

П. Бехтерев

**Аналитическое исследование обобщенного
закона Гука**

Часть 1

УДК 53
ББК 22.3
П11

П11 **П. Бехтерев**
Аналитическое исследование обобщенного закона Гука: Часть 1 / П. Бехтерев – М.: Книга по Требованию, 2013. – 154 с.
ISBN 978-5-458-57954-4

ISBN 978-5-458-57954-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Аналитическое исследование обобщенного закона Гукка

Применение учения о потенциальной энергии и
начала наименьшей работы.

Вступленье.

Предлагаемая работа является первой частью предпринятого нами теоретического исследования упругих свойств анизотропных тел. Идейная сторона исследования исчерпывается применением учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы к вопросам, связанным с концепцией кризиса, обобщенным законом Гукка, которыми управляют явления упругости.

Обобщенный закон Гукка выражает линейную зависимость между напряжениями и деформациями в анизотропных телах и представляется в виде системы линейных уравнений; он иногда называется линейным законом Гукка. Это обобщение было формулировано не сразу. Отметим авторов. Cauchy (1829), Green^a (1839), Saint-Venant^a (1855) и Clebsch^a (1862). Первоначально же открытый Робертом Гукком (Hooke) в 1675 году закон, как известно, носит более элементарный характер.

Закон Гукка не является абсолютным законом природы т. е. сам по себе не может быть возведен в принцип. Это всецело закон опытный. Он оказывается справедливым для небольшого деформаций весьма многих тел. охватывает явления упругости в кристаллах, вообще-анизотропных телах и, наконец, в частности, применим и к телам изотропными. Представим себе мысленно, что существуют ряд веществ, для которых закон Гукка соблюдается в точности. Этих веществ, принимая во внимание кроме того однородности, произвольно, как известно, наименование идеально-упругих веществ. Для них закон Гукка канонизирован условно по своему определению. Все упругие свойства реальных упругих тел оказываются тем ближе к найденным на теории идеально-упругих, тем то-

нее соблюдается для первого закона Гука.

В нашем исследовании мы займемся исключительно идеальными упругими веществами.

Область изучаемых вопросов теории упругости должна быть отнесена к физике твердого тела и к механике сплошных масс.

Применением обобщенного закона Гука интересовались по преимуществу в конце прошлого столетия, причем особенно замечателен цикл работ Voigt^a. Можно сказать, что работами этого исследователя с точки зрения упругих свойств анизотропных тел получила развитие до степени достоверного научного значения, как в отношении достигнутый или теоретической разработки, так и опытной части, обставленной вполне убедительно.

Несомненно, что именно изучение анизотропных веществ ведет к действительному познанию упругих свойств твердых тел, причем подлежащее развитие точной теории совершенно необходимо для разрешения этой существенной проблемы.

Нашим образом, становится ясно и главная цель нашего исследования.

Что касается теории упругости изотропных тел, то она должна быть рассматриваемая, как частное учение, обладающее весьма выгодной сравнительной простотой идеи.

Эта теория, имеет значительное применение для расчетов строительной практики, где отступлением материалов от изотропности пренебрегают.

Содержание нашего исследования сводится к выяснению зависимостей между константами упругости и ограничениям их возможных значений. В первую голову мы рассма-

требует самый общий случай анизотропии вещества, при котором внутренняя симметрия является наименьшей и число независимых понятий достигает 21. В дальнейшем же в виде иллюстрации полученных общих выводов рассматриваем и противоположный крайний случай — изотропное тело и также еще один известный вид совершенной симметрии, которую мы имеем симметрией монокристаллической осн.

Учение о потенциальной энергии сил упругости мы применяем, пользуясь выражениями ее в виде квадратичной формы. Определенность, а именно положительность этой формы исчерпывает средства метода, заключающего, следовательно, также и применение начала наименьшей работы. Основное неравенство позволяет сделать ряд интересных выводов и притом только в виде опять-таки равенств. Таким образом в данной части исследования найденные зависимости сводятся главным образом к неравенствам.

Указанным методом, заключающим в себе совокупное применение закона сохранения энергии и принципа наименьшей работы, эти два замечательных синтезоведения, мы пользуемся как выражением наиболее интроспективных представлений о законах природы, следуя в данной сфере Гиббса, и совсем не включая в работу популярного представления. Несомненно, что указанная точка отправления Гиббса в настоящее время еще имеет за собой все преимущества, как основанная на чистой энергетике, и заключающая наименьшее количество произвольных допущений. Эти общие методы должны быть использованы возможно полно до своего естественного предела. Дальнейшие же шаги и, может быть, даже завершение

проблемы, по нашему убеждению, всецело зависит от развития точного учета атомизма в отношении предельных количественных формулировок, в особенности интегральных, а также от достижения знания между-молекулярных взаимоотношений на экспериментальной основе до полной осозаемости.

В атомизме и молекулярной физике-будущее теории упругости; а в настоящее время пока молекулярные теории твердого тела еще недостаточны в данной области, повидимому, для науки окажется выгоднее обратная операция, а именно: все экспериментальные факты из области изгиба упругости, которые, не противореча общим законам, в тоже время не могут быть из них выводимы, могут полагаться в основу для некоторых утверждений, раскрывающих особенности свойств молекул, сил их взаимодействия, их вращений и пр.

В математическом отношении наша работа проведена вполне: элементарными путями и с применением теории детерминантов, причем во многих случаях приводятся оба пути исследования. Вообще выясняется, что изгибная область представляет широкое поле применения учета о детерминантах. Этого также предлагаемое исследование представляет одно из существенных приложений теории определенных квадратичных форм и физике.

Как на некоторое нововведение в общей теории и приложениях укажем на сделанную нами подстановку вместо обычно используемых компонентов екальватонных напряжений величин в $\sqrt{2}$ раз больших а вместо компонентов деформаций величин в $\sqrt{2}$ раз меньших. Таким образом, в сущности, мы смиримся с новыми физическими величинами.

Особенно существенное значение это нововведение имеет

для последующих частей нашего исследования.

Факторы, в редакционном отношении мы хотим тут дать сведения о физическом смысле отдельных компонент упругости и внимательно отнеслись к вопросам терминологии и обозначений.

О компонентах упругости.

Теория упругости пользуется 12-ю общепринятыми компонентами упругости ортогональной системы координат, причем в рассмотрение вводятся некоторый элементарный ортогональный параллелепипед.

Имеем следующие компоненты его грани: нормальное напряжение и два сдвигающих, линейная деформация растяжения и две деформации сдвига; заметим при этом, что принимаются во внимание только относительные, деформации.

Мы знаем, что по характеру своему компоненты разбиваются на две группы, а именно: 6 компонентов напряжений и 6 компонентов деформаций.

Теория напряжений и теория деформаций обычно рассматриваются отдельно, причем обращает на себя внимание чрезвычайная близость содержания этих двух отделов, достигающая до полного подобия. Нетрудно понять отчего это происходит.

Мы обращаем внимание на некоторое различие в существующих формулах теории напряжений и теории деформаций, относящихся к преобразованию координат. Это различие может быть учтено и при том различными путями.

Воспользуемся временно обозначениями компонентов по Гаскелу¹⁴.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - нормальные напряжения,

- $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ — скалярные напряжения
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ — линейные деформации растяжения,
 $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ — деформации сдвига,

где индексы x, y, z показывают, к какой из осей координатной системы $OXYZ$ данный компонент должен быть отнесен.

Зададим новую координатную систему $Ox'y'z'$ и пусть новая начальная точка O . Коэффициенты угла поворота преобразования координат определяются путем будут названы следующей таблицей.

	Ox	Oy	Oz
Ox'	a_1	b_1	c_1
Oy'	a_2	b_2	c_2
Oz'	a_3	b_3	c_3

Эти коэффициенты упругости системы $Ox'y'z'$ значения на вербу выражены из функции коэффициентов первоначальной системы $OXYZ$. Как известно, при этом получаются следующие две системы выражений — всего 12 формул;

$$\epsilon'_x = a_1^2 \epsilon_x + b_1^2 \epsilon_y + c_1^2 \epsilon_z + 2b_1 c_1 \gamma_x + 2a_1 c_1 \gamma_y + 2a_1 b_1 \gamma_z$$

$$\gamma'_x = a_1 a_2 \epsilon_x + b_1 b_2 \epsilon_y + c_1 c_2 \epsilon_z + (b_1 c_2 + c_1 b_2) \gamma_x + (a_1 c_2 + c_1 a_2) \gamma_y + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \gamma_z$$

и

$$\epsilon'_y = a_2^2 \epsilon_x + b_2^2 \epsilon_y + c_2^2 \epsilon_z + 2b_2 c_2 \gamma_x + 2a_2 c_2 \gamma_y + 2a_2 b_2 \gamma_z$$

$$\gamma'_y = 2a_2 a_1 \epsilon_x + 2b_2 b_1 \epsilon_y + 2c_2 c_1 \epsilon_z + (b_2 c_1 + c_2 b_1) \gamma_x + (a_2 c_1 + c_2 a_1) \gamma_y + (a_2 b_1 + b_2 a_1) \gamma_z$$

Мы видим, что обе системы уравнений заключают асимметрично расположенные коэффициенты. И при этом этот коэффициент в них расположен разнотно, создавая упомянутую необходимость.

Нетрудно придумать подстановки, които указаные разликы измръняются например, достаточно положить $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_2$, $V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_2$, и также $V_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} V_2'$, $V_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} V_2'$, $V_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} V_2'$, чтобы обе системы уравнений имели одинаковый вид.

Эта подстановка дает однообразные формулы для констант упругости при преобразовании координат, но вполне нас удовлетворить не может, ибо при ней квадратичное выражение потенциальной энергии становится ассиметрическим.

Указанную подстановку мы встречаем у Тодылева и Солова. Авторы вводят ее в некоторых местах только ради упрощений.

Неуралик таких же упрощений достигает, помнясь удвоенной величиной скалярных напряжений.

Подстановки указанных авторов дают только кажущееся благо упрощений и не могут быть распространены на всю теорию, ибо, как сказано, в некоторых областях исследований, наоборот, значительно усложняют запись.

Мы ставим задачу о такой подстановке, при которой теории напряжений и деформаций сделаются бы одинаковыми и в то же время выражение потенциальной энергии оставалось бы симметрической функцией компонентов. Vogt повидалому, пытался и такой же необходимости.

Для достижения намеченной цели оказывается нужно положить

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \sqrt{2} V_x & V_y &= \sqrt{2} V_y & V_z &= \sqrt{2} V_z \\ \omega_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_x & \omega_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_y & \omega_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

Величины V и ω с разными индексами, в сущности, являются новыми функциями величин для которых, впрочем, мы обратим наименования скалярных

напряжений и деформаций двуга, а для прежних предло-
жили наименование преантисимметрических напря-
жений и деформаций двуга. Voigt называет первые орто-
гональными тензорными компонентами, а вторые обикно-
венными тензорными компонентами

В результате этого замещения 6-ти компонент σ приобретают некоторые новые значения и константы общего выражения закона Гюка. Ужже мы увидели, что наиболее употребительные из этих констант частью сохраняют свои прежние значения, частью увеличиваются или уменьшаются вдвое и только сравнительно редко выражаются симметрические константы полуцелой иррациональный множителя.

Существенные выводы приведенной в нашем исследовании постановки сводятся к следующему: все формулы, выводимые на основании учения о потенциальной энергии и по методу преобразования координат, для общих модулей упругости и коэффициентов деформаций (т.е. для величин λ и μ , см. ниже) оказываются совершенно одинаковыми, т.е. достигается полная взаимность общих констант λ и μ . В частности, выражение потенциальной энергии остается симметрической функцией и также симметричен его дискриминант. Словами, теория напряжений и деформаций совпадают.

Малыми образами, аналитическое исследование зависимостей между общими константами нам достаточно произвести хотя бы только для модулей упругости, тогда зависимость между коэффициентами деформаций станут известными путем лишь замены в нашем обозначении букв λ и μ на λ и μ . Например, найдя, что всегда

$$\lambda_{12} < \frac{\lambda_{11} + \lambda_{22}}{2}$$

утверждаем, что и

$$a_{12} < \frac{a_{11} + a_{22}}{2}.$$

Эта замечательная константа сохраняется и для формул одновременно выполняющихся константы обеих характеристик

Далее, для сферического изотропного тела вместо неединичной формулы

$$\lambda'_{44} = \frac{1}{2}(\lambda'_{11} - \lambda'_{12}) \quad \text{и} \quad a'_{44} = 2(a'_{11} - a'_{12}),$$

в которых мы отметили для различения константы знаками вверх, получаем, как и Voigt, более простые и приятные соотношения

$$\lambda_{44} = \lambda_{11} - \lambda_{12} \quad \text{и} \quad a_{44} = a_{11} - a_{12}.$$

Вот типичный практический констант, встречающийся в теории упругости изотропных тел, указывает следующее.

Вместо равенства

$$\lambda'_{44} = N$$

где N модуль Рива, получаем

$$\lambda_{44} = 2N = m$$

т. е. константа λ_{44} имеет значение второго коэффициента m теории Lamé и Cauchy, причем вместо

$$N = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

где E — модуль Юнга и μ — коэффициент Пуассона, имеем более простую зависимость

$$m = \frac{E}{1+\mu}.$$

То же упрощение получается и для величин обратных, т. е. коэффициентов деформаций.

Заметим, что величину m по смыслу нашей терминологии мы могли бы назвать значением величины N тоже модуль Рива.

Итак в алгебраическом отношении полезность принятой нами подстановки /1/ — несомненна.

Если же хотим пойти несколько дальше, то должны поставить вопрос о физическом смысле новых компонент напряженности.

Равенства [1] можно представить в следующем виде $\mathcal{T}_x = \bar{T}_{yz} + \bar{T}_{zy}$, $\mathcal{T}_y = \bar{T}_{zx} + \bar{T}_{xz}$, $\mathcal{T}_z = \bar{T}_{xy} + \bar{T}_{yx}$ где опять-же $\bar{T}$ с индексом применено в обозначении по Grosch'у

Мы видим, что компоненты $\mathcal{T}$ представляются суммой симметрической пары одинаковых и взаимно перпендикулярных компонент $\bar{T}$, выражающих силы, действующие вдоль взаимно-перпендикулярных граней элементарного параллелепипеда и отнесенные к единице площади. Таким образом, мера приложенных сжимающих напряжений $\mathcal{T}$ вполне понятна.

Что касается меры деформаций $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$, то она задается в нашем случае формулами:

$$W_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad W_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad W_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$
 где u, v, w представляют компоненты перемещений данной точки сплошного тела. Физическое представление компонент W несомненно возможно, но более или менее проблематично.

Таким образом, некоторую исключительность вновь введенных компонент, формально выходящих, мы отрицать не будем

Место выражений обобщенного линейного закона Гука и места их обратных

Линейные выражения обобщенного закона Гука мы