

**М. Шаль**

**Исторический обзор  
происхождения и развития  
геометрических методов**

**Том 2. Примечания**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
М11

М11 **М. Шаль**  
Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов: Том  
2. Примечания / М. Шаль – М.: Книга по Требованию, 2021. – 434 с.

**ISBN 978-5-458-28527-8**

**ISBN 978-5-458-28527-8**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



ленно точно опредѣляетъ открытыя Персеемъ улиткообразныя линіи <sup>5)</sup>).

Геилброннеръ (Heilbronner) впадаетъ въ ту же ошибку, какъ Воссій и Дешаль, относительно кривыхъ Персея, но, какъ кажется, указываетъ настоящее время существованія этого геометра <sup>6)</sup>. Онъ помѣщаетъ его между Аристеемъ и Менехмомъ. Ему, по нашему мнѣнію, слѣдуетъ приписать именно эту древность.

Монтукла относитъ его къ болѣе позднему времени. Онъ помѣщаетъ его въ двухъ первыхъ столѣтіяхъ христіанскаго лѣтоисчисленія. Нельзя, кажется, сомнѣваться, что это ошибочно, если принять въ соображеніе вышеприведенное мѣсто изъ Герона и мѣсто у Прокла, гдѣ сказано, что Геминъ писалъ объ улиткообразныхъ.

Монтукла думалъ, что до него всѣ смѣшивали *спирическія линіи* со *спиралями* Архимеда, и что онъ первый показалъ значеніе этихъ кривыхъ <sup>7)</sup>. Но изъ предыдущаго видно, что Дешаль, Воссій и Геилброннеръ дѣйствительно впали въ эту ошибку, но Бальди и Бланкавъ не сдѣлали ея. Два другіе писателя также опредѣлили совершенно точно значеніе улиткообразныхъ. Первый — Дасиподій, который въ своемъ сочиненіи *Definitiones et divisiones Geometriae* <sup>8)</sup> нѣсколько разъ говоритъ объ этихъ кривыхъ. Другой — это ученый Савилій, который въ *Praelectiones tredecim in principium elementorum Euclidis* (Охоніи 1621, in 4) перечисляетъ извѣстныя древнимъ кривыя и приводитъ слово въ слово то мѣсто Прокла, гдѣ показывается образованіе улиткообразныхъ линій.

<sup>5)</sup> *Cronica de' Matematici ovvero Epitome dell' istoria delle vite loro*. In Urbino, 1707, in 4. «Perseo, non si sà bene di qual patria si fuise. Fu egli, come s'ha da Proclo, inventore delle linee spiriche, le quali nascono dalle varie sectioni delle spira.» (p 25).

<sup>6)</sup> *Historia matheseos universae*. Lipsiae 1742, in 4.

<sup>7)</sup> *Histoire des mathématiques*, t. I, p. 316.

<sup>8)</sup> *Lexicon mathematicum, ex diversis collectum antiquis scriptis*; это часть вышеупомянутаго сочиненія, изданнаго въ 1579 году.

*Spiricae sectiones ita se habent, ut altera sit incurvata, implicata similis caudae equinae. Altera vero in medio quidem est latior; ex utraque vero parte deficit. Est etiam alia, quae oblonga cum sit, in medio, intervallo utitur minore; sed ex utraque parte dilatatur.*

## ПРИМѢЧАНІЕ II.

(Первая эпоха n° 8)

## О мѣстахъ на поверхности Евклида.

Монтуэла на 172 страницѣ перваго тома *Histoire des mathématiques* говоритъ, что *мѣста на поверхности* (τόποι πρὸς ἐπιφανείαν) Евклида суть *поверхности*, а на страницѣ 215 того же тома,—что это *кривыя* *огибающей кривизны*, образуемая на кривыхъ поверхностяхъ, какъ напримѣръ винтовая линія на кругломъ цилиндрѣ. Очень можетъ быть, что древніе обозначали этимъ словомъ вообще поверхности и проводимыя на нихъ кривыя. Но что же такое были именно *Loca ad superficiem* Евклида? Для рѣшенія этого вопроса мы не имѣемъ другихъ указаній, кромѣ четырехъ леммъ Паппа, относящихся къ этому сочиненію; такъ какъ въ этихъ леммахъ говорится только о коническихъ сѣченіяхъ, то мы думаемъ, что Евклидъ разсматривалъ исключительно поверхности, называемыя теперь *поверхностями второго порядка*. Мы думаемъ даже, что здѣсь должно разумѣть только *поверхности вращенія*. Потому что съ одной стороны извѣстно, что поверхности вращенія второго порядка изучались древними еще до Архимеда: это видно изъ слѣдующихъ словъ, сказанныхъ въ концѣ 12-й теоремы книги о *сфероидахъ и коноидахъ* при выводѣ свойствъ ихъ плоскихъ сѣченій: «доказательства всѣхъ этихъ предложеній извѣстны»; съ другой стороны мы замѣчаемъ, что послѣдняя лемма Паппа выражаетъ главное свойство фокусовъ и директрисъ коническаго сѣченія. По всей вѣроятности эта теорема служила для доказательства, что мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ онъ неподвижной точки и отъ данной плоскости находятся въ постоянномъ отношеніи, есть сфероидъ или коноидъ; или же для доказательства, что сѣченіе этого мѣста плоскостію, проходящею чрезъ неподвижную точку, есть коническое сѣченіе, для котораго эта точка есть фокусъ, а прямая пересѣченія плоскости кривой съ данною плоскостію—директриса.

На основаніи этого мы полагаемъ, что *Loca ad superficiem* Евклида были поверхности вращенія второго порядка и также кривыя, получаемыя отъ пересѣченія плоскостію какъ этихъ поверхностей, такъ и конуса.

### ПРИМѢЧАНІЕ III.

(Первая эпоха н° 8).

#### О поризмахъ Евклида.

Мы обязаны Р. Симсону возстановленіемъ особой формы, свойственной предложеніямъ, называвшимся у древнихъ *Porismata*, и разъясненіемъ нѣкоторыхъ изъ нихъ но неполнымъ указаніямъ Паппа. Въ разныхъ мѣстахъ своего сочиненія Симсонъ воспроизводитъ также и 38 леммъ, заключающихся въ *Collectiones mathematicae* и относящихся къ *Porismata*. съ доказательствами очень часто упрощенными и пополненными; здѣсь же онъ приводитъ доказательства пяти теоремъ, превращенныхъ Ферматомъ въ поризмы, и еще многихъ весьма общихъ предложеній о кругѣ, найденныхъ Стевартомъ и представляющихъ настоящія поризмы.

Но намъ кажется, что Симсонъ не затронулъ еще многихъ другихъ вопросовъ, рѣшеніе которыхъ необходимо для полнаго разъясненія ученія о поризмахъ. У него не объяснено напримѣръ, какою мыслию руководствовался Евклидъ, представляя свое сочиненіе въ такой необычной формѣ; въ какомъ отношеніи это сочиненіе заслуживало того предпочтенія, которое даетъ ему Паппъ; какими способами и дѣйствіями замѣнилось ученіе о поризмахъ въ новой наукѣ; и наконецъ, какъ удовлетворительно объяснить нѣкоторыя мѣста о поризмахъ у Паппа и опредѣленіе ихъ у Прокла. Однимъ словомъ, мы хотимъ сказать, что ученіе о поризмахъ, ихъ происхожденіе, т. е. разумная цѣль, вызвавшая ихъ, ихъ опредѣленіе, употребленіе, приложенія и то, что замѣнило ихъ въ новѣйшихъ ученіяхъ,—все это—тайны, нисколько не разгаданныя въ трудѣ Симсона. Къ этому нужно прибавить, что имъ возстановлено только шесть изъ тридцати поризмъ, приводимыхъ Паппомъ.

По нашему мнѣнію, нѣкоторая тѣма еще лежитъ на этомъ вопросѣ, доставшемся намъ въ наслѣдіе отъ древняго міра, если только для разъясненія его не существуетъ другихъ неувѣстныхъ намъ сочиненій, и если мы вправѣ счесть себя достаточно про nicательными, чтобы понимать сочиненіе Симсона.

Размышленія объ этомъ предметѣ долгое время занимали насъ исключительно и часто отвѣкали отъ занятій, которыми мы хотѣли себя посвятить: интересъ былъ сильнѣе воли. Такимъ образомъ мы составили себѣ нѣкоторыя представленія объ ученіи о поризмахъ и восстановили 24 выраженія Паппа, не затронутыя Симсономъ. Здѣсь мы предлагаемъ краткій разборъ нашей работы, разсчитывая при этомъ на снисхожденіе читателей; понятно, что къ подобному изслѣдованію, составлявшему предметъ живыхъ стремленій величайшихъ геометровъ, мы приступаемъ съ чувствомъ страха и недовѣрія, возбуждаемымъ въ насъ сознаніемъ нашей слабости.

При недостаткѣ документовъ, помощію которыхъ было бы возможно вполне восстановить ученіе о поризмахъ аналитическимъ путемъ, мы принуждены, такъ сказать, составить вновь это ученіе *a priori*, путемъ чистаго синтеза. При этомъ оно должно быть построено на всѣхъ данныхъ и должно быть подвергнуто всѣмъ испытаніямъ, которыя только могутъ быть извлечены изъ сохранившихся до нашего времени отрывковъ.

Понятіе о *Porismata* слѣдуетъ производить, какъ намъ кажется, изъ понятія о *Data*, и, по нашему мнѣнію, таково было его происхожденіе въ сознаніи самаго Евклида.

*Porismata* были то же самое по отношенію къ *мыстамъ*, что были *Data* по отношенію къ простымъ теоремамъ *элементовъ*; такъ что поризмы и данныя составляли дополненія къ элементамъ геометріи, служившія для облегченія примѣненій ихъ къ рѣшенію задачъ <sup>9)</sup>.

---

<sup>9)</sup> Здѣсь позволяемъ себѣ сдѣлать одно замѣчаніе, на которое мы не рѣшались, когда говорили о *Data* Евклида.

Хотя и трудно разгадать смыслъ поризмъ, оставленныхъ Паппомъ, но тотчасъ видно, что въ этихъ предложеніяхъ нѣчто отыскивается. Паппъ, подобно тому, какъ и Евклидъ въ книгѣ *Δεδομένα*, означаетъ это искомое сло-

Съ этой точки зрѣнія главное назначеніе *поризмъ* заключается въ томъ, что онѣ ведутъ къ познанію *мыслъ*, доставляя средство изъ условій, опредѣляющихъ искомое мѣсто, выводить другія, яснѣе указывающія его видъ и положеніе.

Если, напримѣръ, мы ищемъ мѣсто точки, для которой квадраты ея разстояній отъ двухъ неподвижныхъ точекъ, умноженные соответственно на два постоянныя количества, имѣютъ постоянную сумму; то мы докажемъ, что существуетъ неподвижная точка, разстояніе которой отъ всѣхъ точекъ, удовлетворяющихъ вопросу, постоянно; потомъ изъ данныхъ вопроса опредѣлимъ положеніе этой неподвижной точки и величину постоянного разстоянія.

Такимъ образомъ получится поризма, которая показываетъ, что мѣсто искомой точки есть окружность.

Этотъ примѣръ показываетъ, въ чемъ состояло употребленіе поризмъ. Собраніе поризмъ заключало въ себѣ рядъ различныхъ признаковъ и опредѣленій кривыхъ линій (въ книгѣ Евклида только прямой линіи и круга); это былъ сводъ преобразованій ихъ различныхъ свойствъ; поэтому поризмы въ смыслѣ Евклида были въ нѣкоторомъ родѣ *уравненіями* кривыхъ линій. Имъ достигалась простота и удобство способовъ координатъ, (разумѣя подъ этимъ словомъ всевозможные способы выражать кривую посредствомъ двухъ или многихъ переменныхъ).

Ученіе о поризмахъ было такимъ образомъ *аналитическою геометріею* древнихъ; и если бы оно дошло до насъ, мы можетъ быть усмотрѣли бы въ немъ зачатки Декартова ученія. Мы думаемъ по крайней мѣрѣ, что уравненіе прямой линіи заключалось въ поризмахъ Евклида, конечно не въ алгебраической формѣ, въ

---

вомъ декартевомъ и прилагаетъ его же ко всему, что дѣйствительно должно считать даннымъ на основаніи условій вопроса. Выраженія Паппа сдѣлались бы понятнѣе, еслибы только въ послѣднемъ случаѣ употреблять слово *данный*, а величины, которыя нужно еще найти, называть *опредѣленными*.

Это замѣчаніе прилагается также и къ сочиненію «данныя» Евклида, но только занимаюсь разъясненіемъ поризмъ я почувствовалъ неудобство обозначенія однимъ и тѣмъ же словомъ двухъ различныхъ понятій.

которой мы пользуемся имъ теперь. Для примѣра нами приведена въ текстѣ одна изъ такихъ поризмъ. Въ другой разъ мы подтвердимъ это мнѣніе многими доказательствами. И если эти первыя соображенія наши не покажутся лишенными всякой вѣроятности, то мы можемъ прибавить, что Евклиду недоставало только употребленія алгебры, чтобы создать систему координатъ, появляющуюся только со времени Декарта.

Вотъ общая задача, для которой, какъ намъ кажется, Евклидъ назначалъ свои поризмы:

«Геометрическое мѣсто дано посредствомъ общаго построенія всѣхъ его точекъ, или посредствомъ извѣстной системы координатъ; требуется найти другое построеніе, или другую систему координатъ, которымъ удовлетворяли бы всѣ точки этого мѣста и изъ которыхъ можно бы было узнать его видъ и положеніе».

Согласно съ содержаніемъ этой общей задачи, цѣль поризмъ заключалась въ томъ, чтобы облегчить преобразованія построеній или координатъ, принадлежащихъ всѣмъ точкамъ кривой; и сочиненіе Евклида было собраніемъ формулъ, служившихъ для достиженія этой цѣли.

Поэтому Прокль справедливо говорить, что въ поризмахъ дѣло идетъ о *нахожденіи нѣкотораго искомаго, которое ищется и рассматривается не само для себя*. Въ самомъ дѣлѣ, въ нихъ ищутся новые способы построенія, или новыя координаты, только какъ вспомогательныя средства для главной задачи, т. е. для изученія и изслѣдованія кривыхъ.

Поризмы, заключавшіяся въ трехъ книгахъ Евклида, представляли собраніе формулъ, служившихъ для построенія мѣстъ, именно для прямой линіи, точки и круга. Это были извѣстные въ то время, или найденные Евклидомъ, способы выражать различныя построенія этихъ трехъ мѣстъ помощью двухъ, извѣстныхъ образомъ связанныхъ, координатъ и переходить отъ одного изъ построеній къ другому.

Онѣ имѣли также цѣлю приводить къ одному и тому же построенію, или къ одной и той же системѣ координатъ, различныя части фигуры, образуемая, вслѣдствіе условій задачи, различными

построеніями, или координатами, — дѣйствіе, которое въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ сходно съ приведеніемъ многихъ численныхъ или буквенныхъ дробей къ общему знаменателю; дѣйствіе, польза котораго признана въ современной геометріи и которое мы постоянно прилагаемъ во всѣхъ отдѣлахъ математики, когда употребляемъ разнаго рода вспомогательныя координаты и, смотря по требованіямъ задачи, преобразуемъ ихъ одни въ другія.

Польза поризмъ будетъ видна, можетъ быть, еще яснѣе, если мы ихъ сравнимъ также съ другими новѣйшими приѣмами,

Древніе для сравненія различныхъ мѣстъ между собою не имѣли общаго средства, которое могло бы руководить ихъ въ геометрическихъ изысканіяхъ и которымъ мы пользуемся со времени Декарта. Для насъ достаточно выразить мѣсто въ обыкновенныхъ координатахъ, чтобы прямо видѣть его главный характеръ. Затѣмъ изслѣдованіе уравненія показываетъ намъ частныя свойства и особенности кривой и мѣсто, которое она, какъ видъ, занимаетъ въ своемъ семействѣ. Такимъ образомъ нахожденіе уравненія геометрическаго мѣста по системѣ Декарта есть единственный опытъ, который нужно произвести, чтобы узнать общій характеръ мѣста, его положеніе, и отношеніе его къ другимъ извѣстнымъ геометрическимъ мѣстамъ. Древніе не обладали такимъ общимъ и однообразнымъ приѣмомъ изслѣдованія. Не имѣя постоянного образца для сравненія, они принуждены были изобрѣтать различныя средства для распознаванія, въ какихъ отношеніяхъ находится новое, въ первый разъ встрѣтившееся, геометрическое мѣсто къ другимъ уже извѣстнымъ мѣстамъ. Эти средства могли состоять только въ преобразованіи построеній и координатъ съ намѣреніемъ открыть простѣйшія соотношенія, или даже тождество, даннаго мѣста съ извѣстными прежде.

Таково происхожденіе поризмъ. Цѣль ихъ заключалась въ замѣненіи одного геометрическаго или аналитическаго выраженія кривой линіи другимъ.

Эти соображенія объясняютъ связь ученія о поризмахъ съ современными намъ методами и въ то же время показываютъ, какая польза должна была въ нихъ заключаться. Разсматриваемыя съ

такой точки зрѣнія, поризмы представляли дѣйствительно *аналитическую геометрію*, отъ которой наша отличается только алгебраическими приѣмами и обозначеніемъ, честь введенія которыхъ принадлежитъ Декарту. Поризмы у древнихъ замѣняли нашъ теперешній анализъ, который сталъ теперь на ихъ мѣсто поимѣно нашей воли. Весьма замѣчательно, что въ сущности перемѣнилось только названіе. Потомучто анализъ Декарта представляетъ въ своихъ приложеніяхъ ничто иное, какъ непрерывную поризму, имѣющую всегда одни и тѣ же свойства и постоянную форму, въ-высшей степени приспособленную къ тому употребленію, для котораго она назначается. Нашъ анализъ, точно также, какъ и поризмы Евклида, имѣетъ цѣлію вывести изъ данныхъ свойствъ мѣста другое выраженіе его, намъ уже извѣстное и показывающее намъ какъ соотношеніе его съ извѣстными мѣстами, такъ и его видъ и положеніе.

Положимъ напримѣръ, что ищется точка, квадратъ разстоянія которой отъ неподвижной точки находится въ данномъ отношеніи къ разстоянію ея отъ неподвижной прямой.

Взявъ въ плоскости чертежа двѣ прямоугольныя оси и означивъ черезъ  $x$  и  $y$  разстоянія отъ нихъ искомой точки, мы получимъ между этими перемѣнными соотношеніе такого вида:

$$x^2 + y^2 + ax + by = c^2,$$

гдѣ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  суть постоянные коэффициенты, зависяшіе отъ данныхъ вопроса. Этимъ уравненіемъ выражается слѣдующая поризма:

«Можно найти двѣ такіа линіи  $a$  и  $b$  и такой квадратъ  $c^2$ , что, если къ квадратамъ разстояній искомой точки отъ двухъ, проведенныхъ въ плоскости чертежа, осей прибавимъ эти разстоянія, умноженные соответственно на линіи  $a$  и  $b$ , то получимъ сумму, равную квадрату  $c^2$ .»

Эта поризма показываетъ, на основаніи началъ аналитической геометріи, что искомое мѣсто есть кругъ.

Но если бы эти начала и не были извѣстны, или еслибы мы ими не захотѣли пользоваться, то мы упростили бы предыдущее урав-

неніе, перенеся начало координатъ, и получили бы уравненіе вида,

$$x^2 + y^2 = A^2,$$

которое выражаетъ другую поризму:

«Въ плоскости чертежа существуетъ точка, которую можно опредѣлить и которая находится отъ искомой точки на постоянномъ разстояніи, которое также можно опредѣлить».

Эта вторая поризма показываетъ, что мѣсто искомой точки есть кругъ, извѣстный по величинѣ и положенію.

Результаты эти, полученные нами по способу координатъ Декарта, мы могли бы найти безъ вычисленія, путемъ чисто геометрическимъ. Но каковъ бы ни былъ путь, мы видимъ, что эти результаты можно разсматривать какъ поризмы. Отсюда же видно, по нашему мнѣнію, что способъ Декарта замѣнилъ собою поризмы, доставивъ намъ при помощи вычисленія вмѣсто различнаго рода поризмъ, употреблявшихся древними, одну общую формулу, прилагаемую съ удивительнымъ удобствомъ къ всевозможнымъ задачамъ.

Высказавъ наши мнѣнія о теоріи поризмъ, мы должны бы были повѣрить ихъ помощію текста, оставленнаго намъ Паппомъ объ этомъ предметѣ; но Примѣчаніе это выходитъ и безъ того слишкомъ длинно, такъ что мы не будемъ входить въ дальнѣйшія подробности и ограничимся слѣдующими замѣчаніями. Усвоивъ себѣ эту точку зрѣнія на ученіе о поризмахъ и руководствуясь ею, мы пришли къ достаточно простому объясненію 24 поризмъ, не возстановленныхъ Симсономъ. При этомъ мы основывались какъ на 38 леммахъ Паппа къ поризмамъ, такъ и на теоремахъ его, относящихся къ *loci plana* Аполлонія. Такъ какъ поризмы Евклида суть предложенія о прямолинейныхъ и круговыхъ мѣстахъ, то мы имѣли основаніе думать, что Аполлоній долженъ былъ ими пользоваться при составленіи своихъ *loci plana*, изъ которыхъ можно бы составить также цѣлую книгу поризмъ.

Границы сочиненія не позволяютъ намъ привести здѣсь всѣ тѣ поризмы, которыя мы нашли и считаемъ соотвѣтствующими тексту Паппа. Вмѣсто этого мы укажемъ на два весьма общія предложе-

нія, которыя въ своихъ многочисленныхъ слѣдствіяхъ заключаютъ 15 теоремъ Паппа, относящихся къ первой книгѣ поризмъ Евклида и изъ которыхъ слѣдовательно можно вывести эти послѣднія.

Изъ этихъ же двухъ предложеній проистекаютъ многія системы координатъ и, между прочимъ, система Декарта. Отсюда видна уже несомнѣнная связь между поризмами Евклида и нашими системами координатъ—связь, служащая первымъ подтвержденіемъ идей, высказанныхъ нами по поводу ученія о поризмахъ.

Два предложенія, о которыхъ мы говоримъ и которыя мы представляемъ въ формѣ поризмъ, суть слѣдующія.

*Первая поризма. Возьмемъ на плоскости двѣ точки  $P$  и  $P_1$ , двѣ сѣкущія, встрѣчающіяся съ прямою  $PP_1$  въ точкахъ  $E$  и  $E_1$ , и на этихъ сѣкущихъ двѣ постоянныя точки  $O$  и  $O_1$ ; если изъ каждой точки какой-нибудь данной прямой будемъ проводить къ точкамъ  $P$  и  $P_1$  прямая, пересѣкающіяся съ сѣкущими  $EO$  и  $E_1O_1$  въ точкахъ  $a$  и  $a_1$ , то можно опредѣлить два такіа количества  $\lambda$  и  $\mu$ , чтобы постоянно существовало соотношеніе:*

$$\frac{Oa}{Ea} + \lambda \frac{O_1a_1}{E_1a_1} = \mu. \quad (1)$$

*Вторая поризма. На плоскости проведены двѣ неподвижныя прямая, пересѣкающіяся въ точкѣ  $S$ ; на этихъ двухъ прямыхъ взяты двѣ неподвижныя точки  $O$  и  $O_1$ ; если около какой-нибудь данной точки будемъ обращать сѣкущую, пересѣкающую двѣ неподвижныя прямая въ точкахъ  $a$  и  $a_1$ , то можно найти два такіа количества  $\lambda$  и  $\mu$ , что постоянно будетъ существовать соотношеніе:*

$$\frac{Oa}{Sa} + \lambda \frac{O_1a_1}{Sa_1} = \mu. \quad (2)$$

Обратныя предложенія также справедливы, т. е.

1. Если между отрѣзками, образуемыми двумя перемѣнными точками  $a$  и  $a_1$  на двухъ неподвижныхъ прямыхъ  $EO$  и  $E_1O_1$  существуетъ соотношеніе (1), то геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ  $Pa$  и  $P_1a_1$  будетъ прямая, положеніе которой вполне опредѣляется двумя постоянными  $\lambda$  и  $\mu$ .