

или, по сокращении:

$$\frac{Q_n}{n!}=\frac{Q_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Полагая n последовательно равным n, $(n-1)$, $(n-2),\ldots,3$, будем иметь ряд равенств:

$$\frac{Q_n}{n!}=\frac{Q_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!};$$

$$\frac{Q_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{Q_{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$\frac{Q_{n-2}}{(n-2)!}=\frac{Q_{n-3}}{(n-3)!}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!};$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{Q_3}{3!}=\frac{Q_2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}$$

Складывая все эти равенства, мы после некоторых сокращений получим искомую формулу:

$$\frac{Q_n}{n!}=\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{Q_2}{2!},$$

или, помножив обе части на $n!$, заменяя Q_2 единицей и переписывая правую часть в обратном порядке, получим окончательно:

$$Q_n=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right). \qquad (7)$$

зывалось верным для всех целых положительных чисел $k<n$, оно оказывается верным для $k=n$; тогда наше правило верно для всех целых положительных значений k.

В самом деле. Оно верно для $k=1$, т. е. для всех целых k, меньших 2. Но тогда по условию оно верно для $k=2$.

Поскольку это правило верно для $k=1$ и для $k=2$, т. е. для всех целых чисел k, меньших 3, оно верно и для $k=3$; но раз оно верно для $k=1, 2, 3$, то оно верно для $k=4$. Таким же образом мы последовательно убеждаемся в верности нашего правила для $k=5, 6, 7,\ldots$ Мы делаем сразу заключение, что наше правило верно для всех целых положительных чисел k.

По этой формуле для обыкновенной шашечницы (полагая $n=8$) получим:

$$Q_8 = 8!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)=14\,833$$

решений типа Эйлера

2. Задача о слонах

Определение числа F_n всех расстановок n слонов на шашечнице из n^2 клеток значительно сложнее предыдущей задачи с ладьями. До сих пор еще неизвестна общая формула числа этих расстановок [1], хотя некоторые методы здесь имеются. Относительно обыкновенной доски из 64 клеток задача была решена французским математиком Перротом, и мы в этом параграфе приведем изложение его решения, но ради простоты ограничимся доской из 16 клеток.

Назовем слона черным, если он стоит на черной клетке шашечницы, и белым, если он стоит на белой клетке. Очевидно, что требуемым образом можно расставить три белых и одного черного слона, два белых и два черных слона и т. д. Далее ясно, что k ($k \leqslant 3$) одноцветных слонов можно расставить так, чтобы ни один слон не угрожал другому. Обозначим через f_k число подобных расстановок. Произведение $f_k f_s$ ($k+s \leqslant 4$) означает, сколькими способами можно расставить k белых, s черных или s черных и k белых слонов так, чтобы они не угрожали друг другу. Отсюда получаем:

$$F_4 = f_3 f_1 + f_2 f_2 + f_1 f_3 = 2 f_1 f_3 + f_2^2.$$

Поэтому все сводится к определению чисел f_1, f_2, f_3. Как же подсчитать эти числа? Отметим крестиками все одноцветные клетки шашечницы, например белые клетки. Получим такую схему (фиг. 7). Повернем затем шахматную доску на 45° по часовой стрелке. Тогда крестики примут следующее положение (фиг. 8).

Движение белого слона на шашечнице (фиг. 8) уже ничем не будет отличаться от движения ладьи. Поэтому мы приходим к такой задаче:

Сколькими способами можно расставить k ладей ($k=1, 2, 3$) на шашечнице (фиг. 8) из восьми клеток так, чтобы ни одна ладья не угрожала другой?

---

[1] Сравнительно недавно эта задача была полностью решена С. Е. Аршоном. Его результаты будут опубликованы в сборнике «Математическое просвещение» № 8