М. Филоненко-Бородич

Теория упругости

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
М11

М. Филоненко-Бородич
М11 Теория упругости / М. Филоненко-Бородич – М.: Книга по Требованию, 2024. – 300 с.

ISBN 978-5-458-50324-2

Предлагаемый вниманию читателей «краткий курс теории упругости» составлен на основе лекций, прочитанных автором в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова. Эти лекции имеют своею целью сообщить студентам только основные сведения по теории упругости, так как более глубокое изучение отдельных вопросов является задачей специальных курсов, читаемых на последующих семестрах. Поэтому такие вопросы, как теория оболочек, теория пластинок и тонких стержней, теория пластичности и нелинейная теория упругости не затронуты в настоящем курсе совсем, а о плоской задаче и об упругих волнах даны только общие представления.

ISBN 978-5-458-50324-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Глава X. Изгиб плоской пластинки.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ.

Книга эта в своём первоначальном виде вышла в 1932 году под названием «Основы теории упругости»; в 1933 году она была переиздана без существенных изменений.

Необходимость выпуска краткого учебника по теории упругости для студентов втузов и инженеров диктовалась тем, что курс теории упругости, введённый в ряде втузов, не был обеспечен соответствующей литературой: единственный на русском языке курс теории упругости С. П. Тимошенко, изданный в 1914—1916 годах к тому времени сделался библиографической редкостью и зачастую отсутствовал даже в библиотеках втузов.

При составлении учебника автор стремился достигнуть возможной простоты и понятности изложения многих трудных основных вопросов, которые вместе с громоздкостью выкладок часто отпугивают читателя, интересующегося скорее приложениями, чем самим обоснованием и построением теории. Конечно, такая простота могла быть достигнута лишь за счёт полноты, строгости и обоснованности в трактовке более сложных мест теории, а также за счёт того, что в книгу не были включены задачи, хотя и важные для техники, но требующие для своего решения более или менее сложного математического аппарата.

К настоящему—третьему—изданию книги автор счёл полезным немного изменить самое заглавие её с тем, чтобы оно более соответствовало назначению и содержанию книги.

Несмотря на выполненную значительную переработку содержания, книга попрежнему предназначена служить первым концентром изучения теории упругости для лиц, имеющих подготовку по математике в объёме нормальной программы втузов. При переработке автор учёл два факта.

Во-первых, со времени предыдущего издания у нас появился ряд прекрасных курсов теории упругости, освещающих как самое построение её, так и многочисленные приложения, важные для техники; достаточно перечислить курсы А. Лява, С. П. Тимошенко, П. Ф. Папковича, Л. С. Лейбензона, А. и Л. Фёппля, С. В. Серенсена, а также выдающуюся и теперь широко известную работу Н. И. Мусхелишвили «Некоторые задачи теории упругости»; имеются такие солидные, хотя и конспективно изложенные монографии, как «Математическая теория упругости» Треффца и «Статика упругого тела» Геккелера.

С другой стороны, запросы инженеров в области теории упругости за последние 10—12 лет значительно возросли как в смысле количества задач, необходимых для техники, так и в смысле глубины трактовки тех вопросов, в которых следует инженеру разобраться для получения возможности читать более солидные курсы и специальные работы.

В этих условиях перед автором стала задача: точнее определить место переиздаваемой книги среди указанной выше достаточно богатой литературы и, вместе с тем, позаботиться, чтобы книга эта была в состоянии снова оказывать помощь читателям той категории, для которой она оказалась полезной даже в её прежнем виде.

Автор счёл рациональным не становиться на путь включения в книгу большого числа новых частных задач, важных для инженерного расчёта, так как подобные задачи в изобилии имеются в перечисленной выше литературе и во многих специальных работах. Дополнения, сделанные к настоящему изданию, ориентированы в другом направлении, отмеченном выше: помочь читателю лучше разобраться в основных, хотя бы элементарных, вопросах теории упругости путём возможно более систематического и связного изложения их и облегчить ему переход к другим, более полным курсам и специальным работам.

С этой целью значительно расширены первые две главы (теории напряжений и деформаций)*), почти заново написана глава VIII о кручении и изгибе прямого стержня; дополнены главы VI и VII, трактующие плоскую задачу; добавлена глава IX, в основном посвящённая методу Буссинеска и, в частности,—его классической задаче о действии нагрузки на границу полупространства; задача эта теперь играет большую роль в расчётах прочности грунтов под сооружениями. В этой же главе даны начальные сведения о применении функций комплексной переменной в плоской задаче, а также несколько дополнен вопрос об упругих волнах, кратко и элементарно затронутый в главе IV.

Многое из вновь добавленного материала может показаться чрезмерно сложным для читателей, впервые знакомящихся с предметом; учитывая это, автор счёл полезным отметить звёздочкой те разделы, которые могут быть пропущены при первом чтении книги.

В ряде задач применён классический метод разделения переменных, данный Эйлером и Пуассоном для интегрирования линейных уравнений в частных производных; это кое-где привело к некоторому осложнению и удлинению выкладок, но, по мнению

*) Ссылки здесь отнесены к новой нумерации глав и параграфов.

автора, позволило дать общее обоснование ряду решений частных задач (методы Файлона и Рибьера в плоской задаче о прямоугольнике, построение общего решения плоской задачи в полярных координатах, кручение стержня прямоугольного сечения, решение волновых уравнений методом стоячих волн). Между прочим, при решении плоской задачи в полярных координатах, путём внимательного проведения этого метода, автору удалось найти четыре новых частных решения с особенностями в полюсе, не фигурирующих в решении, данном Мичеллом [формулы (7.75) и (7.76) § 42 и далее].

В настоящем издании, как и ранее, опущены весьма эффективные приближённые энергетические методы; включение их теперь, после выхода в свет глубокого и всестороннего труда Л. С. Лейбензона «Вариационные методы решения задач теории упругости» было бы излишним.

В остальном автор предоставляет читателям судить о правильности направления, принятого им при переработке книги; он весьма благодарен читателям, сделавшим существенные замечания о многих неисправностях предыдущего издания и тем содействовавшим улучшению настоящего.

Глубоко благодарен автор Л. И. Мальгинову и М. И. Найману, оказавшим большую и любезную помощь в чтении корректур и устранении ряда редакционных дефектов.

Москва 25/VII 1946 г. *М. Филоненко-Бородич*

ВВЕДЕНИЕ.

Теория упругости представляет собой весьма важный раздел *математической физики*. Она рассматривает действие сил на упругие тела с точки зрения возникающих в них напряжений и деформаций как в состоянии равновесия, так и в движении. Такими же вопросами, как известно, занимается и *сопротивление материалов*.

Однако, в курсе сопротивления материалов мы путём некоторых упрощений в постановке задач и в методе их решения стараемся получить возможно более простые результаты, удобно применяемые к расчётной практике. Теория упругости стремится подойти к решению задач более общим и более точным методом. Целью этого метода являются, прежде всего, проверка полученных упрощённых решений и определение величин получающихся неточностей; вместе с тем, имеется ряд задач, самый подход к которым методами, привычными для сопротивления материалов, невозможен; это главным образом задачи, в которых упругое тело не имеет типичной для сопротивления материалов формы стержня и бруса; сюда же следует отнести задачи о местных напряжениях, возникающих в местах приложения к упругому телу нагрузок. Решения подобных задач, даваемые теорией упругости, имеют непосредственный практический интерес.

К теории упругости относят также много задач, решаемых с той же степенью приближения, как и в сопротивлении материалов, но требующих более сложных методов математического анализа (стержни двоякой кривизны, пластинки, оболочки, теория колебаний упругих тел, устойчивость упругих форм равновесия). Вообще же теория упругости в отличие от сопротивления материалов рассматривает те задачи, где математическая сторона является сложной. Точной границы между обеими этими дисциплинами провести нельзя, и многие задачи фигурируют и тут и там.

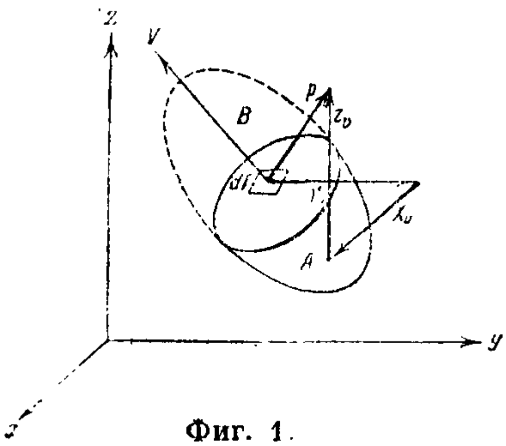
Однако, решение задач методами теории упругости настолько усложняется, что до настоящего времени многие задачи, играющие большую роль в практике, не имеют решения, хотя к настоящему времени теория упругости развилась уже в мощную дисциплину, широко использующую аппарат математического анализа и имеющую собственную богатую литературу.

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ.

§ 1. Напряжённое состояние тела.

Понятие о напряжениях и способы обращения с ними в более простых случаях известны из сопротивления материалов. Здесь нам прежде всего придётся ввести такие обозначения напряжений, которые были бы удобны в пространственной задаче и позволяли бы легко различать напряжения по различным площадкам, проведённым через данную точку тела.



Фиг. 1.

Существует несколько систем обозначений; здесь мы пользуемся системой, принятой во многих курсах теории упругости.

Представим себе (фиг. 1) твёрдое тело, рассечённое плоскостью на две части A и B. Часть B после рассечения отбросим; в плоскости сечения выделим элементарную площадку dF; направление этой площадки будем характеризовать внешней нормалью к ней (внешней по отношению к оставшейся части A).

При помощи внешней нормали мы кратко и ясно указываем не только направление площадки, но и ту часть тела (B или A), которая отбрасывается после рассечения и действие которой мы далее заменяем силами.

Пусть p—полное напряжение на данной площадке; $p=\frac{dP}{dF}$, где dP—равнодействующая сил, приходящихся на площадку dF.

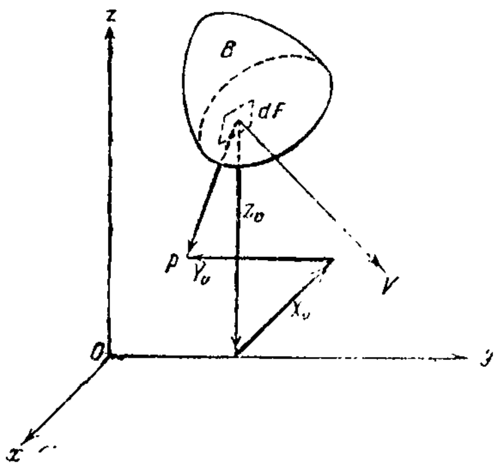
Наметим где-либо в пространстве произвольную систему прямоугольных координат $Oxyz$, при помощи которой будем определять положение точек рассматриваемого тела. Напряжения будем определять их проекциями на оси этой системы; ею же далее воспользуемся при исследовании деформаций.

Проекции на оси координат полного напряжения p на площадке dF обозначим через X_v, Y_v, Z_v. В этих обозначениях основная буква X, или Y, или Z, указывает, на какую ось берётся проекция; значок v при ней указывает на направление внешней нормали к той площадке, напряжение на которой рассматривается; поэтому, например, обозначение X_v должно быть высказано так: «проекция на ось Ox полного напряжения на площадке с внешней нормалью V».

Если мы после рассечения отбросим часть A, то внешняя нормаль к той же площадке dF будет иметь обратное направление. Проекции полного напряжения на ней (фиг. 2) придётся обозначить так: X_{-v}, Y_{-v}, Z_{-v}; при этом очевидно, что

$$X_{-v} = -X_v;\ Y_{-v} = -Y_v;\ Z_{-v} = -Z_v,$$

так как напряжения X_v, Y_v, Z_v выражают действие части B на часть A, а напряжения X_{-v}, Y_{-v}, Z_{-v} выражают действие части A на часть B; действия эти равны по величине, но противоположны по направлению.



Фиг. 2.

В сопротивлении материалов полное напряжение обычно разлагают на нормальную и касательную составляющие; введённые нами теперь проекции напряжения

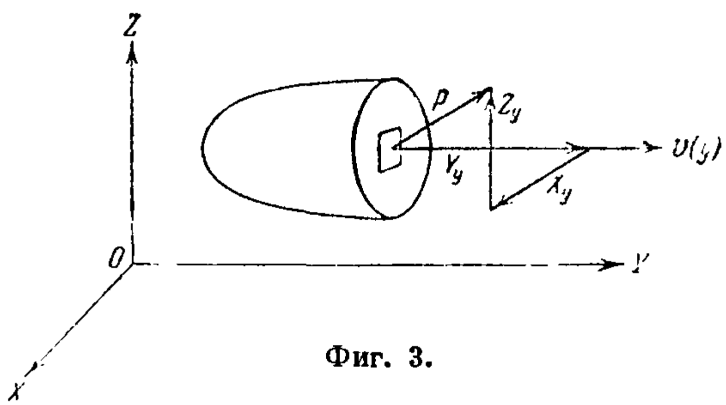
$$X_v,\ Y_v,\ Z_v$$

на случайно выбранные оси координат Ox, Oy, Oz, вообще говоря, не будут ни нормальными, ни касательными.

В последующем мы чаще всего будем делать сечение, перпендикулярное к какой-либо оси координат. Сделаем, например, сечение перпендикулярно к оси Oy; тогда получим следующие проекции полного напряжения (фиг. 3):

$$X_y;\ Y_y;\ Z_y.$$

В этом случае Y_y будет нормальное напряжение, X_y, Z_y — касательные напряжения.



Фиг. 3.

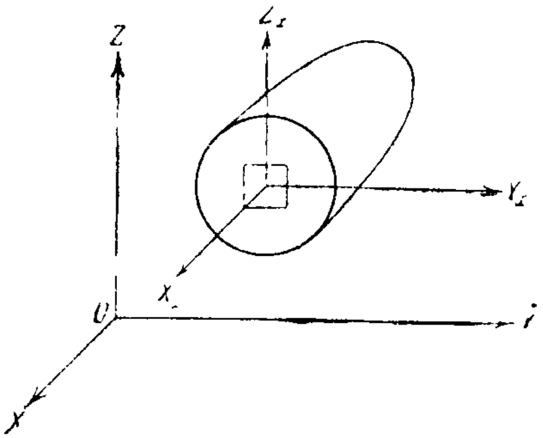
На фиг. 4а и 4б показаны обозначения напряжений на площадках, нормальных к остальным двум осям. Собирая эти результаты, получаем такую систему напряжений на площадках, параллельных координатным плоскостям:

$$X_x,\ Y_x,\ Z_x;\ X_y,\ Y_y,\ Z_y;\ X_z,\ Y_z,\ Z_z.$$

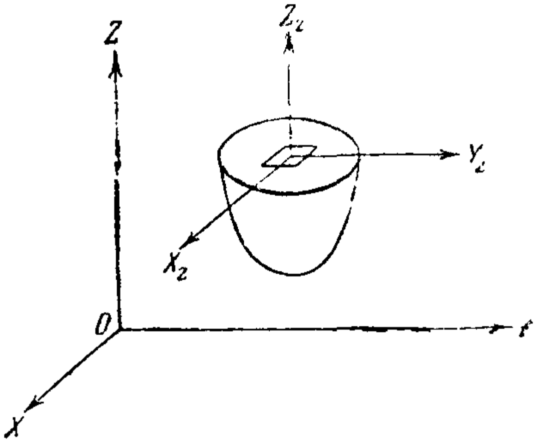
Легко видеть, что напряжения

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,$$

в обозначении которых обе буквы одинаковы, суть нормальные напряжения. Остальные шесть являются касательными.



Фиг. 4а.



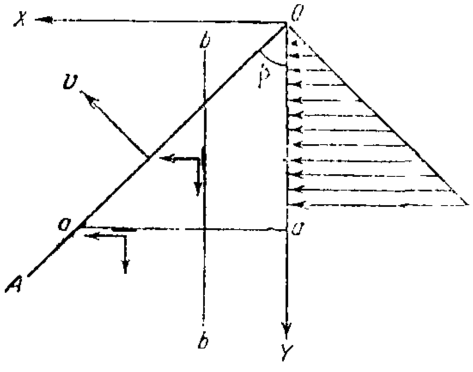
Фиг. 4б.

Для лучшей ориентировки в этих новых обозначениях предлагаем читателю проделать следующие упражнения.

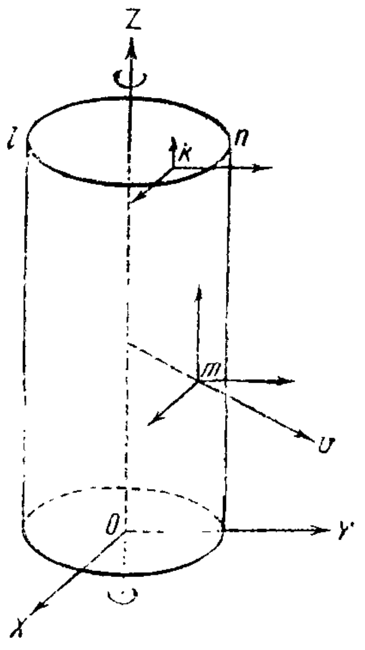
Упражнения.

1. На фиг. 5 изображено поперечное сечение YOA стенки плотины, которая по грани OY нагружена давлением воды; грань OA не несёт нагрузки.

Обозначить нормальное и касательное напряжения на грани OY и написать, чему они равны (обращать внимание на направле-



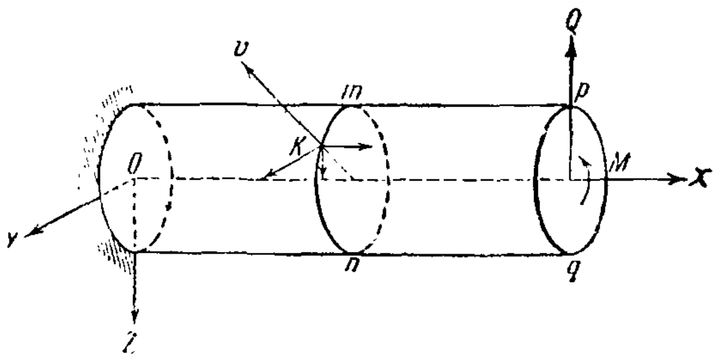
Фиг. 5.



Фиг. 6.

ние давления, направление оси Ox и знак проекции). Обозначить также составляющие напряжения на косой грани OA (внешняя нормаль V) и записать отсюда условия того, что грань OA свободна от нагрузки. Обозначить напряжения в сечениях aa и bb при отбрасывании той или иной части (левой или правой; верхней или нижней) стенки после рассечения.

2. Цилиндрическое тело (фиг. 6) скручивается силами, приложенными по концевым поперечным сечениям. Обозначить напряжения в любой точке k поперечного сечения ln и записать условие, что нормальное напряжение отсутствует. Обозначить напряжение в любой точке m боковой поверхности и записать условия, что эта поверхность ничем не нагружена.



Фиг. 7.

3. Цилиндрический брус (фиг. 7) изгибается силами, приложенными в концевом поперечном сечении pq. Записать условия того, что боковая поверхность свободна от нагрузки (см. предыдущее упражнение), обозначить те напряжения в сечении mn (нормальные и касательные), которые определяются в сопротивлении материалов.

В настоящее время некоторыми авторами применяются следующие обозначения, принятые также в технической литературе: нормальные напряжения на площадках, нормальных к осям OX, OY и OZ, обозначаются соответственно через

$$\sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z;$$

касательные напряжения по тем же площадкам обозначаются через

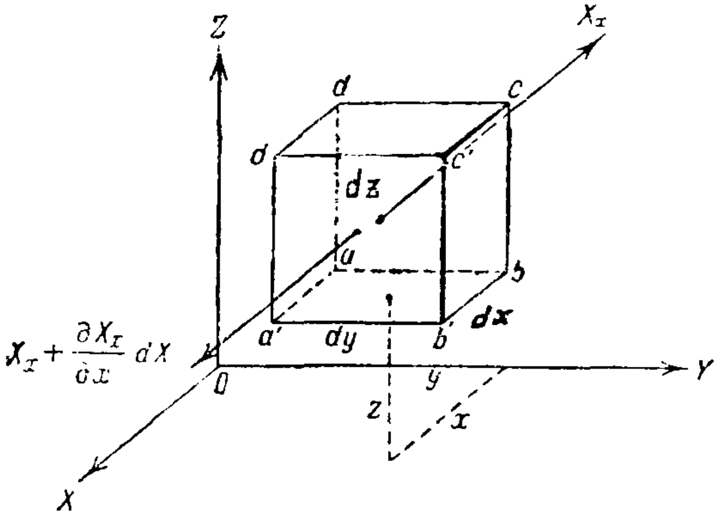
$$\tau_{xy}, \ \tau_{yz}, \ \tau_{xz},$$

так что

$$X_y = \tau_{xy}; \ Y_z = \tau_{yz}; \ X_z = \tau_{xz}.$$

§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия.

Из твёрдого тела выделим бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда с тремя плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Рёбра этого параллелепипеда пусть будут dx, dy, dz (фиг. 8). Объём его равен $d\tau = dx\,dy\,dz$. После разреза действие отброшенных частей заменим силами. Напряжение на каждой грани разложим на три составляющие. Итого на всех гранях будет действовать $6 \times 3 = 18$ составляющих напряжений. Это будут внешние силы, действующие на наш параллелепипед. Кроме того, будем предполагать, что в данном теле существуют так называемые объёмные силы. Будем считать, что эти силы приложены к массе тела; такова, например, сила тяжести, с которой мы далее будем иметь дело.



Фиг. 8.

Пусть к единице массы тела приложены некоторые объёмные силы, которые мы также разлагаем на три составляющие: X, Y, Z. Тогда объёмные силы, приходящиеся на массу параллелепипеда $\rho\, d\tau$ (ρ — плотность тела в данной точке T, представляющая собой массу, заключённую в единице объёма и имеющая размерность $\frac{кг \cdot сек^2}{см^4}$), будут

$$
\begin{aligned}
X\rho d\tau &= X\rho\, dx\, dy\, dz;\\
Y\rho d\tau &= Y\rho\, dx\, dy\, dz;\\
Z\rho d\tau &= Z\rho\, dx\, dy\, dz.
\end{aligned}
$$

Напряжения, вызываемые внешними силами в твёрдом теле, различны в разных точках его, и потому они, вообще говоря, должны выражаться функциями от координат точек:

$$
\left.
\begin{aligned}
X_x &= F_1(x, y, z);\\
Y_y &= F_2(x, y, z);\\
Z_z &= F_3(x, y, z);\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\} \tag{1.1}
$$

Если на площадку $abcd$ элемента (фиг. 8) действует напряжение $X_{-x} = -X_x$, то на площадку $a'b'c'd'$ действует напряжение $X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}dx$, так как, переходя к площадке $a'b'c'd'$, мы в первом уравнении (1.1) изменяем лишь одну из координат, а именно x. Таким образом, мы легко обозначим напряжения на всех площадках, ограничивающих параллелепипед.

Предполагаем, что данное твёрдое тело находится в равновесии; тогда для каждого отдельного элемента должны удовлет-