Р. Форд

Автоморфные функции

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р. Форд

Р11 Автоморфные функции / Р. Форд – М.: Книга по Требованию, 2015. – 340 с.

ISBN 978-5-458-26184-5

В книге рассматриваются автоморфные функции, значения которых не изменяются, если их аргументы подвергаются некоторым дробно линейным преобразованиям.

ISBN 978-5-458-26184-5

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Глава IV

Автоморфные функции

Глава V

Тэта-ряд Пуанкаре

Глава VI

Элементарные группы

Глава VII

Эллиптические модулярные функции

Глава VIII

Конформное отображение

Глава I

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Линейное преобразование. Пусть z и z' два комплексных числа, связанных некоторой функциональной зависимостью: $z' = f(z)$. Условимся значения z изображать обычным способом на диаграмме Арганда, или плоскости z, и значения z' на другой диаграмме Арганда, или плоскости z'. Каждой точке z первой плоскости, в которой определена функция, соответствует в силу функциональной зависимости одно или несколько значений z'. Точкам, кривым и областям на плоскости z обычно соответствуют точки, кривые и области на плоскости z'. Мы будем говорить, что фигуры на плоскости z преобразуются через посредство функциональной зависимости в соответствующие фигуры на плоскости z'. Удобней изображать z и z' на одной и той же диаграмме Арганда, чем на двух различных. Таким образом фигуры на плоскости z переходят через посредство функциональной зависимости в другие фигуры иа той же плоскости z. В дальнейшем всегда, если не оговорено противоположное, используется одна плоскость.

Вся теория автоморфных функций связана со специальным типом преобразования, определяемым следующим образом:

Определение. *Преобразование*

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{1}$$

где a, b, c, d — постоянные и $ad - bc \neq 0$, называется линейным преобразованием [1]).

Настоящая глава посвящена изучению этого основного преобразования.

Величина $ad - bc$ называется *детерминантом* преобразования. Удобно всегда предполагать

$$ad - bc = 1. \tag{2}$$

В общем случае детерминант может быть сделан равным единице путем разделения числителя и знаменателя дроби

---

[1]) Оно более точно называется „дробно-линейным преобразованием", но мы будем пользоваться более коротким названием. Это преобразование называется также „гомографическим преобразованием".

Если $ad - bc = 0$, то уравнение приводится к $z' = \text{const.}$; но этот случай конечно, не представляет интереса.

на $\pm\sqrt{ad-bc}$. Правая часть (1) есть аналитическая функция z, и поэтому линейное преобразование обладает свойством конформности. Это значит, что при преобразовании фигуры углы сохраняют как величину, так и направление.

Заметим, что в уравнении (1) каждому значению z соответствует одно и только одно значение z'. Это утверждение будет справедливо во всех случаях, если мы введем в рассмотрение и бесконечно удаленную точку. Таким образом, если $c \neq 0$, то $z = -\frac{d}{c}$ преобразуется в $z' = \infty$ и $z = \infty$ в $z' = \frac{a}{c}$; если $c = 0$, то $z = \infty$ преобразуется в $z' = \infty$.

Разрешим уравнение (1) относительно z:

$$z = \frac{-dz' + b}{cz' - a}. \tag{3}$$

Это преобразование, которое, будучи выполнено вслед за преобразованием (1), возвращает каждую фигуру в ее первоначальное положение, называется *обратным* преобразованию (1).

Заметим, что (3) есть линейное преобразование; отсюда:

Теорема 1. *Преобразование, обратное линейному, есть линейное преобразование.*

Заметим, что (3) можно получить из (1), переменив местами a и d и изменив их знаки на обратные. Таким образом детерминант (3) будет тот же, что и (1).

Из (3) видно, что каждому значению z' соответствует одно и только одно значение z. Таким образом получаем следующий результат:

Теорема 2. *Линейное преобразование переводит плоскость одно-однозначно в самое себя.*

Линейное преобразование есть самое общее аналитическое преобразование, обладающее свойством, указанным в теореме 2.

Докажем сначала следующую теорему:

Теорема 3. *Если вся плоскость, за исключением (может быть) конечного числа точек, отображается одно-однозначно и конформно на плоскую область, то отображающая функция линейна.*

Пусть $z' = f(z)$ есть отображающая функция и пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — исключенные точки. Вследствие конформности отображения $f(z)$ аналитична всюду, кроме изолированных точек $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Точка q_i не может быть существенно особой, иначе существовали бы значения, принимаемые функцией бесконечно много раз в окрестности q_i, что противоречило бы условию. Поэтому $f(z)$ или остается конечной в окрестности q_i и, следовательно, аналитична в q_i, если ее там соответствующим образом определить, или имеет полюс. Таким образом $f(z)$ есть рациональная функция z.

Рациональная функция, не являющаяся константой, принимает каждое значение m раз, где m есть число ее полюсов. Так как $f(z)$ не принимает ни одного значения дважды, то она имеет один полюс первого порядка. Если полюс q_k не есть бесконечно удаленная точка, то мы можем написать

$$z' = \frac{A_1}{z - q_k} + A_0 = \frac{A_0 z + A_1 - A_0 q_k}{z - q_k}, \qquad A_1 \neq 0. \tag{4}$$

Если полюс есть бесконечно удаленная точка, то

$$z' = A_1 z + A_0, \qquad A_1 \neq 0. \tag{4'}$$

В обоих случаях функция линейна.

Следствие 1. *Наиболее общее одно-однозначное и конформное (там, где понятие конформности имеет смысл) преобразование плоскости в самое себя есть линейное преобразование.*

Мы не определили конформности для случая, когда одна из точек бесконечно удаленная. Всюду, за исключением $z = \infty$ и точки плоскости z, которая переходит в $z' = \infty$, преобразование должно быть конформным. Теорема 3 приложима.

Следствие 2. *Наиболее общее одно-однозначное и конформное преобразование конечной плоскости (без бесконечно удаленной точки) в самое себя есть линейное преобразование:*

$$z' = A_1 z + A_0.$$

Теперь мы рассмотрим результаты последовательного применения линейных преобразований. Пусть после применения к плоскости z преобразования (1) сделано второе линейное преобразование:

$$z'' = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}. \tag{5}$$

Представляя z'' как функцию z, получаем:

$$z'' = \frac{\alpha \dfrac{az + b}{cz + d} + \beta}{\gamma \dfrac{az + b}{cz + d} + \delta} = \frac{(\alpha a + \beta c) z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c) z + \gamma b + \delta d}. \tag{6}$$

Два последовательно выполненных преобразования (1) и (5) равносильны одному преобразованию (6). Но (6) есть линейное преобразование. Пользуясь полученным для него выражением, заключаем, что его детерминант равен

$$(ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Важно заметить, что если каждый из детерминантов (1) и (5) равен единице, то детерминант преобразования (6) тоже равен единице.

Выполняя линейное преобразование над z'', заключаем, сочетая это новое преобразование с (6), что три последовательных линейных преобразования равносильны одному линейному преобразованию и т. д.

Таким образом мы приходим к следующему результату:

Теорема 4. *Конечное число последовательно выполненных линейных преобразований равносильно одному линейному преобразованию.*

Следующая теорема выражает хорошо известное свойство линейного преобразования.

Теорема 5. *Линейное преобразование сохраняет инвариантным ангармоническое отношение четырех точек.*

Пусть даны четыре различных точки: z_1, z_2, z_3, z_4 и пусть z_1', z_2', z_3', z_4' — четыре точки, в которые переходят первые посредством преобразования (1). Допустим, что все точки расположены в конечной части плоскости.

Имеем:

$$z_1' - z_2' = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} =$$

$$= \frac{z_1 - z_2}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}; \tag{7}$$

поэтому

$$\frac{(z_1' - z_2')(z_3' - z_4')}{(z_1' - z_3')(z_2' - z_4')} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}. \tag{8}$$

Если одна из точек лежит в бесконечности, то мы получим необходимое изменение соотношения (8), пользуясь предельным переходом.

Так, если $z_2 = \infty$ и $z_1' = \infty$, то (8) принимает вид:

$$\frac{z_3' - z_4'}{z_2' - z_4'} = -\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_3}.$$

§ 2. Символическое обозначение. Для того чтобы достигнуть сокращения письма и удобства в комбинировании преобразований, мы будем пользоваться для обозначения правой части преобразования (1) знаком функциональной операции, употребляя в качестве знаков функциональных операций большие буквы; таким образом

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

так что (1) принимает вид:

$$z' = T(z).$$

Мы будем говорить в дальнейшем о преобразовании T, не упоминая, если только в связи с этим не возникнут недоразумения, об аргументе z. Если два преобразования одинаковы: $T_1(z) \equiv T(z)$, то мы будем это выражать посредством равенства: $T_1 = T$.

Обозначим буквой S преобразование (5), тогда

$$z'' = S(z').$$

Отсюда для (6) получим:

$$z'' = S[T(z)] = ST(z).$$

Таким образом результат двух последовательно выполненных преобразований записывается как произведение, причем опускаются внутренние скобки в обозначении функции. Важно заметить, что ST есть одно линейное преобразование, дающее тот же результат, как если бы сначала было выполнено преобразование T, а за ним преобразование S; порядок выполнения преобразований: справа налево.

Вообще говоря, TS и ST различны.

Непосредственно из значения символов следует, что для умножения имеет место ассоциативный закон:

$$U\,(ST) = (US)\,T,$$

и поэтому не может вызвать недоразумений запись UST. В произведении любая группа множителей может быть заменена одним линейным преобразованием. Преобразования, равносильные двукратно, трехкратно и т. д. выполненному преобразованию T, мы будем обозначать через T^2, T^3 и т. д. Таким образом T^2 означает $T\,[T\,(z)]$. Преобразование, обратное T, обозначим через T^{-1}. Таким образом из (3):

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}.$$

Результат n-кратного выполнения преобразования T^{-1} условимся обозначать через T^{-n}.

Обозначая тождественное преобразование $z' \equiv z$ через 1 так, что $1\,(z)$ означает z, мы убеждаемся, что положительные и отрицательные целые степени T вместе с 1 сочетаются в соответствии с законом о сложении показателей при умножении степеней.

Теперь мы можем написать преобразование, обратное результату нескольких последовательно выполненных преобразований. Для того чтобы найти преобразование, обратное к ST, применим к плоскости, преобразованной с помощью ST, сначала преобразование S^{-1}, а вслед за ним T^{-1}; мы получим:

$$(T^{-1}S^{-1})(ST) = T^{-1}(S^{-1}S)\,T = T^{-1}T = 1.$$

Таким образом $T^{-1}S^{-1}$ есть преобразование, которое, будучи применено после ST, возвращает каждую точку плоскости в ее исходное положение; следовательно, $T^{-1}S^{-1}$ есть преобразование, обратное по отношению к ST. Подобно этому для любого числа преобразований получаем:

$$(ST\ldots UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1}\ldots T^{-1}S^{-1}.$$

Легко видеть также, как нужно пользоваться множителями при делении. Пусть

$$UST = V,$$

тогда

$$(UST)\,T^{-1} = VT^{-1} \quad \text{или} \quad US = VT^{-1};$$

$$U^{-1}(UST) = U^{-1}V \quad \text{или} \quad ST = U^{-1}V.$$

Таким образом в уравнении, связывающем два произведения, первый (последний) множитель левой части может быть перенесен в начало (в конец) правой части с изменением на обратный знака показателя. Таким образом символическое деление допустимо, если точно соблюдается порядок выполнения операций. Например, W преобразование, обратное $ST \ldots UV$, есть такое преобразование, что

$$WST \ldots UV = 1.$$

Производя деление справа, получим уже известный нам результат.

§ 3. Неподвижные точки преобразования. Неподвижные точки преобразования (1) можно найти, полагая в (1) $z' = z$ и решая уравнение:

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ или } cz^2 + (d-a)\ z - b = 0. \tag{9}$$

Предположим сначала, что $c \neq 0$. Тогда уравнение (9) имеет два корня:

$$\xi_1, \xi_2 = \frac{a - d \pm \sqrt{M}}{2c}, \tag{10}$$

где

$$M = (d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4. \tag{11}$$

Второе выражение для M получаем, пользуясь равенством: $ad - bc = 1$.

Из (1) следует, что ∞ не переходит сама в себя, так что в этом случае имеется не более двух неподвижных точек. Если $M = 0$, т. е. если $a + d = \pm 2$, то существует только одна неподвижная точка:

$$\xi = \frac{a-d}{2c}. \tag{12}$$

Если $c = 0$, то обязательно $a \neq 0$, $d \neq 0$, так как иначе был бы равен нулю детерминант. Мы видим из (1), что в этом случае ∞ есть неподвижная точка. Если $a \neq d$, то, решая (9), определяем неподвижную точку, лежащую на конечном расстоянии. Неподвижные точки будут:

$$\xi_1 = \frac{b}{d-a}; \quad \xi_2 = \infty. \tag{13}$$

Если $c = 0$ и $d = a$, то (1) имеет вид:

$$z' = z + b$$

и представляет собой перенос с единственной неподвижной точкой $\xi = \infty$. Итак, в случае, когда $c = 0$, попрежнему существуют две неподвижных точки, если $M \neq 0$, и одна неподвижная точка, если $M = 0$.

Преобразование (1) не может иметь более двух неподвижных точек при условии, что (9) не есть тождественный нуль; если (9) есть тождественный нуль, то $c=0$, $d=a$ и $b=0$. Уравнение (1) в этом случае имеет вид:

$$z'=z.$$

Следовательно:

Теорема 6. *Единственное линейное преобразование, имеющее более двух неподвижных точек, есть тождественное преобразование* $z'=z$.

Пользуясь этим фактом, можно доказать следующее важное предложение:

Теорема 7. *Существует одно и только одно линейное преобразование, переводящее три различных точки z_1, z_2, z_3 в три различных точки z_1', z_2', z_3'.*

Во-первых, докажем, что такое преобразование единственно. Предположим, что существуют два различных преобразования T и S, переводящих z_1, z_2, z_3 в z_1', z_2'. z_3'. Рассмотрим преобразование $T^{-1}S$. Так как $S(z_1)=z_1'$ и $T^{-1}(z_1')=z$, то

$$T^{-1}S(z_1)=T^{-1}(z_1')=z_1.$$

Отсюда z_1 и точно так же z_2 и z_3 являются неподвижными точками преобразования $T^{-1}S$. Из теоремы (6) вытекает, что

$$T^{-1}S=1.$$

Выполняя преобразование T над обеими частями этого равенства, получим:

$$S=T.$$

Таким образом существует самое большее одно преобразование, удовлетворяющее условию теоремы. Мы докажем, что такое преобразование всегда существует, построив его.

Предположим, что все шесть величин конечны, и рассмотрим преобразование, определенное уравнением:

$$\frac{(z'-z_1')(z_2'-z_3')}{(z'-z_2')(z_1'-z_3')}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_2)(z_1-z_3)}. \tag{14}$$

Мы получим преобразование вида (1), выразив z' через z. Оно переводит z_1, z_2, z_3 в z_1', z_2', z_3', так как обе части (14) обращаются в нуль, когда $z=z_1$ и $z'=z_1'$; они обе обращаются в бесконечность, когда $z=z_2$ и $z'=z_2'$, и они обе равны единице, когда $z=z_3$ и $z'=z_3'$.

Если одна из заданных точек есть бесконечно удаленная, нам достаточно заменить ту часть соотношения (14), в которую входит бесконечность, предельным значением этой части, получающимся, если считать нашу точку подвижной и уходящей в бесконечность. Если $z_1=\infty$ или $z_2=\infty$, или $z_3=\infty$, то мы заменим правую часть (14) соответственно: $-\frac{z_2-z_3}{z-z_2}$, $-\frac{z-z_1}{z_1-z_3}$, $\frac{z-z_1}{z-z_2}$; аналогичные изменения обязательны в левой части, если одна из величин z_1', z_2', z_3' есть бесконечность.

Итак, всегда получаем одно преобразование, обладающее требуемым свойством, и теорема доказана.

Уравнением (14) удобно пользоваться для построения преобразования, переводящего три заданных точки в другие три заданных точки. Теоремой (7) мы будем часто пользоваться в нашем последующем изложении; для доказательства тождественности двух преобразований достаточно доказать, что они одинаково преобразуют три точки.

§ 4. Линейное преобразование и окружность. Так как мы оперируем комплексной величиной z, то представляется удобным выражать уравнения кривых через z. Если x действительная часть z и iy его мнимая часть, то, обозначив через $\bar{z}$ комплексное число, сопряженное z, получим:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \tag{15}$$

отсюда

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z), \quad z\bar{z} = x^2 + y^2. \tag{16}$$

С помощью первых двух уравнений (16) можно легко написать уравнение любой кривой, пользуясь непосредственно z и $\bar{z}$.

Напишем общее уравнение окружности и прямой линии. Уравнение

$$A(x^2 + y^2) + b_1 x + b_2 y + C = 0,$$

в котором коэфициенты суть действительные числа, есть общее уравнение окружности в случае $A \neq 0$ (радиус которой может быть мнимым или равным нулю) и есть уравнение прямой в случае $A = 0$, если только b_1 и b_2 не равны одновременно нулю.

Пользуясь (16), получаем:

$$Az\bar{z} + \frac{1}{2}(b_1 - ib_2)z + \frac{1}{2}(b_1 + ib_2)\bar{z} + C = 0.$$

Полагая

$$B = \frac{1}{2}(b_1 - ib_2),$$

получаем:

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \tag{17}$$

где A и C — действительные числа.

Если $A \neq 0$, то уравнение (17) есть общее уравнение окружности; в случае, если $A = 0$, но $B \neq 0$, — уравнение прямой.

Нетрудно определить центр и радиус окружности. Представляя (17) в виде

$$\left(z + \frac{\bar{B}}{A}\right)\left(\bar{z} + \frac{B}{A}\right) = \frac{B\bar{B} - AC}{A^2},$$