М. Лоэв

Теория вероятностей

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М. Лоэв
М11 Теория вероятностей / М. Лоэв – М.: Книга по Требованию, 2024. – 718 с.

ISBN 978-5-458-31380-3

Книга представляет собой обширный систематический курс современной теории вероятностей, написанный на высоком теоретическом уровне. На базе теории меры автор изучает случайные события, случайные величины и их последовательности, функции распределения и характеристические функции, предельные теоремы теории вероятностей и случайные процессы. Изложение сопровождается большим количеством задач разной степени трудности. Русское издание выпускается в переводе со второго английского издания, а также с учетом изменений, любезно присланных автором.Книга рассчитана на студентов и аспирантов-математиков, изучающих теорию вероятностей. Может быть полезна физикам-теоретикам, желающим совершенствовать свои знания по теории вероятностей.

ISBN 978-5-458-31380-3

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга предназначена служить учебником для аспирантов и справочной книгой для научных работников, занимающихся теорией вероятностей и математической статистикой. Предполагается, что читатель свободно владеет курсом математического анализа. Содержание книги охватывает программу примерно трех или четырех семестров старших курсов. Вводная часть может служить учебником курса элементарной теории вероятностей для студентов.

Основания теории вероятностей излагаются в:

вводной части, в которой рассматриваются без развитого математического аппарата некоторые простые понятия и задачи;

первой части, посвященной теории меры, необходимой для каждого специалиста по теории вероятностей и математической статистике;

второй части, где изучаются общие понятия и аппарат теории вероятностей.

Случайные последовательности, общие свойства которых даны в основаниях, изучаются затем в:

третьей части, в которой исследуется независимость в основном суммы независимых случайных величин и их предельные свойства;

четвертой части, в которой исследуются условные распределения и предельные свойства зависимых случайных величин. В последнем параграфе вводятся случайные функции второго порядка.

Случайные функции и процессы изучаются в:

пятой части, посвященной основным понятиям случайного анализа, мартингалам, процессам с независимыми приращениями и марковским случайным функциям.

Поскольку основная цель книги учебная, в ней произведены следующие подразделения:

разделы, не отмеченные звездочкой, составляют основное содержание и не зависят от остальной части книги;

разделы, отмеченные звездочкой, содержат более сложный или более отвлеченный материал;

разделы под названием «дополнения и уточнения» состоят из некоторых предложений, для доказательства которых обычно приведены указания; большинство этих предложений можно найти в статьях и книгах, приведенных в библиографии.

На содержание этой книги оказали большое влияние отзывы студентов, которым ежегодно читались автором лекции. Однако изложение в книге гораздо более сжато, чем в лекциях, и читатель должен быть постоянно вооружен терпением, бумагой и анализом. Кроме того, в математике, так же, как в любом другом виде поэзии, читатель должен быть поэтом в душе.

Во второе издание в отличие от первого (1955 года) добавлена новая пятая часть и внесено много мелких изменений в другие части книги.

Я пользуюсь здесь случаем, чтобы поблагодарить тех, чьи замечания и критика привели к улучшению изложения и исправлению неточностей: Э. Баранкина, С. Бохнера, Э. Парзена и Г. Роббинса — за первое издание, И. С. Чоу, Р. Когбэна, Дж. Л. Дуба, Дж. Фельдмана, Б. Джеймсона, Дж. Каруша, П. А. Мейера, Дж. В. Пратта, Б. А. Севастьянова, Дж. В. Уолла — за второе издание. Особенно я благодарен Когбэну за постоянную неоценимую помощь в подготовке второго издания. Это второе издание, так же как и первое, написано при частичной поддержке Бюро морских исследований.

1 июня 1960 г.
Бэркли, Калифорния

М. Лоэв

Вводная часть

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей занимается математическим анализом такого интуитивного понятия, как «случай», или «случайность», которое, как и все понятия, возникло из опыта. Идея о количественных закономерностях случайности возникла впервые за игорным столом, а теория вероятностей начала развиваться Паскалем и Ферма (1654) как теория азартных игр. С тех пор понятие случайности проникло почти во все области знаний. В частности, то открытие, что физические «наблюдаемые» (даже те, которые описывают поведение элементарных частиц) должны рассматриваться как объекты, подчиняющиеся законам случайности, делает изучение понятия случайности основным во всей проблеме рациональной интерпретации окружающего нас мира.

Теория становится математической, когда она выдвигает математическую модель связанных с нею явлений, т. е. когда при описании явлений пользуются набором строго определенных символов и операций над этими символами. С ростом числа явлений и известных их свойств развивается и математическая модель—от первоначальных неопределенных понятий, на которых основывалась наша интуиция, в направлении все большей общности и отвлеченности.

В силу этих обстоятельств внутренняя непротиворечивость модели случайных явлений стала уже сомнительной, и это заставило во второй четверти этого столетия перестроить всю теорию, отправляясь от аксиом и определений. Так появилась отрасль чистой математики — теория вероятностей, имеющая дело с построением и исследованием математической модели случайности самой по себе.

Вводная часть (от которой другие части книги не зависят) имеет целью показать «интуитивный смысл» понятий и задач теории вероятностей. Анализируя кратко некоторые представления, возникшие из повседневного опыта, особенно из области азартных игр, мы придем сначала к построению некоторой элементарной аксиоматической модели; при этом мы предоставляем читателю подбор иллюстраций с бросанием монет, костей, карточными играми, стрельбой в цель и т. д. Затем мы применим эту аксиоматическую модель к точному описанию и строгому изучению нескольких «интуитивных понятий», связанных со случайностью. При этом не возникнет необходимости прибегать к какому-либо специальному математическому аппарату, в то время как в неэлементарной модели значительную роль играют понятия теории меры и преобразование Фурье—Стильтьеса.

I. ИНТУИТИВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ТЕОРИИ

1. События. Первоначальное понятие при изучении окружающего нас мира — понятие *события*. Событие определяется тем, происходит или не происходит некоторое явление. Абстрактное понятие события имеет отношение лишь к тому, произошло оно или нет, а не к его природе. Именно это понятие мы и собираемся исследовать. Мы будем обозначать события буквами $A, B, C, \ldots$, иногда снабжая их индексами.

Каждому событию A можно поставить в соответствие противоположное событие «*не-A*», обозначаемое A^c; событие A^c происходит тогда и только тогда, когда A не происходит. Событие может вызывать появление другого события; *A влечет за собой B*, если при появлении события A обязательно происходит событие B; мы будем это записывать так: $A \subset B$. Если A влечет за собой B и в то же время B влечет за собой A, то мы говорим, что A и B *эквивалентны*; в этом случае будем писать $A=B$. Два эквивалентных события могут иметь различную природу, однако мы можем и будем их отождествлять до тех пор, пока нас интересует только вопрос, осуществляются эти события или нет. С помощью операций, выражаемых словами «и», «или» и «не-», из одних событий можно получать другие новые события.

Событие «*A и B*» происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B; мы обозначим его $A \cap B$ или просто AB. Если AB не может произойти (т. е. если A происходит, то B не происходит и если B происходит, то A не происходит), мы говорим, что события A и B *несовместны* (исключают друг друга, являются взаимно исключающими).

Событие «*A или B*» происходит тогда и только тогда, когда происходит по крайней мере одно из событий A, B; мы обозначим его $A \cup B$. Знак $\cup$ мы будем заменять знаком $+$ тогда и только тогда, когда A и B несовместны. Аналогично можно составлять события с помощью «и» и «или» из нескольких событий; будем писать в этом случае $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, или $A_1 A_2 \ldots A_n$, или $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$; $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, или $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$; $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, или $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Существуют два составных события, которые могут рассматриваться как «крайние события», т. е. как «первое» и «последнее» события в смысле отношения «влечет за собой». События вида $A+A^c$ представляют собой, как говорят, «достоверность», так как они всегда осуществляются. Каково бы ни было A, события $A+A^c$ и те события, которые они влекут за собой, эквивалентны, поэтому все такие события должны быть отождествлены; полученное таким образом событие назовем *достоверным событием* и обозначим Ω. Аналогично о событиях вида AA^c и событиях, которые влекут их за собой, можно сказать, что они символизируют «невозможность», так как они никогда не происходят; поэтому они должны быть отождествлены; полученное таким образом событие будем называть *невозможным событием* и обозначать $\varnothing$. Таким образом, определение несовместности событий A и B может быть записано в виде $AB=\varnothing$. Невозможное и достоверное события являются «первым» и «последним» событиями, так как, каково бы ни было событие A, мы имеем $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

Обращаясь к объясненному выше в терминах «происходить» и «не происходить» смыслу символов $\subset$, $=$, $\cap$, $\cup$, мы легко получаем следующие соотношения:

если $A\subset B$, то $B^c\subset A^c$, и обратно;

$$AB=BA,\ A\cup B=B\cup A;$$

$$(AB)C=A(BC),\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$

$$A(B\cup C)=AB\cup AC,\ A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C);$$

$$(AB)^c=A^c\cup B^c,\ (A\cup B)^c=A^cB^c,\ A\cup B=A+A^cB$$

и вообще

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)^c=\bigcup_{k=1}^{n}A_k^c,\quad \left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)^c=\bigcap_{k=1}^{n}A_k^c$$

и т. д.

Это напоминает нам правила действий над множествами. С точки зрения теории множеств Ω — пространство, в котором лежат множества $A, B, C, \ldots$; $\varnothing$ — *пустое* множество; A^c — *дополнение* к множеству A; AB — *пересечение*; $A\cup B$ — *объединение* множеств A и B; $A\subset B$ означает, что A содержится в B.

В научных исследованиях, или, более точно, при изучении «законов природы», события разделяются на «условия» и «исходы» эксперимента. *Условия* эксперимента — это известные нам события или события, которые тем или иным способом осуществляются экспериментатором. *Исходы* эксперимента — это события, которые *могут* произойти, когда производится эксперимент, т. е. когда осуществляются соответствующие условия. Все (конечные) комбинации исходов, образуемые с помощью операций «не-», «и», «или», также являются исходами; в терминах множеств исходы эксперимента образуют *поле* (или *алгебру* множеств). Условия эксперимента вместе с полем исходов составляют *испытание*. Любое (конечное) число испытаний можно комбинировать, например, следующим образом.

Совместные исходы получаются из исходов составляющих испытаний с помощью операций «не-», «и», «или». Условия составного испытания определяются условиями первого составляющего испытания вместе с условиями второго испытания, дополненными наблюденными исходами первого испытания, и т. д. Таким образом, каждое составляющее испытание, если даны наблюденные исходы предыдущих испытаний, совершается при дополнительных условиях: к его условиям прибавляются эти наблюденные исходы. В случае, когда в каждом составляющем испытании исходы осуществляются тогда и только тогда, когда они осуществляются без этих дополнительных условий, мы говорим, что испытания *вполне независимы*. Если, кроме того, испытания одинаковы, т. е. имеют одни и те же условия и поля исходов, то мы говорим о *повторении испытаний*, или об *одинаковых и вполне независимых испытаниях*. Возможность повторения испытаний является основной предпосылкой в научном исследовании (а также в азартных играх): *каждое испытание может повторяться многократно, причем сведения о прошедших и настоящих исходах не оказывают влияния на будущие исходы*.

2. Случайные события и испытания. Наука, по существу, имеет дело с закономерностями в повторяющихся испытаниях. В течение долгого времени Homo sapiens изучал только *детерминированные испытания*, в которых условия (причины) полностью определяют исходы (следствия). В азартных играх уже давно наблюдался другой тип закономерности, но лишь в недавнее время Homo sapiens был приведен к мысли о рациональной интерпретации явлений природы с точки зрения таких закономерностей: природа играет в величайшую из всех азартных игр с наблюдателем. Этот тип закономерности можно описать следующим образом.

Назовем *частотой* исхода A в n повторяющихся испытаниях отношение n_A/n числа n_A наступлений события A к общему числу испытаний n. Мы назовем испытание *случайным*, если при повторении его большое число раз наблюденные частоты любого из возможных исходов A группируются около некоторых чисел. Например, в игре в кости (с двумя симметричными костями) «две шестерки» выпадают примерно один раз из 36, т. е. наблюденные частоты группируются около $^1/_{36}$. Это число $^1/_{36}$ является постоянной числовой характеристикой события «выпадение двух шестерок» в условиях игры, а наблюденные частоты должны быть рассматриваемы как результаты измерения этой характеристики. Такое измерение аналогично, например, измерению длины стержня: стержень при фиксированной температуре имеет постоянную числовую характеристику, называемую его «длиной», около которой группируются результаты измерения.

Исходы случайного испытания называются *случайными событиями*. Число, измеряемое наблюденными частотами случайного события A, называется *вероятностью* события A и обозначается $\mathsf{P}A$. Очевидно, что $\mathsf{P}\varnothing=0$, $\mathsf{P}\Omega=1$, и для любого A, $0\leqslant\mathsf{P}A\leqslant 1$. Так как частота суммы $A_1+A_2+\ldots+A_n$ несовместных событий равна сумме их частот, то должно выполняться равенство

$$\mathsf{P}(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\mathsf{P}A_1+\mathsf{P}A_2+\ldots+\mathsf{P}A_n.$$

Далее, пусть n_A, n_B, n_{AB} — соответственно числа появлений исходов A, B, AB в n повторных случайных испытаниях. Частота исхода B в n_A испытаниях, в которых произошел исход A, равная

$$\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{n_{AB}}{n}:\frac{n_A}{n},$$

измеряет отношение $\mathsf{P}AB/\mathsf{P}A$, которое называется *вероятностью B при данном A* (т. е. при условии, что A произошло); обозначая ее P_AB, мы имеем

$$\mathsf{P}AB=\mathsf{P}A\cdot\mathsf{P}_AB.$$

Таким образом, если к первоначальным условиям испытания добавлено условие, состоящее в том, что A произошло, то вероятность $\mathsf{P}B$ события B заменяется на вероятность P_AB события B при данном A. В случае $\mathsf{P}_AB=\mathsf{P}B$ мы получаем определение *стохастической независимости* события B от события A; при этом справедливо равенство

$$\mathsf{P}AB=\mathsf{P}A\cdot\mathsf{P}B.$$

Отсюда следует, что A также стохастически независимо от B, так как

$$\mathsf{P}_BA=\frac{\mathsf{P}AB}{\mathsf{P}B}=\mathsf{P}A,$$

поэтому можно говорить, что A и B *стохастически независимы*. (Мы предполагаем, что знаменатели в написанных выше отношениях отличны от нуля.)

Мы будем говорить, что случайные испытания стохастически независимы, если в соответствующем сложном испытании вероятность любого исхода каждого составляющего испытания не зависит от наблюденных исходов в предыдущих испытаниях. Очевидно, полная независимость, определенная в терминах осуществления событий, влечет стохастическую независимость, определенную только через вероятности. В тех случаях, когда мы будем интересоваться только стохастической независимостью, понятие повторных испытаний сводится к понятию *одинаковых и стохастически независимых испытаний*.

3. Случайные величины. Физик обычно регистрирует исходы в виде значений некоторых наблюдаемых величин. С точки зрения игрока результатом игры является не просто исход некоторого случайного испытания, а соответствующий выигрыш или проигрыш. В любом из этих случаев достоверное событие Ω разбивается на некоторое число несовместных исходов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (если только общее число возможных исходов конечно). Мы получим *случайную величину* X, например выигрыш игрока, если поставим в соответствие этим исходам числа $x_{A_1}, x_{A_2}, \ldots, x_{A_m}$, которые могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. «Средний выигрыш» в n случайных испытаниях равен

$$x_{A_1}\frac{n_{A_1}}{n}+x_{A_2}\frac{n_{A_2}}{n}+\ldots+x_{A_m}\frac{n_{A_m}}{n}.$$

Так как испытание случайно, то это среднее колеблется около $x_{A_1}\mathsf{P}A_1+x_{A_2}\mathsf{P}A_2+\ldots+x_{A_m}\mathsf{P}A_m$; это число определяет *математическое ожидание* $\mathsf{E}X$ случайной величины X. Как легко видеть, среднее суммы двух случайных величин X и Y и сумма их средних группируются около одного и того же числа, поэтому

$$\mathsf{E}(X+Y)=\mathsf{E}X+\mathsf{E}Y.$$

Понятие случайной величины является более общим, чем понятие случайного события. В самом деле, каждому случайному событию A мы можем поставить в соответствие случайную величину (его индикатор) I_A, равную 1 или 0 в зависимости от того, произошло или не произошло событие A. Тогда наблюденное значение величины I_A показывает нам, произошло или нет событие A, и, наоборот, событие определяет значение величины I_A. Имеет место равенство $\mathsf{E}I_A=1\cdot\mathsf{P}A+0\cdot\mathsf{P}A^c=\mathsf{P}A$.

Наблюдаемая физическая величина может иметь бесконечное число возможных значений; в этом случае приведенные выше простые определения непригодны. Именно переход ко все более и более сложным наблюдениям и стимулировал развитие теории вероятностей.

II. АКСИОМЫ. НЕЗАВИСИМОСТЬ И СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Построим теперь подходящую модель для тех интуитивных понятий, которые были введены выше в кратком предварительном изложении. В дальнейшем мы придем к необходимости обобщить эту модель.

1. Аксиомы конечной схемы. Пусть Ω, или *достоверное событие*, представляет собой пространство точек ω; пустое множество (множество, не содержащее точек ω), или *невозможное событие*, будем обозначать $\varnothing$. Рассмотрим непустой класс $\mathcal{A}$ множеств в Ω, называемых случайными событиями или просто *событиями*, поскольку никакой другой тип событий рассматриваться не будет. События мы будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, ..., снабжая их иногда индексами. Пусть P, или *вероятность*, является числовой функцией, определенной на $\mathcal{A}$; значение P для события A будет называться *вероятностью* A и обозначаться $\mathsf{P}A$. Пара $(\mathcal{A}, \mathsf{P})$ называется *полем вероятностей*, а тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ называется *вероятностным пространством*.

Аксиома I. *Класс $\mathcal{A}$ является полем, т. е. дополнения A^c, конечные пересечения $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ и конечные суммы $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ событий являются событиями.*

Аксиома II. *Функция P, заданная на $\mathcal{A}$, нормирована, неотрицательна и конечно-аддитивна, т. е.*

$$\mathsf{P}\Omega = 1, \quad \mathsf{P}A \geqslant 0, \quad \mathsf{P}\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}A_k.$$

Заметим, что достаточно предположить аддитивность для любых двух несовместных событий, так как аддитивность в общем случае получается по индукции.

Так как $\varnothing$ несовместно с любым событием A и $A+\varnothing=A$, то

$$\mathsf{P}A = \mathsf{P}(A+\varnothing) = \mathsf{P}A + \mathsf{P}\varnothing,$$

откуда $\mathsf{P}\varnothing=0$. Далее, если $A \subset B$, то из аксиом сразу следует