

Р. Форд

Автоморфные функции

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
P11

P11 **Р. Форд**
Автоморфные функции / Р. Форд – М.: Книга по Требованию, 2015. – 340 с.

ISBN 978-5-458-26184-5

В книге рассматриваются автоморфные функции, значения которых не изменяются, если их аргументы подвергаются некоторым дробно линейным преобразованиям.

ISBN 978-5-458-26184-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2015

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2015

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Глава IV		
Автоморфные функции		<i>Стр.</i>
39.	Понятие автоморфной функции	92
40.	Простые автоморфные функции	95
41.	Поведение в вершинах и в параболических точках	97
42.	Полюсы и нули	100
43.	Алгебраические соотношения	104
44.	Дифференциальные уравнения	107
Глава V		
Тэта-ряд Пуанкаре		
45.	Тэта-ряд	111
46.	Сходимость ряда	113
47.	Сходимость тэта-ряда для фуксовой группы второго рода	115
48.	Некоторые свойства тэта-функции	117
49.	Нули и полюсы тэта-функций	121
50.	Ряды и произведения, связанные с группой	125
Глава VI		
Элементарные группы		
I.	Конечные группы	127
51.	Инверсия относительно сферы	127
52.	Стереографическая проекция	130
53.	Вращение сферы	131
54.	Группы правильных многогранников	133
55.	Исследование куба	134
56.	Правильный многогранник. Общий случай	137
57.	Определение всех конечных групп	140
58.	Расширенные группы	146
II.	Группы с единственной предельной точкой	149
59.	Одно- и двоякопериодические группы	149
60.	Группы, связанные с периодическими группами	151
61.	Автоморфные функции	155
III.	Группы с двумя предельными точками	158
62.	Определенные группы	158
Глава VII		
Эллиптические модулярные функции		
63.	Некоторые результаты из теории эллиптических функций	160
64.	Замена примитивных периодов	162
65.	Функция $J(\tau)$	163
66.	Поведение $J(\tau)$ в параболических точках	165
67.	Другие свойства функции $J(\tau)$	167
68.	Функция $\lambda(\tau)$	169
69.	Соотношение между функциями $\lambda(\tau)$ и $J(\tau)$	171
70.	Дальнейшие свойства $\lambda(\tau)$	172
Глава VIII		
Конформное отображение		
71.	Конформное отображение	176
72.	Лемма Шварца	177
73.	Теоремы площадей	179
74.	Об отображении круга на конечную однолиственную область	182
75.	Теорема искажения для круга	185
76.	Общая теорема искажения	189
77.	Об одном приложении интеграла Пуассона	191

	Стр.
§ 78. Об отображении однолистной односвязной области на круг. Процесс итерации	194
79. Доказательство сходимости	197
80. Поведение отображающей функции на границе области	202
81. Области, ограниченные жордановыми кривыми	214
82. Аналитические дуги и продолжение отображающей функции через границу области	217
83. Границы, содержащие дуги окружности	218
84. Отображение комбинированных областей	219
85. Отображение прэдельной области	221
86. Отображение односвязной области с конечным числом листов	229
87. Конформное отображение и группы линейных преобразований	233

Глава IX

Униформизация. Элементарные и фуксовы функции

88. Идея униформизации	236
89. О связности областей	237
90. Алгебраические функции нулевого жанра. Униформизация посред- ством рациональных функций	246
§ 91. Алгебраические функции жанра, большего, чем нуль. Униформиза- ция посредством автоморфных функций	249
92. Жанр фундаментальной области группы	255
93. Случай, когда $p=1$ и когда $p>1$	256
94. Униформизирующие фуксовы функции более общего вида	258
95. Униформизация в случае $p=0$	261
96. Группы Уайттекера	264
97. Трансцендентные функции	266

Глава X

Униформизация. Группы типа Шоттки

98. Области плоского характера	273
99. Некоторые вспомогательные функции	275
100. Отображение многосвязной области плоского характера на область с разрезами	279
101. Приложение к униформизации алгебраических функций	284
102. Теорема сходимости	285
103. Последовательность отображающих функций	289
104. Линейность преобразования T_n	292
105. Обобщение	296
106. Отображение многосвязной области плоского характера на область, ограниченную полными окружностями	298

Глава XI

Дифференциальные уравнения

107. Связь с группами линейных преобразований	303
108. Функция, обратная частному двух интегралов	306
109. Правильные особые точки дифференциального уравнения	312
110. Поведение частного двух интегралов в окрестности правильной особой точки	316
111. Уравнения с рациональными коэффициентами	319
112. Уравнение с двумя особыми точками	323
113. Гипергеометрическое уравнение	323
114. Функции Римана-Шварца	326
115. Уравнения с алгебраическими коэффициентами	329
Библиография по автоморфным функциям	331

Глава I

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. **Линейное преобразование.** Пусть z и z' два комплексных числа, связанных некоторой функциональной зависимостью: $z' = f(z)$. Условимся значения z изображать обычным способом на диаграмме Арганда, или плоскости z , и значения z' на другой диаграмме Арганда, или плоскости z' . Каждой точке z первой плоскости, в которой определена функция, соответствует в силу функциональной зависимости одно или несколько значений z' . Точкам, кривым и областям на плоскости z обычно соответствуют точки, кривые и области на плоскости z' . Мы будем говорить, что фигуры на плоскости z преобразуются через посредство функциональной зависимости в соответствующие фигуры на плоскости z' . Удобней изображать z и z' на одной и той же диаграмме Арганда, чем на двух различных. Таким образом фигуры на плоскости z переходят через посредство функциональной зависимости в другие фигуры на той же плоскости z . В дальнейшем всегда, если не оговорено противоположное, используется одна плоскость.

Вся теория автоморфных функций связана со специальным типом преобразования, определяемым следующим образом:

О п р е д е л е н и е. *Преобразование*

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

где a, b, c, d — постоянные и $ad - bc \neq 0$, называется *линейным преобразованием*¹⁾.

Настоящая глава посвящена изучению этого основного преобразования.

Величина $ad - bc$ называется *детерминантом* преобразования. Удобно всегда предполагать

$$ad - bc = 1. \quad (2)$$

В общем случае детерминант может быть сделан равным единице путем деления числителя и знаменателя дроби

¹⁾ Оно более точно называется „дробно-линейным преобразованием“, но мы будем пользоваться более коротким названием. Это преобразование называется также „гомографическим преобразованием“.

Если $ad - bc = 0$, то уравнение приводится к $z' = \text{const.}$; но этот случай конечно, не представляет интереса.

на $\pm \sqrt{ad - bc}$. Правая часть (1) есть аналитическая функция z , и поэтому линейное преобразование обладает свойством конформности. Это значит, что при преобразовании фигуры углы сохраняют как величину, так и направление.

Заметим, что в уравнении (1) каждому значению z соответствует одно и только одно значение z' . Это утверждение будет справедливо во всех случаях, если мы введем в рассмотрение и бесконечно удаленную точку. Таким образом, если $c \neq 0$, то $z = -\frac{d}{c}$ преобразуется в $z' = \infty$ и $z = \infty$ в $z' = \frac{a}{c}$; если $c = 0$, то $z = \infty$ преобразуется в $z' = \infty$.

Разрешим уравнение (1) относительно z :

$$z = \frac{-dz' + b}{cz' - a}. \quad (3)$$

Это преобразование, которое, будучи выполнено вслед за преобразованием (1), возвращает каждую фигуру в ее первоначальное положение, называется *обратным* преобразованию (1).

Заметим, что (3) есть линейное преобразование; отсюда:

ТЕОРЕМА 1. *Преобразование, обратное линейному, есть линейное преобразование.*

Заметим, что (3) можно получить из (1), переменив местами a и d и изменив их знаки на обратные. Таким образом детерминант (3) будет тот же, что и (1).

Из (3) видно, что каждому значению z' соответствует одно и только одно значение z . Таким образом получаем следующий результат:

ТЕОРЕМА 2. *Линейное преобразование переводит плоскость одно-однозначно в самое себя.*

Линейное преобразование есть самое общее аналитическое преобразование, обладающее свойством, указанным в теореме 2.

Докажем сначала следующую теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Если вся плоскость, за исключением (может быть) конечного числа точек, отображается одно-однозначно и конформно на плоскую область, то отображающая функция линейна.*

Пусть $z' = f(z)$ есть отображающая функция и пусть q_1, q_2, \dots, q_n — исключенные точки. Вследствие конформности отображения $f(z)$ аналитична всюду, кроме изолированных точек q_1, q_2, \dots, q_n . Точка q_i не может быть существенно особой, иначе существовали бы значения, принимаемые функцией бесконечно много раз в окрестности q_i , что противоречило бы условию. Поэтому $f(z)$ или остается конечной в окрестности q_i и, следовательно, аналитична в q_i , если ее там соответствующим образом определить, или имеет полюс. Таким образом $f(z)$ есть рациональная функция z .

Рациональная функция, не являющаяся константой, принимает каждое значение m раз, где m есть число ее полюсов. Так как $f(z)$ не принимает ни одного значения дважды, то она имеет один

полюс первого порядка. Если полюс q_k не есть бесконечно удаленная точка, то мы можем написать

$$z' = \frac{A_1}{z - q_k} + A_0 = \frac{A_0 z + A_1 - A_0 q_k}{z - q_k}, \quad A_1 \neq 0. \quad (4)$$

Если полюс есть бесконечно удаленная точка, то

$$z' = A_1 z + A_0, \quad A_1 \neq 0. \quad (4')$$

В обоих случаях функция линейна.

Следствие 1. *Наиболее общее одно-однозначное и конформное (там, где понятие конформности имеет смысл) преобразование плоскости в самое себя есть линейное преобразование.*

Мы не определили конформности для случая, когда одна из точек бесконечно удаленная. Всюду, за исключением $z = \infty$ и точки плоскости z , которая переходит в $z' = \infty$, преобразование должно быть конформным. Теорема 3 приложима.

Следствие 2. *Наиболее общее одно-однозначное и конформное преобразование конечной плоскости (без бесконечно удаленной точки) в самое себя есть линейное преобразование:*

$$z' = A_1 z + A_0.$$

Теперь мы рассмотрим результаты последовательного применения линейных преобразований. Пусть после применения к плоскости z преобразования (1) сделано второе линейное преобразование:

$$z'' = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}. \quad (5)$$

Представляя z'' как функцию z , получаем:

$$z'' = \frac{\alpha \frac{az + b}{cz + d} + \beta}{\gamma \frac{az + b}{cz + d} + \delta} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d}. \quad (6)$$

Два последовательно выполненных преобразования (1) и (5) равносильны одному преобразованию (6). Но (6) есть линейное преобразование. Пользуясь полученным для него выражением, заключаем, что его детерминант равен

$$(ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Важно заметить, что если каждый из детерминантов (1) и (5) равен единице, то детерминант преобразования (6) тоже равен единице.

Выполняя линейное преобразование над z'' , заключаем, сочетая это новое преобразование с (6), что три последовательных линейных преобразования равносильны одному линейному преобразованию и т. д.

Таким образом мы приходим к следующему результату:

ТЕОРЕМА 4. Конечное число последовательно выполненных линейных преобразований равносильно одному линейному преобразованию.

Следующая теорема выражает хорошо известное свойство линейного преобразования.

ТЕОРЕМА 5. Линейное преобразование сохраняет инвариантным ангармоническое отношение четырех точек.

Пусть даны четыре различных точки: z_1, z_2, z_3, z_4 и пусть z_1', z_2', z_3', z_4' — четыре точки, в которые переходят первые посредством преобразования (1). Допустим, что все точки расположены в конечной части плоскости.

Имеем:

$$\begin{aligned} z_1' - z_2' &= \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} = \\ &= \frac{z_1 - z_2}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}; \end{aligned} \quad (7)$$

поэтому

$$\frac{(z_1' - z_2')(z_3' - z_4')}{(z_1' - z_3')(z_2' - z_4')} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}. \quad (8)$$

Если одна из точек лежит в бесконечности, то мы получим необходимое изменение соотношения (8), пользуясь предельным переходом.

Так, если $z_2 = \infty$ и $z_1' = \infty$, то (8) принимает вид:

$$\frac{z_3' - z_4'}{z_2' - z_4'} = \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_3}.$$

§ 2. Символическое обозначение. Для того чтобы достигнуть сокращения письма и удобства в комбинировании преобразований, мы будем пользоваться для обозначения правой части преобразования (1) знаком функциональной операции, употребляя в качестве знаков функциональных операций большие буквы; таким образом

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

так что (1) принимает вид:

$$z' = T(z).$$

Мы будем говорить в дальнейшем о преобразовании T , не упомывая, если только в связи с этим не возникнут недоразумения, об аргументе z . Если два преобразования одинаковы: $T_1(z) \equiv T(z)$, то мы будем это выражать посредством равенства: $T_1 = T$.

Обозначим буквой S преобразование (5), тогда

$$z'' = S(z').$$

Отсюда для (6) получим:

$$z'' = S[T(z)] = ST(z).$$

Таким образом результат двух последовательно выполненных преобразований записывается как произведение, причем опускаются внутренние скобки в обозначении функции. Важно заметить, что ST есть одно линейное преобразование, дающее тот же результат, как если бы сначала было выполнено преобразование T , а за ним преобразование S ; порядок выполнения преобразований: справа налево.

Вообще говоря, TS и ST различны.

Непосредственно из значения символов следует, что для умножения имеет место ассоциативный закон:

$$U(ST) = (US)T,$$

и поэтому не может вызвать недоразумений запись UST . В произведении любая группа множителей может быть заменена одним линейным преобразованием. Преобразования, равносильные двукратно, трехкратно и т. д. выполненному преобразованию T , мы будем обозначать через T^2, T^3 и т. д. Таким образом T^2 означает $T[T(z)]$. Преобразование, обратное T , обозначим через T^{-1} . Таким образом из (3):

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}.$$

Результат n -кратного выполнения преобразования T^{-1} условимся обозначать через T^{-n} .

Обозначая тождественное преобразование $z' \equiv z$ через 1 так, что $1(z)$ означает z , мы убеждаемся, что положительные и отрицательные целые степени T вместе с 1 сочетаются в соответствии с законом о сложении показателей при умножении степеней.

Теперь мы можем написать преобразование, обратное результату нескольких последовательно выполненных преобразований. Для того чтобы найти преобразование, обратное к ST , применим к плоскости, преобразованной с помощью ST , сначала преобразование S^{-1} , а вслед за ним T^{-1} ; мы получим:

$$(T^{-1}S^{-1})(ST) = T^{-1}(S^{-1}S)T = T^{-1}T = 1.$$

Таким образом $T^{-1}S^{-1}$ есть преобразование, которое, будучи применено после ST , возвращает каждую точку плоскости в ее исходное положение; следовательно, $T^{-1}S^{-1}$ есть преобразование, обратное по отношению к ST . Подобно этому для любого числа преобразований получаем:

$$(ST \dots UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1} \dots T^{-1}S^{-1}.$$

Легко видеть также, как нужно пользоваться множителями при делении. Пусть

$$UST = V,$$

тогда

$$(UST)T^{-1} = VT^{-1} \quad \text{или} \quad US = VT^{-1};$$

$$U^{-1}(UST) = U^{-1}V \quad \text{или} \quad ST = U^{-1}V.$$

Таким образом в уравнении, связывающем два произведения, первый (последний) множитель левой части может быть перенесен в начало (в конец) правой части с изменением на обратный знак показателя. Таким образом символическое деление допустимо, если точно соблюдается порядок выполнения операций. Например, W преобразование, обратное $ST \dots UV$, есть такое преобразование, что

$$WST \dots UV = 1.$$

Производя деление справа, получим уже известный нам результат.

§ 3. Неподвижные точки преобразования. Неподвижные точки преобразования (1) можно найти, полагая в (1) $z' = z$ и решая уравнение:

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \text{ или } cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (9)$$

Предположим сначала, что $c \neq 0$. Тогда уравнение (9) имеет два корня:

$$\xi_1, \xi_2 = \frac{a - d \pm \sqrt{M}}{2c}, \quad (10)$$

где

$$M = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4. \quad (11)$$

Второе выражение для M получаем, пользуясь равенством: $ad - bc = 1$.

Из (1) следует, что ∞ не переходит сама в себя, так что в этом случае имеется не более двух неподвижных точек. Если $M = 0$, т. е. если $a + d = \pm 2$, то существует только одна неподвижная точка:

$$\xi = \frac{a - d}{2c}. \quad (12)$$

Если $c = 0$, то обязательно $a \neq 0$, $d \neq 0$, так как иначе был бы равен нулю детерминант. Мы видим из (1), что в этом случае ∞ есть неподвижная точка. Если $a \neq d$, то, решая (9), определяем неподвижную точку, лежащую на конечном расстоянии. Неподвижные точки будут:

$$\xi_1 = \frac{b}{d - a}; \quad \xi_2 = \infty. \quad (13)$$

Если $c = 0$ и $d = a$, то (1) имеет вид:

$$z' = z + b$$

и представляет собой перенос с единственной неподвижной точкой $\xi = \infty$. Итак, в случае, когда $c = 0$, попрежнему существуют две неподвижных точки, если $M \neq 0$, и одна неподвижная точка, если $M = 0$.

Преобразование (1) не может иметь более двух неподвижных точек при условии, что (9) не есть тождественный нуль; если (9)

есть тождественный нуль, то $c = 0$, $d = a$ и $b = 0$. Уравнение (1) в этом случае имеет вид:

$$z' = z.$$

Следовательно:

ТЕОРЕМА 6. Единственное линейное преобразование, имеющее более двух неподвижных точек, есть тождественное преобразование $z' = z$.

Пользуясь этим фактом, можно доказать следующее важное предложение:

ТЕОРЕМА 7. Существует одно и только одно линейное преобразование, переводящее три различных точки z_1, z_2, z_3 в три различных точки z_1', z_2', z_3' .

Во-первых, докажем, что такое преобразование единственно. Предположим, что существуют два различных преобразования T и S , переводящих z_1, z_2, z_3 в z_1', z_2', z_3' . Рассмотрим преобразование $T^{-1}S$. Так как $S(z_1) = z_1'$ и $T^{-1}(z_1') = z_1$, то

$$T^{-1}S(z_1) = T^{-1}(z_1') = z_1.$$

Отсюда z_1 и точно так же z_2 и z_3 являются неподвижными точками преобразования $T^{-1}S$. Из теоремы (6) вытекает, что

$$T^{-1}S = 1.$$

Выполняя преобразование T над обеими частями этого равенства, получим:

$$S = T.$$

Таким образом существует самое большее одно преобразование, удовлетворяющее условию теоремы. Мы докажем, что такое преобразование всегда существует, построив его.

Предположим, что все шесть величин конечны, и рассмотрим преобразование, определенное уравнением:

$$\frac{(z' - z_1')(z_2' - z_3')}{(z' - z_2')(z_1' - z_3')} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(z_1 - z_3)}. \quad (14)$$

Мы получим преобразование вида (1), выразив z' через z . Оно переводит z_1, z_2, z_3 в z_1', z_2', z_3' , так как обе части (14) обращаются в нуль, когда $z = z_1$ и $z' = z_1'$; они обе обращаются в бесконечность, когда $z = z_2$ и $z' = z_2'$, и они обе равны единице, когда $z = z_3$ и $z' = z_3'$.

Если одна из заданных точек есть бесконечно удаленная, нам достаточно заменить ту часть соотношения (14), в которую входит бесконечность, пределным значением этой части, получающимся, если считать нашу точку подвижной и уходящей в бесконечность. Если $z_1 = \infty$ или $z_2 = \infty$, или $z_3 = \infty$, то мы заменим правую часть (14) соответственно: $-\frac{z_2 - z_3}{z - z_2}$, $-\frac{z - z_1}{z_1 - z_3}$, $\frac{z - z_1}{z - z_2}$; аналогичные изменения обязательны в левой части, если одна из величин z_1', z_2', z_3' есть бесконечность.

Итак, всегда получаем одно преобразование, обладающее требуемым свойством, и теорема доказана.

Уравнением (14) удобно пользоваться для построения преобразования, переводящего три заданных точки в другие три заданных точки. Теоремой (7) мы будем часто пользоваться в нашем последующем изложении; для доказательства тождественности двух преобразований достаточно доказать, что они одинаково преобразуют три точки.

§ 4. Линейное преобразование и окружность. Так как мы оперируем комплексной величиной z , то представляется удобным выражать уравнения кривых через z . Если x действительная часть z и iy его мнимая часть, то, обозначив через \bar{z} комплексное число, сопряженное z , получим:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad (15)$$

отсюда

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z), \quad z\bar{z} = x^2 + y^2. \quad (16)$$

С помощью первых двух уравнений (16) можно легко написать уравнение любой кривой, пользуясь непосредственно z и \bar{z} .

Напишем общее уравнение окружности и прямой линии. Уравнение

$$A(x^2 + y^2) + b_1x + b_2y + C = 0,$$

в котором коэффициенты суть действительные числа, есть общее уравнение окружности в случае $A \neq 0$ (радиус которой может быть мнимым или равным нулю) и есть уравнение прямой в случае $A = 0$, если только b_1 и b_2 не равны одновременно нулю.

Пользуясь (16), получаем:

$$Az\bar{z} + \frac{1}{2}(b_1 - ib_2)z + \frac{1}{2}(b_1 + ib_2)\bar{z} + C = 0.$$

Полагая

$$B = \frac{1}{2}(b_1 - ib_2),$$

получаем:

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (17)$$

где A и C — действительные числа.

Если $A \neq 0$, то уравнение (17) есть общее уравнение окружности; в случае, если $A = 0$, но $B \neq 0$, — уравнение прямой.

Нетрудно определить центр и радиус окружности. Представляя (17) в виде

$$\left(z + \frac{\bar{B}}{A}\right) \left(\bar{z} + \frac{B}{A}\right) = \frac{B\bar{B} - AC}{A^2},$$