С. Валентинер

Векторный анализ

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С. Валентинер
С11 Векторный анализ / С. Валентинер – М.: Книга по Требованию, 2020. – 136 с.

ISBN 978-5-458-25159-4

Векторный анализ - раздел математики, распространяющий методы математического анализа на векторы в двух или более измерениях. Векторный анализ является математической дисциплиной почти столь же наглядной, как и сама геометрия; в своих определениях и заключениях она непосредственно следует геометрии. В книге «Векторный анализ» немецкого профессора С. Валентинера рассказывается об этом разделе математической науки. Книга переведена с немецкого инженером А. А. Пономаревым.

ISBN 978-5-458-25159-4

Глава 3.

Некоторые отделы из теории электричества.

Часть III.

Линейные векторные функции. Диады и тензоры.

Введение.

§ 1. Представление результирующей системы сил.

Векторный анализ является математической дисциплиной почти столь же наглядной, как и сама геометрия; в своих определениях и заключениях она непосредственно следует геометрии. Насколько сжатые, наглядные и выпуклые представления дает векторный анализ — по сравнению с обычным для всех случаев, которые рассматриваются в двух или трехмерном пространстве, будет показано в первом параграфе на примере. Этот пример вместе с тем покажет и на различие двух существенных определений векторного анализа-скаларной величины и вектора.

Пусть на свободное твердое тело действуют силы P_1, P_2, . . . P_n, приложенные в точках p_1, p_2, . . . p_n.

Подобная система сил может быть заменена одной равнодействующей и парой, величина которой находится в зависимости от точки приложения равнодействующей. Аналитические выражения величин равнодействующей и пары мы получаем разложением всех действующих на тело сил на составляющие по каким-либо трем направлениям, напр., в прямоугольной системе координат по направлениям осей координат; складывая затем одинаково направленные слагающие, мы получаем в результате равнодействующую и пару. Так нас учит старая аналитическая механика. Более наглядно и, можно сказать, непосредственно задача решается геометрическим путем, минуя разложение на составляющие, последовательным применением теоремы параллелограмма сил и статических моментов.

Представим себе, что помимо данной системы сил $P_1, P_2 \ldots P_n$, на тело действуют еще две другие, из которых силы первой $P'_1, P'_2 \ldots P_n$ приложены к любым точкам данного тела, но равны по величине силам первоначальной системы и одинаково с ними направлены, а силы второй системы $P''_1 \ldots P''_n$, равные также по величине силам первой системы и приложенные в тех же точках, направлены противоположно. Система $P'_1 \ldots P'_n$ приводится, согласно теореме о параллелограмме сил, или короче говоря посредством геометрического сложения—к равнодействующей R.

(1) $$R = P'_1 (+) \ldots (+) P'_n$$

здесь знак (+) указывает на то, что силы слагаются геометрически, т. е., что принято во внимание их направление. Две остальные системы сил представляют собой систему пар сил, статические моменты которых по своей абсолютной величине, т. е. безотносительно к их направлению, равны

$$P_i\, r_i \sin(P_i\, r_i),$$

где r_i обозначает расстояние точки приложения силы P_i от произвольно выбранной точки приложения равнодействующей; направление r_i берется к точке приложения последней так, чтобы угол $(P_i\, r_i)$ имел постоянно величину $< \pi$. Величины этих моментов откладываем параллельно оси вращения в таком направлении, чтобы для наблюдателя из конечной точки отрезка вращение казалось положительным [1]). Складывая эти отрезки также, как раньше силы, получаем результирующий статический момент.

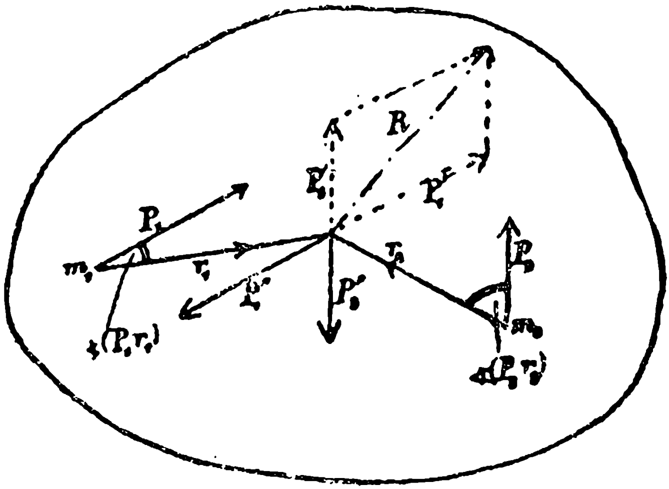
[1]) Т. е. против движения часовой стрелки.

$$K = [P_1 r_1 \sin(P_1 r_1)] (+) \ldots (+) (P_n r_n \sin(P_n\ r_n)]$$

Это выражение мы можем написать короче однозначно:

(2) $$K = (P_1 r_1)(+)(P_2 r_2)(+) \ldots (+)(P_n r_n),$$

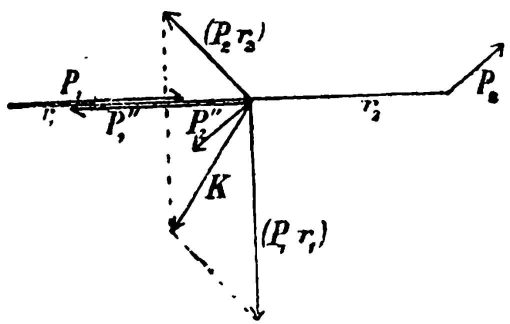
где под $(P_i\ r_i)$ мы представляем себе отрезок, абсолютная величина которого равна произведению: $P_i\ r_i \sin(F_i\ r_i)$, а направление берется перпендикулярно плоскости $P_i\ r_i$ и притом с той стороны этой плоскости, глядя с которой из свободного конца отрезка $(P_i\ r_i)$ кратчайший переход, вращения направления P_i в направление r_i соответствовал-бы положительному вращению



Черт. 1.

На черт. 1, при произвольном выборе точки A приложения равнодействующей, дано построение равнодействующей силы R и обоих моментов $(P_1\ r_1)$ и $(P_2\ r_2)$ для двух сил, приложенных к твердому телу в точках m_1,—m_2. Точки m_1, m_2 и A, совместно с направлением силы P_1, могут находиться в плоскости чертежа, сила P_2 находится вне плоскости чертежа и направлена кверху. На черт. 2 дано построение результирующей статического момента K. Плоскость чертежа взята параллельно осям вращения пар; отрезки, изображающие моменты, отложены, как по величине, так и по направлению, от одной и той же точки и дают в результате геометрического сложения отрезок K, представляющий собой, как по величине, так и по направлению, результирующий момент пары сил.

Уравнения (1) и (2) дают нам символические представления геометрического построения. В то время, как при аналитическом способе мышления мы складывали между собой лишь величины одного и того же направления (слагающие-компоненты) — в данном случае мы имеем дело со сложением таких членов, которые различаются между собой не только по величине (абсолютному значению), но и по направлению; лишь принимая во внимание направление, мы имеем возможность производить вычисление.



Черт. 2.

В отличие от чисел — скалярных величин, мы обозначаем величины, отличающиеся между собой не только по величине, но и по направлению — векторами, или величинами с данным направлением. Если эти символы применимы для описания различных геометрических построений, или даже физических явлений, и если они дают при этом простые аналитические правила исчисления без последующего перехода к обычным аналитическим способам изображения, то, конечно, методы векторного исчисления, по сравнению с методами чистого алгебраического анализа, имеют большие преимущества в силу их геометрических представлений и большей простоты. Для этих целей были выведены правила исчисления, аналогичные правилам обычного анализа для скалярных величин. Выводу этих правил, составляющих необходимые обоснования метода представлений посредством векторов, посвящена первая часть настоящего томика. Для упражнений и применения правил исчисления во второй части будут разобраны также случаи применения к различным областям физики. Наконец, в третьей части будет рассмотрена важнейшая часть векторного анализа — свойства линейных векторных функций (тензоры, диады).

Действительными основателями векторного анализа надо, собственно назвать Гамильтона и Грасмана, которые, почти одновременно и совершенно независимо друг от друга, ввели определение вектора в аналитическое исчисление, хотя в то же время (1844. г,) были уже сделаны попытки применения аналогичных представлений другими, как напр., в барицентрическом исчислении Мебиуса (1828 г.). Однако, оба названных ученых представляли себе значение нового метода в более ясной форме, чем другие, но их точки зрения были в значительной степени различны. Гамильтон более основывался на геометрии в то время, как Грасман применял геометрию лишь постольку, поскольку она давала наглядные представления для его обширно разработанных геометрических заключений. Его теоремы являются не простыми переложениями теорем геометрии на абстрактный язык, благодаря перенесению их на пространство выше трех измерений, они имеют более общее значение. Поэтому в способах изображения в векторном анализе различают два направления, которые однако в применениях к геометрии, или при описании физических явлений, тесно между собой соприкасаются, и даже отчасти дополняют друг друга.

Часть I.

Правила исчисления векторного анализа.

§ 2. Определение понятия вектора и скалярной величины.

В § 1 мы называли равнодействующую и результирующий статический момент — **векторами** в силу того, что они представлялись нами в виде определенно направленных отрезков. Для полного определения приведенных в первом примере векторов, необходимо и достаточно иметь три данных соответственно компонентам в аналитическом представлении. Тремя такими данными являются: длина вектора и два угла, образуемые его направлением с неподвижными осями. Так как в данном случае возникает вопрос лишь о величине и направлении изображающего вектор отрезка, то наше представление не зависит от начальной точки отрезка. Если например, результирующая сила R с компонентами X, Y, Z по неподвижным осям координат, проходящим через пространство „A", приложенная в точке x, y, z, должна быть представлена некоторым отрезком в трехмерном пространстве „B", то это представление — поскольку начальная точка изображаемого отрезка совпадает, или не совпадает с началом координат пространства „B" — может быть дано бесчисленным числом способов (иначе говоря — представление бесконечно многозначно). Таким образом параллельные между собой, одинаково направленные и равные по величине отрезки в пространстве по отношению к их значению для представляемого об'екта вполне эквивалентны.

Следовательно, вектор определяется так: *вектором называется величина, которая при совокупности всех принимаемых ею значений определяет в пространстве в постоянном, однозначном и необратимом смысле совокупность всех отрезков, выходящих из произвольно выбранного начала координат.* [1])

Векторами, следовательно, помимо уже названных силы и статического момента, могут быть следующие величины: инерция, скорость, ускорение, ток.

Без сомнения, названные величины соответствуют данному определению вектора. Однако необходимо указать на другую группу векторов, в которой определение вектора признается не сразу.

Абсолютное значение статического момента, т. е. величины, не имеющей направления

$$P_1 r_1 \sin (P_1 r_1)$$

может рассматриваться, как площадь параллелограмма со сторонами P_1, r_1 и углом между ними $\varphi = (P_1, r_1)$. За направление вектора, представляющего статический момент, при геометрическом сложении в §1 принималось направление нормали к плоскости, проходящей через P_1 и r_1. Следовательно, мы можем рассматривать, как вектор, параллелограмм данной величины при данном направлении его нормали. Таким образом, под выше данное опреде-

[1]) Это определение дано согласно M. Abraham und A. Föppl — „Theorie d. Elektrizität“.

ление вектора попадают и такие величины, как проходящие через начало координат произвольно ограниченные части плоскости,

Наконец, необходимо упомянуть еще третью группу векторов, являющихся величинами, изображенными неограниченными плоскостями, не проходящими через начало. Величина и направление такого вектора определяется однозначно величиной и направлением нормали, проведенной к плоскости из начала координат.

Однако, существует принципиальное различие между векторами, определяемыми непосредственно, как вектор, и двумя упомянутыми последними группами.

Если необходимо перейти от старой системы координат с осями x, y, z, к новой системе, оси которой направлены прямо противоположно первой,[1] так что координаты точки x, y, z во второй системе получают значения $-x$, $-y$, $-z$, то сила P должна, вследствие подобного преобразования, перейти в $-P$. При подобном преобразовании, вектор изображающий собой статический момент, не изменит знака, если мы будем, согласно § 1, постоянно считать положительным момент, в котором вращение, наблюдаемое с положительной стороны оси, совершается в положительном направлении, т. е. — против движения часовой стрелки.

Векторы, которые при подобном преобразовании меняют знак (векторы, направление которых изображается стрелкой), называются п о л я р н ы м и векторами. Векторы, не изменяющие знака при преобразовании координат (векторы представляемые площадью, или отрезком с указанием направления вращения), называются о с е -

---

[1]) Подобная система обозначается как отрицательная