

Энциклопедия элементарной математики

Том II. Энциклопедия элементарной геометрии. Книга I. Основания геометрии

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Э68

Э68 Энциклопедия элементарной математики: Том II. Энциклопедия элементарной геометрии. Книга I. Основания геометрии / – М.: Книга по Требованию, 2013. – 370 с.

ISBN 978-5-458-28278-9

Энциклопедия элементарной математики. Том II. Энциклопедия элементарной геометрии. Книга I. Основания геометрии. В «Энциклопедии элементарной геометрии» рассматриваются вопросы, относящиеся к геометрии, причем порой в довольно неожиданном ракурсе и тем самым книга представляет особенный интерес. Многие рассуждения затрагивают проблемы, лежащие на рубеже между математикой [Математика] и философией [Философия]. По отношению к некоторым из них общепринятой точки зрения не существует, поэтому высказанных авторами в этих случаях взглядов можно придерживаться в той или иной степени, не принимая их за аксиому [Аксиома]. В тех случаях, когда по какому-либо вопросу разногласие мнений особенно выражено, читателю с объективностью предлагаются различные точки зрения на этот вопрос. Авторы собрали материал, который посчитали полезным по отношению к механике и физике [Физика], а также сохраняющим при этом свое значение в высшей математике [Математика высшая]. Составители «Энциклопедии элементарной геометрии» стремились достичь углубления и оживления материала путем критического исследования науки с точки зрения логики и теории познания, тщательной разработкой всего, что касается знаков величины, понятий направления и т.п. Книга первая «Энциклопедии элементарной геометрии» посвящена основам геометрии и содержит в том числе философские рассуждения [Рассуждения философские], много интересных исторических сведений. Автор стремился вызвать у читателя интерес к самой подобной постановке вопроса. В этот же раздел включена проективная геометрия. В русском издании «Энциклопедии элементарной геометрии» имеются подстрочные примечания, сделанные с целью облегчить читателю чтение наиболее трудных мест. Особые дополнения в конце книги посвящены теории бесконечно удаленных элементов и теории площадей.

ISBN 978-5-458-28278-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Предисловіе автора къ первому изданію.

Второй томъ „Энциклопедіи элементарной математики“, появленіе котораго, къ сожалѣнію, нѣкоторыми внѣшними обстоятельствами было замедлено, посвященъ исключительно геометріи. При большомъ объемѣ элементарной математики съ ея безчисленными теоремами и теоремами объ окружностяхъ, тетраэдрахъ и сферахъ, которыя представляютъ собой лишь различныя видоизмѣненія и частные случаи немногихъ общихъ идей проективной геометріи, мы вынуждены были ограничиться самымъ необходимымъ матеріаломъ, тѣмъ болѣе, что намъ необходимо было, отчасти въ интересахъ третьяго тома, удѣлить мѣсто также коническимъ сѣченіямъ, сферической тригонометріи и основаніямъ аналитической геометріи.

Собрать весь цѣнный матеріалъ въ этой научной области, и по возможности, снабдить его литературными указаніями, какъ это дѣлается въ выходящей въ настоящее время „Большой энциклопедіи математическихъ наукъ“, не соотвѣтствуетъ плану настоящаго сочиненія. Напротивъ, мы имѣли въ виду устранить весь тотъ матеріалъ, который въ настоящее время остается изолированнымъ, а потому неплодотворнымъ, и сохранить лишь то, что оказывается полезнымъ въ примѣненіи къ механикѣ и къ физикѣ и сохраняетъ свое значеніе также въ высшей математикѣ.

Въ этой болѣе тѣсной области мы старались достигнуть возможнаго углубленія и оживленія матеріала, — углубленія путемъ подробнаго критическаго изслѣдованія основъ этой науки съ точки зрѣнія логики и теоріи познанія, тщательной разработкой всего того, что касается знаковъ величины, понятій „направо“ и „налѣво“, направленія и т. п.; оживленія путемъ приложений, которыя найдутъ себѣ мѣсто въ третьемъ томѣ. Первый томъ раздѣленъ на три части. Не безъ страха публикую я первую книгу, посвященную основаніямъ науки, т. е. той промежуточной области, которая требуетъ не только математическихъ, но и философскихъ разсужденій. При общемъ низкомъ уровнѣ нашего философскаго образованія, въ чемъ мы можемъ спокойно сознаться, и при большомъ отвращеніи широкихъ круговъ ко всѣмъ вопросамъ, падающимъ въ эту область, необходимо было прежде всего показать, что мы здѣсь имѣемъ дѣло съ серьезными вопросами, которые могутъ интересовать

также математика. Если и не всё разсужденія автора встрѣтятъ сочувствіе, то онъ во всякомъ случаѣ будетъ удовлетворенъ и будетъ считать свою цѣль достигнутой, если ему удастся вызвать интересъ въ самой постановкѣ вопроса. Авторъ знаетъ по своему собственному опыту, въ какой мѣрѣ чувствуетъ себя не на мѣстѣ молодой преподаватель, только что сошедшій съ университетской скамьи и занимавшійся наиболѣе глубокими и новѣйшими вопросами высшей математики, когда ему приходится излагать начала геометріи въ младшихъ классахъ. Но лишь тотъ, кто старался проникнуть въ гносеологическія основы геометріи, можетъ вполне оцѣнить, до какой степени это дѣйствительно трудная и отвѣтственная задача, требующая не только основательнаго научнаго образованія, но и значительнаго педагогическаго искусства. Ничто не возвышаетъ внутренне учителя въ такой мѣрѣ, ничто не подымаетъ въ немъ въ такой мѣрѣ сознанія величія его призванія, какъ ясное пониманіе, что обоснованіе геометріи представляетъ собой задачу, почти непреодолимую по своей трудности, — задачу, съ разрѣшеніемъ которой ему придется бороться всю свою жизнь, постоянно примиряя требованія строгой логики съ развивающейся только способностью учениковъ къ воспріятію, научную строгость съ наивнымъ возрѣніемъ, развитіе и укрѣпленіе которой, по мнѣнію преподавателей, имѣющихъ большой научный и педагогическій опытъ, составляетъ первую цѣль обученія геометріи. Мы считаемъ здѣсь же нужнымъ указать, что строго формальную, логическую постановку современной геометріи въ преподаваніи мы совершенно отвергаемъ.

Такъ какъ въ первой книгѣ поставлены вопросы, относящіеся къ теоріи познанія, и она можетъ, такимъ образомъ, найти читателей, быть можетъ, менѣе интересующихся остальнымъ матеріаломъ этого тома, то мы считали необходимымъ дать здѣсь же выводы всѣхъ предложеній, необходимыхъ для пониманія, кромѣ наиболѣе элементарныхъ, въ самомъ узкомъ смыслѣ этого слова. Для выясненія сущности проективнаго взгляда на пространство было необходимо вплести въ этотъ отдѣлъ также и проективную геометрію. Къ этому примыкаетъ планиметрія, въ которой особенно подробно разобрана теорія связки окружностей; какъ мы указываемъ въ текстѣ, слѣдуя Цейтену (Zeuthen, Poncelet), эта теорія представляетъ удобный путь къ теоріи коническихъ сѣченій.

Вторая книга содержитъ плоскую и сферическую тригонометрію при изложеніи которой мы, слѣдуя Студи (Study), съ одной стороны, выдвигаемъ на первый планъ понятіе о группѣ, а, съ другой стороны, принимаемъ во вниманіе требованія практики.

Въ третьей книгѣ, посвященной аналитической геометріи и стереометріи, развивается аналитическая теорія коническихъ сѣченій, при чемъ излагается также ученіе о кривизнѣ, въ особенности въ цѣляхъ теоріи прскрированія, которая будетъ изложена въ третьемъ томѣ. Цѣльное из-

ложеііе теоріи коніческіхъ сѣченій вышло бы за предѣлы нашей книги, но зато мы старались эту изящнѣйшую и высшую часть элементарной геометріи освѣтити съ возможно болѣе разнообразныхъ точекъ зрѣнія: чисто синтетически, съ точки зрѣнія геометріи круговъ, а въ третьемъ томѣ также съ точки зрѣнія начертательной геометріи и теоріи перспективы. Въ небольшомъ параграфѣ кратко рассмотрѣны также коніческія сѣченія на сферѣ. Глава, посвященная стереометріи, содержитъ, кромѣ общихъ основъ геометріи пространства, еще ученіе объ объемѣ.

Разработку сферической тригонометріи, а также аналитическую геометрію на сферѣ взялъ на себя В. Якобсталь (W. Jacobsthal). Остальной матеріалъ былъ распределенъ между двумя издателями сочиненія, какъ указано въ сочиненіи.

Страсбургъ, въ августъ 1905 г.

И. Вельштейнъ.

Предисловіе автора ко второму изданію.

Отъ обѣщанной въ предыдущемъ предисловіи главы въ третьемъ томѣ, посвященной перспективѣ, мы вынуждены были отказаться за недостаткомъ мѣста. Зато ученіе о кривизнѣ коніческіхъ сѣченій разработано болѣе подробно.

Настоящее изданіе отличается отъ перваго только рядомъ небольшихъ измѣненій.

Страсбургъ, октябрь 1907 г.

И. Вельштейнъ.

Замѣченныя опечатки.

<i>Страница.</i>	<i>Строка.</i>	<i>Напечатано.</i>	<i>Должно быть.</i>
48	18 снизу	Q	0
115	1 снизу	(!)	(I)

На фигурѣ 15 прямая должна быть обозначена черезъ a' , а не черезъ a .

Книга I.
ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИИ.

Введение.

1. Если математика гордо возвысилась на степень наиболее совершенного образца чистой науки, то она обязана этим не столько господствующему в ней дедуктивному методу, сколько тому обстоятельству, что она в состоянии указать предпосылки, на которых она покоится, что она имеет возможность установить „основныя понятія“ и „основныя положенія“, служащія фундаментомъ всего построения, и ясно освѣтить значеніе каждаго изъ нихъ путемъ построения системъ, въ которыхъ то или иное положеніе не оправдывается. Основы ариѳметики (см. т. I, кн. I) мы построили, опираясь, главнымъ образомъ, на одно свойство нашего духа, на его способность къ ассоціаціи, или сопряженію. Основы геометріи, которыя мы намѣрены подвергнуть здѣсь тщательному анализу, насколько это осуществимо элементарными средствами, имѣютъ гораздо болѣе сложный характеръ. Мы встрѣчаемъ здѣсь понятія „точка“, „прямая“, „плоскость“, „параллельно“, „между“ и т. д.; мы знаемъ, скажемъ, такія простыя предложенія: черезъ двѣ точки всегда проходитъ одна и только одна прямая; черезъ три точки, не расположенныя на одной прямой, всегда проходитъ одна и только одна плоскость; изъ трехъ точекъ, расположенныхъ на одной прямой, одна и только одна лежитъ „между“ двумя другими и т. д. Эти предложенія кажутся очень простыми, такъ какъ они очевидны по своей наглядности и не могутъ быть доказаны при помощи болѣе простыхъ предложеній; легко принять, что они понятны сами собой. Но ничто не поддается съ такимъ трудомъ болѣе глубокому познанію, какъ тѣ именно предложенія, которыя на первый взглядъ кажутся понятными сами собой. Въ то время, когда математики всѣхъ временъ стремились, главнымъ образомъ, къ расширенію своей науки путемъ открытія новыхъ истинъ, лишь немногіе изъ нихъ, правда, наиболее выдающіеся, были заинтересованы углубленіемъ геометріи, выясненіемъ взаимной связи и значенія отдѣльныхъ посылокъ: большинство считало, очевидно, недостойнымъ тратить трудъ и время на то, чтобы собирать и углубляться въ эти простыя и тривиальныя предложенія, ясныя, какъ день Божій, не обѣщающія славы

исслѣдователю. И все-таки во всей геометріи врядь ли есть что-либо болѣе заманчивое, какъ занятіе этими именно невзрачными предложеніями, которыя въ немногихъ словахъ выражаютъ такое обширное содержаніе, которыя ip nise содержатъ всю геометрію. Путемъ ихъ исслѣдованія для геометріи были завоеваны болѣе широкія области, чѣмъ развитіемъ вышнихъ ея теорій.

2. Въ дальнѣйшемъ мы не имѣемъ въ виду слѣдовать примѣру Евклида; мы не имѣемъ въ виду развивать шагъ за шагомъ систему геометріи изъ ряда предпосланныхъ и допущенныхъ посылокъ, потому что въ такомъ изложеніи значеніе этихъ посылокъ, каждой въ отдѣльности, недостаточно выясняется. Напротивъ, мы отладимъ предпочтеніе другому изложенію, въ которомъ критика обычной точки зрѣнія на основы геометріи должна подготовить читателя къ строго логическому ея пониманію; эта критика должна выяснить, какъ мало факты чувственнаго воспріятія пригодны для того, чтобы служить краеугольными камнями наукъ, желающей оперировать совершенно опредѣленными понятіями.

ГЛАВА I.

Критика основныхъ понятій.

§ 1. Историческія свѣдѣнія.

1. Какъ свидѣтельствуесть исторія, геометрія имѣеть эмпирическое происхожденіе. По крайней мѣрѣ, относительно древнѣйшаго культурнаго народа, вліяніе котораго на развитіе геометріи на западѣ вполнѣ доказано, какъ греческіе историки, такъ и современные египтологи, согласно удостоверяють, что тамъ геометрія возникла вслѣдствіе необходимости ежегодно возстановлять границы полей, которыя смывались разлитіемъ Нила. Сообразно этому наиболѣе древнія геометрическія формулы, извѣстныя намъ изъ папируса Эйзенлора *), относятся къ измѣренію площадей; задача эта, впрочемъ, разрѣшается здѣсь только приближенно. Такъ, напримѣръ, площадь равнобедреннаго треугольника со сторонами a , a , c признается равной $\frac{1}{2} ac$ вмѣсто $\frac{1}{2} ac \sqrt{1 - (c/2a)^2}$; эта приближенная формула согласуется, однако, съ истинной тѣмъ больше, чѣмъ больше равныя стороны по сравненію съ третьей стороной. Всѣ остальные геометрическіе факты, содержащіеся въ этомъ папирусь, имѣють непосредственно практическое значеніе; ни доказательствъ, ни указаній на таковыя мы нигдѣ не находимъ. Вообще съ большимъ довѣріемъ къ свѣдѣніямъ древнихъ египтянъ въ этой области относиться нельзя, ихъ мудрость въ древности значительно переоцѣнивалась.

2. Греки освободили геометрію отъ узкаго кругозора египетскихъ ремесленниковъ и строителей; занимаясь геометріей ради ея самой, они развили ее въ теченіе двухъ столѣтій гораздо больше, нежели египтяне въ теченіе двухъ тысячелѣтій. Вначалѣ и здѣсь наглядность играла рѣшающую роль, но скоро установилась потребность въ логическихъ доказательствахъ. Изъ просныхъ предложеній выводились болѣе трудныя, все болѣе широкіе отдѣлы геометріи приводились во взаимную связь. Это и послужило импульсомъ къ тому, чтобы дойти до послѣднихъ посылокъ, изъ которыхъ вытекаетъ все остальное. Этотъ неизмѣримо огромный умственный трудъ выполнилъ Евклидъ, жившій около 300 г. до Р. Хр. въ

*) A. Eisenlohr. „Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypten“. Leipzig. 1877.

Александріи при Птоломее I. Онъ завершилъ то, что было сдѣлано его предшественниками въ дѣлѣ обоснованія геометріи въ теченіе слишкомъ столѣтій; 13 книгъ его „Началь“, содержащія въ геометрической формѣ также основанія ариѳметики, выгѣснили совершенно сочиненія его предшественниковъ. Во главѣ своей книги („στοιχεῖα“) Евклидъ полагаетъ опредѣленія (ὄροι), постулаты (ἀξιόματα) и аксіомы (κοινὰ ἔννοια) на которыхъ, по его мнѣнію, покоится геометрія. Важнѣйшія опредѣленія слѣдующія:

- | | |
|---|--|
| I. Σημεῖον ἔστιν, οὗ μέρος οὐθέν. | Точка есть то, что не имѣетъ частей. |
| II. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές. | Линія есть длина безъ ширины. |
| III. Εὐθεῖα γραμμὴ ἔστιν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημεῖοις κεῖται. | Прямая есть линія, которая одинаково расположена относительно всѣхъ своихъ точекъ. |

Выраженіе ἐξ ἴσου κεῖται не получило еще вполнѣ удовлетворительнаго перевода, но смыслъ его совершенно ясенъ.

- | | |
|--|--|
| IV. Ἐπιφάνεια δὲ ἔστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. | Поверхность есть то, что имѣетъ только длину и ширину. |
| V. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἔστιν, ἣτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. | Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношенію ко всѣмъ прямымъ, на ней лежащимъ. |
| VI. Παράλληλοι εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μᾶλλον συμπίπτουσιν ἀλλήλαις | Параллельныя прямыя суть такія, которыя расположены въ одной плоскости и при неограниченномъ продолженіи въ обѣ стороны не пересѣкаются. |

Изъ постулатовъ мы приведемъ только пятый, который въ нѣкоторыхъ изданіяхъ Евклида приводится въ качествѣ XIII аксіомы и извѣстенъ подъ названіемъ „аксіомы о параллельныхъ линіяхъ“.

- | | |
|---|---|
| (Ἦτις εἶναι) καὶ ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπέτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμενας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν ὅσο ὀρθῶν ἐλάσσονες. | (Нужно потребовать), чтобы всякій разъ, какъ прямая при пересѣченіи съ двумя другими прямыми образуетъ съ ними внутренніе односторонніе углы, сумма которыхъ меньше двухъ прямыхъ, эти прямыя пересѣкались съ той стороны, съ которой эта сумма меньше двухъ прямыхъ. |
|---|---|

Аксіомы 1, 2, 3 и 8 содержатъ основанія ариѳметики, хотя здѣсь онѣ отнесены непосредственно къ пространственнымъ величинамъ. Аксіома 7 содержитъ понятіе о конгруэнтности.

καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἔστί. (образы), которые покрываютъ другъ друга, равны.