К. Берж

Теория графов и ее применения

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
К11

К. Берж
К11 Теория графов и ее применения / К. Берж – М.: Книга по Требованию, 2021. – 318 с.

ISBN 978-5-458-30039-1

Книга К. Бержа — первая книга по теории графов на русском языке. Между тем в последние годы интерес к этой теории резко усилился как со стороны математиков, так и представителей самых различных прикладных дисциплин.Перевод с французского А. А. Зыкова. Под редакцией И. А. Вайнштейна.

ISBN 978-5-458-30039-1

ГЛАВА 1

Основные определения[1])

Множества и многозначные отображения

В теории графов, как и во всех современных математических теориях, пользуются стенографическими символами, дающими значительную экономию мышления и делающими орудие исследования более гибким и эффективным. Хотя классические символы теории множеств, без сомнения, известны читателю, мы все же считаем целесообразным их напомнить.

Множество — это собрание объектов любой природы, называемых его *точками* (или его *элементами*). Рассуждения, которые нам предстоит проводить, не зависят от природы этих объектов: последние могут быть людьми, городами, числами, функциями и т. д. Удобно обозначать множества большими латинскими буквами A, B, X, ..., а элементы множества — малыми латинскими буквами a, b, x, ... Множество A, элементами которого являются a, b, c, d, обозначают символом $A = \{a, b, c, d\}$.

Целесообразно рассматривать также *пустое множество*, совсем не содержащее элементов; его мы будем обозначать символом $\varnothing$. Иногда множество A определяется не перечислением его элементов, а указанием характеризующего их свойства; например, множество простых чисел можно записать так: $A = \{x/x$ простое$\}$.

Если свойство (1) влечет за собой свойство (2), то мы пишем $(1) \Longrightarrow (2)$; когда эти два свойства равносильны, пишем $(1) \Longleftrightarrow (2)$.

Пусть A и B — два данных множества; будем пользоваться следующими обозначениями:

$a \in A$: a есть элемент множества A.

$a \notin A$: a не является элементом множества A.

$A \subset B$: A *содержится* в B, или A есть *подмножество* множества B (все элементы множества A являются элементами множества B).

$A = B$: A *совпадает* с B ($A \subset B$ и $B \subset A$).

$A \neq B$: A не совпадает с B.

[1]) Эта глава — не более чем перечень самых основных терминов, которыми мы будем пользоваться; так сказать, правила игры... . Бóльшую часть этих терминов можно понимать интуитивно, но во избежание недоразумений следует дать им аксиоматическое определение.

$A \subset\subset B$: *A строго содержится* в B ($A \subset B$ и $A \neq B$).

$A \cap B$: *пересечение* A и B (множество элементов, принадлежащих как A, так и B).

$A \cup B$: *объединение* A и B (множество элементов, принадлежащих или A, или B, или обоим этим множествам).

$A \setminus B$: множество элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B (см. рис. 1—1).

$A \times B$: *декартово произведение* A и B [множество пар (a, b), образованных двумя объектами $a \in A$ и $b \in B$] (см. рис. 1—2).

Объединение, пересечение и декартово произведение можно определить не только для двух множеств A и B, но и для семейства множеств $(A_1, A_2, \ldots)$.

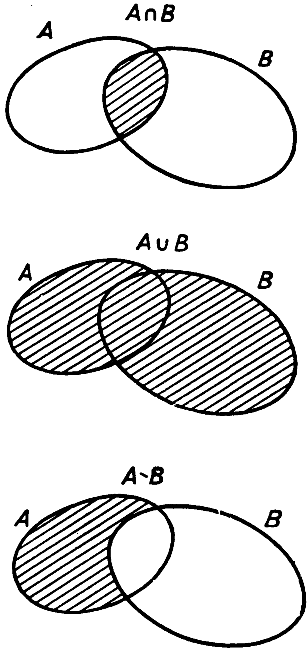

Рис. 1—1.

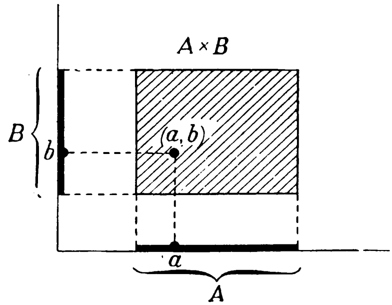

Рис. 1—2.

Объединение множеств A_i — это множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному A_i; оно обозначается символом

$$\bigcup_i A_i.$$

Пересечение множеств A_i — это множество элементов, принадлежащих всем A_i сразу; оно обозначается символом

$$\bigcap_i A_i.$$

Декартово произведение множеств A_i есть множество последовательностей $(a_i / i = 1, 2, \ldots)$, где $a_i \in A_i$ для каждого i; оно обозначается символом

$$\prod_i A_i.$$

Последовательность из n элементов называется *n-строчкой*; ее нельзя смешивать с множеством n элементов (где порядок расположения элементов не играет роли).

Пример. *Вещественное трехмерное пространство* представляет собой множество 3-строчек, или просто троек (a_1, a_2, a_3), где a_1, a_2, a_3 — вещественные числа; это декартово произведение трех множеств, каждое из которых совпадает с множеством $\mathbf{R}$ вещественных чисел; по этой причине трехмерное вещественное пространство обозначают символом

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Вещественное n-мерное пространство обозначается символом $\mathbf{R}^n$.

Другим важным понятием, которым мы будем часто пользоваться, является понятие разбиения. *Разбиением* данного множества X называется такое семейство множеств $\{A_i/i \in I\}$, где I — некоторое множество индексов и $A_i \subset X$ при всех $i \in I$, что

(1) $A_i \neq \varnothing$ $(i \in I)$;

(2) $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;

(3) $\bigcup\limits_i A_i = X$.

При заданном разбиении $\{A_i\}$ мы пишем $x \equiv y$, когда x и y являются элементами одного и того же множества A_i. Тем самым определено отношение, которое обозначается символом $\equiv$ и обладает следующими свойствами:

(1) рефлексивность: $x \equiv x$;

(2) симметрия: $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$;

(3) транзитивность: $x \equiv y,\ y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$.

Всякое отношение $\equiv$ со свойствами (1), (2), (3) называется *эквивалентностью*.

В свою очередь, эквивалентность $\equiv$ определяет, очевидно, разбиение множества X на множества вида

$$A_i = \{x/x \in X,\ x \equiv x_0\}$$

(где x_0 — данная точка X).

Множество A_i иногда называют *классом эквивалентности* содержащим x_0.

Пример 1. Пусть p — целое число; пишем

$$x \equiv y \pmod p,$$

если x и y — два целых числа, отличающихся слагаемым, кратным p. Ясно, что это отношение — эквивалентность.

Пример 2. Если две прямые D и D' параллельны или совпадают, то пишем $D \| D'$; очевидно, $\|$ есть отношение эквивалентности.

Пример 3. Если у двух людей x и y глаза одинакового цвета, то пишем $x \equiv y$; ясно, что $\equiv$ есть отношение эквивалентности.

Пусть X и Y — два данных множества; закон σ, согласно которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие элемент $\sigma x \in Y$, называется *однозначным отображением X в Y, или функцией, определенной на X и принимающей значения в Y*; например, числовая функция вещественной переменной представляет собой однозначное отображение $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$. *Многозначное отображение* Γ *множества X в множество Y* есть закон, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие некоторое подмножество $\Gamma x \subset Y$; при этом не исключается возможность $\Gamma x = \varnothing$.

Говоря просто „отображение“, большинство авторов подразумевает однозначное отображение. Поскольку нам предстоит иметь дело главным образом с неоднозначными отображениями, мы не придерживаемся упомянутого соглашения и понимаем слово „отображение“ в широком смысле.

Пусть Γ — отображение данного множества X в Y. При $A \subset X$ назовем *образом* множества A множество

$$\Gamma A = \bigcup_{x \in A} \Gamma x.$$

Можно проверить, что если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества X, то

$$\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma A_i,$$

$$\Gamma\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma A_i.$$

Если Γ и Δ — отображения множества X в X, то *результат композиции* $\Gamma\Delta$ есть отображение, определяемое следующим образом:

$$(\Gamma\Delta)\, x = \Gamma(\Delta x).$$

Отображения $\Gamma^2, \Gamma^3, \ldots$ определяются так:

$$\Gamma^2 x = \Gamma(\Gamma x),$$
$$\Gamma^3 x = \Gamma(\Gamma^2 x),$$
$$\cdots\cdots$$

Транзитивным замыканием отображения Γ называется следующее отображение $\hat{\Gamma}$ множества X в X:

$$\hat{\Gamma} x = \{x\} \cup \Gamma x \cup \Gamma^2 x \cup \Gamma^3 x \cup \ldots .$$

Отображение Γ^{-1}, *обратное* отображению Γ, определяется так:

$$\Gamma^{-1} y = \{x / y \in \Gamma x\}.$$

Если B — подмножество множества X, то полагаем

$$\Gamma^{-1}B = \{x/\Gamma x \cap B \neq \varnothing\}.$$

Пример 1. Возьмем в качестве X множество людей и для $x \in X$ обозначим через Γx множество детей человека x. Тогда:

$\Gamma^2 x$: множество внуков x;

$\hat{\Gamma} x$: множество, состоящее из x и всех его потомков;

$\Gamma^{-1} x$: родители x, и т. д.

Изображая людей точками и рисуя стрелку, идущую из x в y, в случае когда x является отцом или матерью y, мы получим *родословное*, или *генеалогическое дерево*.

Пример 2. Рассмотрим шахматную игру; каждое положение задается диаграммой (местонахождением фигур в данный момент) и ходом (указанием, кто из игроков должен в этот момент играть). Пусть X — множество всевозможных положений, Γx (где $x \in X$) — множество положений, которые по правилам игры можно получить непосредственно из x; если положение x — матовое или патовое, то $\Gamma x = \varnothing$.

Имеем:

$\Gamma^3 x$ — множество положений, которые можно получить из x тремя ходами;

$\hat{\Gamma} x$ — множество положений, которые вообще можно рано или поздно получить, отправляясь от x;

$\Gamma^{-1} A$ (где $A \subset X$) — множество тех положений, из которых возможно одним ходом получить какое-либо положение, входящее в A.

Такая система обозначений позволяет выразить формулой множество выигрышных положений и вывести отсюда некоторые свойства [1]).

В случае шахмат правила игры полностью определяются множеством X и отображением Γ; однако здесь мы имеем дело с таким большим числом положений, что изобразить все их точками, а отображение Γ — стрелками, соединяющими некоторые точки, практически невозможно. Тем не менее некоторые свойства, общие для правил шахматной игры и для отношений родства в группе людей, можно выявить, обращаясь к аксиоматическому методу; этим мы займемся в следующих параграфах.

Граф. Пути и контуры

Говорят, что дан *граф*, если даны:

1° непустое множество X;

2° отображение Γ множества X в X.

[1]) См. Берж [2].

Собственно говоря, *граф*, обозначаемый символом $G=(X, \Gamma)$, есть пара, которая состоит из множества X и отображения Γ. Отношения отцовства и материнства в множестве людей определяют граф; то же имеет место для правил шахматной игры, для соединений между собой электрических приборов, для отношения превосходства одних участников турнира над другими и т. д.

Всякий раз, когда это возможно, будем элементы множества X изображать точками плоскости, а пары точек x и y, для которых $y \in \Gamma x$, соединять непрерывной линией со стрелкой, направленной от x к y. Это дает основание называть каждый элемент множества X *точкой*, или *вершиной* графа, а пару элементов (x, y), в которой $y \in \Gamma x$, — *дугой* графа. Далее множество дуг графа будет обозначаться через U, а сами дуги — буквами u, v или w (в случае надобности — с индексами).

Пример. У графа G, изображенного на рис. 1—3, множество X образовано вершинами a, b, c, d, e, x, множество U — дугами (a, b), (b, a), (b, x), (x, x), (x, c), (c, x), (x, d), (e, e). Отображение Γ определить нетрудно: например,

$$\Gamma x=\{x, c, d\},$$
$$\Gamma d=\varnothing \quad \text{и т. д.}$$

Ясно, что множество дуг вполне определяет отображение графа, и, наоборот, отображение Γ определяет множество U; поэтому граф можно с одинаковым правом записывать как в виде $G=(X, \Gamma)$, так и в виде $G=(X, U)$.

Подграфом графа (X, Γ) называется граф вида (A, Γ_A), где $A \subset X$, а отображение Γ_A определено следующим образом:

$$\Gamma_A x=\Gamma x \cap A.$$

Частичным графом для (X, Γ) называется граф вида (X, Δ), где $\Delta x \subset \Gamma x$ при всех $x \in X$.

Частичным подграфом графа (X, Γ) называется граф вида (A, Δ_A), где $A \subset X$ и $\Delta_A x \subset \Gamma x \cap A$.

Пример. Рассмотрим граф (X, U), представляющий карту дорог Франции: X — множество городов Франции, и $(x, y) \in U$, если имеется дорога, главная или второстепенная, ведущая из города x в город y; карта главных дорог определяет частичный граф, а карта всех дорог Нормандии — подграф.

Говорят, что a и b являются *граничными* вершинами дуги $u=(a, b)$, причем a — *начало*, а b — *конец* дуги. Две дуги u и v называются *смежными*, если

1° они различны;

2° они имеют общую граничную точку (независимо от того, является ли эта точка началом или концом дуги u, началом или концом дуги v).

Далее, говорят, что две вершины x и y *смежны*, если

1° они различны;

2° существует дуга, идущая от одной из них к другой.

Наконец, говорят, что дуга u *исходит* из вершины x, если x является началом, но не является концом u, и что u *заходит* в x, если x является концом, но не является началом u; в обоих случаях дуга u называется *инцидентной* вершине x. Это понятие легко обобщается: если A — данное множество вершин, то говорят, что дуга u *исходит* из A, если

$$u = (a, x), \quad a \in A, \quad x \notin A;$$

множество дуг, исходящих из A обозначается символом U_A^+. Аналогично определяется множество U_A^- дуг, *заходящих* в множество вершин A.

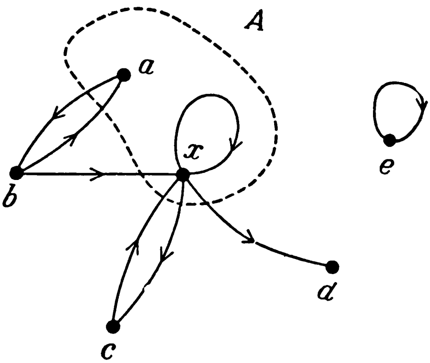

Рис. 1—3.

Множество дуг, инцидентных A, обозначается символом $U_A = U_A^+ \cup U_A^-$.

Предоставляем читателю проверить, что в графе, изображенном на рис. 1—3, для $A = \{a, x\}$ имеем

$$U_A^+ = \{(a, b), (x, c), (x, d)\}, \quad U_A^- = \{(b, a), (b, x), (c, x)\}.$$

Путем в графе $G = (X, U)$ называется такая последовательность $(u_1, u_2, \ldots)$ дуг, что конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь является *простым*, когда в нем никакая дуга не встречается дважды, и *составным* — в противном случае.

Путь μ, последовательные вершины которого суть $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_k, x_{k+1}$, можно обозначить символом $\mu = [x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}]$; путь, идущий от x_2 к x_k по тем же дугам, что и μ, будем обозначать

$$\mu[x_2, x_k] = [x_2, x_3, \ldots, x_k].$$

Путь, в котором никакая вершина не встречается дважды, называется *элементарным*; путь может быть конечным или бесконечным.

Контур — это конечный путь $\mu = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$, у которого начальная вершина x_1 совпадает с конечной x_k; при этом контур называется *элементарным*, если все его вершины различны (за исключением начальной и конечной, которые совпадают).

Длина пути $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ есть число $l(\mu) = k$ дуг последовательности; в случае бесконечного пути μ полагаем $l(\mu) = \infty$. Наконец, контур длины 1, образованный дугой вида (x, x), называется *петлей*.

Пример. *Старшинство в организации.*

Пусть X — множество лиц некоторой организации, например военной, и пусть Γx — множество лиц, непосредственно подчиненных лицу x. Связь любого начальника с любым подчиненным изобразится в виде пути графа (X, Γ); важно, чтобы граф не имел контуров, ибо их наличие может привести к противоречивым приказаниям.

С помощью понятий *дуги*, *пути*, *контура* можно охарактеризовать некоторые важные категории графов. Прежде всего, граф (X, U) называется *симметрическим*, если

$$(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U.$$

В симметрическом графе две смежные вершины x и y всегда соединены двумя противоположно ориентированными дугами; для упрощения изображения *условимся в этом случае соединять обе точки одной непрерывной линией без стрелок.*

Граф (X, U) называется *антисимметрическим*, если

$$(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \notin U$$

(каждая пара смежных вершин соединена только в одном направлении; петли отсутствуют).

Граф (X, U) называется *полным*, если

$$(x, y) \notin U \Rightarrow (y, x) \in U$$

(любые две вершины соединены хотя бы в одном направлении).

Наконец, говорят, что граф *сильно связен*, когда для любых двух вершин x и y $(x \neq y)$ существует путь, идущий из x в y.

Пример. *Схема коммуникаций.* Пусть X — некоторое множество людей и пусть $(x, y) \in U$, когда лицо x имеет возможность непосредственно передавать сообщения лицу y. Обычно этот граф — симметрический: например, если связь осуществляется с помощью телеграфа, телефона, там-тама и т. д.; но граф может и не быть симметрическим, как в случае ракет или почтовых голубей.

Кроме того, в правильно спроектированной сети коммуникаций каждый человек должен иметь возможность передать сообщение любому другому члену организации или непосредственно, или через посредников; иными словами, важно, чтобы граф был сильно связен.

Цепи и циклы

Ребром графа $G = (X, U)$ называется множество из двух элементов x и y, для которых $(x, y) \in U$ или $(y, x) \in U$; это понятие нельзя смешивать с понятием *дуги*, в котором участвует ориентация. Так, например, граф, изображенный на рис. 1—3, имеет 8 дуг, но только 6 ребер.

Ребро обозначается жирной латинской буквой: $\mathbf{u}$ или $\mathbf{v}$, а множество ребер — буквой $\mathbf{U}$. Ребро, для которого вершины x и y — граничные, обозначается символом $\mathbf{u} = [x, y]$.

Цепь — это последовательность ребер $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots)$, в которой у каждого ребра $\mathbf{u}_k$ одна из граничных вершин является также граничной вершиной для $\mathbf{u}_{k-1}$, а другая — граничной вершиной для $\mathbf{u}_{k+1}$. Цепь называется *простой*, если все ее ребра различны, и *составной* — в противном случае.

Цикл — это конечная цепь, начинающаяся в некоторой вершине x и оканчивающаяся в той же вершине x; цикл называется *простым*, если все его ребра различны, и *составным* в противном случае; наконец, цикл, при обходе которого ни одна вершина не встречается дважды, называется *элементарным*.

Граф *связен*, если любые две его различные вершины можно соединить цепью. Сильно связный граф связен, но обратное утверждение неверно.

Обозначим через C_a множество, состоящее из данной вершины a и всех тех вершин графа, которые могут быть соединены с ней цепью; *компонента связности* (или просто *компонента*) — это подграф, порожденный множеством типа C_a.

Приведем две очень простые теоремы.

Теорема 1. *Различные компоненты графа* (X, Γ) *образуют разбиение множества* X; *то есть*:

(1) $C_a \neq \varnothing$;

(2) $C_a \neq C_b \Rightarrow C_a \cap C_b = \varnothing$;

(3) $\bigcup C_a = X$.

Так как $a \in C_a$, то (1) имеет место.

Для доказательства (2) предположим, что $C_a \cap C_b \neq \varnothing$, и покажем, что тогда $C_a = C_b$.

Пусть $x \in C_a \cap C_b$; вершина x может быть соединена цепями как с a, так и с b; поэтому a можно соединить с b, т. е. $b \in C_a$. Значит,

$$C_b \subset C_a.$$

Точно так же имеем $C_a \subset C_b$ (из соображений симметрии), следовательно, $C_a = C_b$.

(3) справедливо потому, что

$$X \supset \bigcup_{a \in X} C_a \supset \bigcup_{a \in X} \{a\} = X,$$

откуда

$$\bigcup C_a = X.$$

Теорема 2. *Граф связен в том и только в том случае, если он состоит из единственной компоненты.*

Если граф имеет две различные компоненты C_a и C_b, то он несвязен, ибо вершины a и b нельзя соединить цепью.

Если граф несвязен, то найдутся две вершины a и b, которые невозможно соединить цепью, и, значит, C_a и C_b будут различными компонентами.

Замечание. Граф можно рассматривать либо с учетом, либо без учета ориентации его дуг; в первом случае мы имеем дело с понятиями дуги, пути, контура, сильной связности и т. д., во втором — с понятиями ребра, цепи, цикла, связности и т. д. В дальнейшем, когда для некоторого понятия, определяемого в терминах дуг графа, имеется параллельное понятие, определяемое в терминах ребер, мы часто будем образовывать второе из первого посредством добавления суффикса „*оид*“ (например, „центр“ — „центроид“ и т. д.).