

Б. Олдер, В.П. Коробейникова

Вычислительные методы в гидродинамике

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Б11

Б11 **Б. Олдер**
Вычислительные методы в гидродинамике / Б. Олдер, В.П. Коробейникова – М.: Книга по Требованию, 2023. – 384 с.
ISBN 978-5-458-36505-5

ISBN 978-5-458-36505-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Аналитические и численные методы четко разделили области господства в нелинейной механике сплошных сред. Первые закрепили свои позиции в исследовании и расчете особых точек, линий и поверхностей, вторые позволяют получать надежные результаты при расчете уравнений с частными производными в областях, не содержащих особенностей. Умелое совместное использование аналитических и численных методов определяет успех современного исследования.

С аналитическими методами, и по существу только с ними, знакомят классические курсы механики сплошных сред. Численным методам все еще редко посвящаются целые книги.

Предлагаемая читателю книга на самом деле является сборником независимых работ, но подбор этих работ сделан таким образом, что позволяет достаточно полно охватить численные методы расчета неустановившихся движений сжимаемой среды, зависящих от двух пространственных переменных. Основная часть статей посвящена конечно-разностным методам в переменных Эйлера и Лагранжа или же методам, использующим комбинацию этих переменных. Часть статей касается метода характеристик. Две последние главы посвящены соответственно методу частиц в ячейках и конечно-разностному методу расчета нестационарных плоских течений вязкой несжимаемой жидкости.

Иногда авторы проводят анализ устойчивости предлагаемых конечно-разностных схем. В некоторых случаях дается описание особенностей структуры программ для электронных вычислительных машин.

Необходимо отметить, что многие из приведенных примеров расчетов представляют самостоятельный интерес. Этот интерес объясняется как спецификой рассмотренных задач, так и их подробным решением.

Особо следует отметить содержание статей Дж. Майнчена, С. Сака и М. Уилкинса, в которых демонстрируются возможности современных вычислительных методов при решении задач механики твердого деформируемого тела с учетом многочисленных эффектов (упругость, пластичность, сжимаемость, хрупкое разрушение и т. д.), сопровождающих деформирование и движение таких сред при воздействии на них интенсивных нагрузок.

В то время как эффективность этих методов и фактически добытые с их помощью в гидрогазодинамике результаты уже получили достаточно широкую известность и прочно вошли в практику исследовательских работ, применительно к механике твердого деформируемого тела эти методы пока

находятся в начальной стадии развития. Ознакомление с отмеченными выше статьями настоящего сборника позволяет ощутить возможности вычислительных методов и в этой весьма трудной области.

Большая часть статей написана специалистами из Лосаламосской научной лаборатории и Калифорнийского университета. Использование мощных электронных вычислительных машин позволило авторам с самого начала разрабатывать методы, опирающиеся на большую скорость вычислений и значительный объем машинной памяти. Многие из публикуемых результатов ранее не были доступны широкому кругу читателей. Они, безусловно, будут полезны для специалистов, работающих в области физики, гидромеханики, механики твердого деформируемого тела и вычислительной математики.

Сборник не лишен некоторых недостатков. Статьи резко различаются как по логической стройности предлагаемых схем, так и по четкости изложения. В процессе подготовки русского издания пришлось устранить большое количество неточностей и опечаток.

При переводе и редактировании работа была распределена следующим образом: статьи со второй по шестую перевел В. П. Коробейников, остальные — П. И. Чушкин. Статьи пятую и шестую редактировал С. С. Григорян, остальные — Ю. Д. Шмыглевский.

*С. С. ГРИГОРЯН
Ю. Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современные технические данные больших электронных цифровых вычислительных машин делают возможным численное решение таких систем дифференциальных уравнений в частных производных, которых никогда ранее не пытались решать. Даже простейшая одномерная зависящая от времени система уравнений, которая ныне на обычных электронных вычислительных машинах решается по стандартным программам, потребовала бы несколько лет назад настолько большого количества человеко-часов работы, что к ее решению не стали бы и приступать.

В настоящем томе из серии, посвященной вычислительным аспектам физических проблем, рассматриваются современные методы численного решения задач, главным образом задач о движении невязкой сжимаемой жидкости. Эти методы были разработаны для расчетов на электронных вычислительных машинах в течение последних 15 лет. Некоторые из описанных здесь методов более эффективны, чем другие. Методы с ограниченным применением также включены в книгу, поскольку нам кажется, что в эти первые годы развития электронных вычислительных машин как математического инструмента должны быть широко представлены для обсуждений даже менее успешные эвристические методы.

Первые четыре главы этой книги содержат численные методы, в которых используются лагранжевы или эйлеровы переменные или же комбинация двух этих переменных в случае нескольких пространственных измерений. Две следующие главы иллюстрируют применение некоторых из этих методов для случая упруго-пластической среды, что связано с дополнительными осложнениями. В двух дальнейших главах рассматривается метод характеристик для решения задач как с одной, так и с двумя пространственными переменными. Следующая глава посвящена хорошо известному теперь методу частиц в ячейках. Последняя глава относится к течению вязкой несжимаемой жидкости и включена потому, что в ней обсуждается новый метод для решения таких задач.

Четвертый том данной серии также будет посвящен рассмотрению гидродинамических вопросов, но с более прикладной точки зрения.

**Б. ОЛДЕР,
С. ФЕРНБАХ,
М. РОТЕНБЕРГ**

Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа

У. Д. ШУЛЬЦ

*Калифорнийский университет, Лоуренсовская
лаборатория радиации, Ливермор, Калифорния*

1. Введение	9
2. Определения, обозначения и формулы преобразования	11
3. Уравнения сохранения	13
4. Тензорная искусственная вязкость	16
5. Устойчивость дифференциальных уравнений	23
6. Гидродинамические конечно-разностные уравнения	29
7. Выбор величины Dt	40
8. Рассмотрение границ	47
9. Пример численного решения задачи	48
Литература	54

1. Введение

Первые гидродинамические задачи с начальными значениями, которые решались на электронных вычислительных машинах, были одномерными задачами (они содержат одну пространственную переменную, а в качестве другой переменной здесь мы всегда будем подразумевать время). При решении одномерных задач доводы в пользу применения представления Лагранжа почти полностью перевешивают соображения в пользу применения представления Эйлера. После того как Рихтмайер и фон Нейман ввели искусственную вязкость в теорию численных методов, создание относительно точных и устойчивых расчетных схем в переменных Лагранжа стало совсем простым делом.

Численные же схемы в переменных Эйлера, вообще говоря, не столь точны и вызывают ряд дополнительных затруднений. Когда в рассматриваемой задаче имеется несколько различных сред, то при использовании представления Эйлера возникает тенденция к диффузии через поверхности раздела с физически нереальными скоростями. Вторая трудность здесь заключается в том, что если рассматриваемая физическая система сжимается, то ее математическое определение ухудшается из-за того, что в численных схемах в представлении Эйлера координаты отвечают фиксированным точкам в пространстве в отличие от численных схем в представлении Лагранжа, где координаты отвечают

фиксированным точкам в среде. Вообще говоря, структура задачи лучше определяется в переменных Лагранжа. Все эти соображения относятся к внутренней области физической системы. Граничные же условия иногда бывают такими, что становится предпочтительнее пользоваться переменными Эйлера, однако это случается редко.

Поскольку в одномерных численных схемах в основном применялись переменные Лагранжа, то первоначально в двумерных численных схемах, естественно, также брались переменные Лагранжа. Все приведенные доводы о предпочтительности представления Лагранжа остаются справедливыми и в двумерном случае, но один из них должен быть пересмотрен. В двумерном случае появляется некоторый новый процесс, а именно турбулентность. В одномерном случае, если выбраны подходящие переменные Лагранжа, т. е. переменные, которые хорошо определяют данную физическую систему, то с течением времени они, как правило, также будут хорошо определять эту систему.

В двумерных же задачах положение несколько иное. Здесь координаты Лагранжа, которые первоначально хорошо определяли систему повсюду, часто с течением времени превращаются в координаты, имеющие области плохого определения. Обычно это затрудняющее обстоятельство можно отнести на счет турбулентности. Численные схемы в переменных Лагранжа дают достоверные результаты, когда такие области плохого определения не имеют значительного влияния на общее поведение физической системы. В последнем разделе данной статьи содержатся еще несколько замечаний по этому вопросу, которые непосредственно относятся к небольшой задаче, приведенной там для иллюстрации.

В двумерных численных схемах искусственная вязкость Рихтмайера — Неймана обобщается здесь на тензорную искусственную вязкость. Это сделано отчасти для того, чтобы облегчить проблему турбулентности, и отчасти для того, чтобы получить лучшее представление для ударных волн. Это нововведение дало некоторый интересный дополнительный эффект. При использовании тензорной искусственной вязкости в одномерном цилиндрическом и сферическом случаях имеют место уравнения, которые отличаются от уравнений, встречающихся при обычном способе введения скалярной искусственной вязкости Рихтмайера — Неймана. На практике для физических систем с большим числом ударных волн эти уравнения с тензорной вязкостью дают отличающиеся результаты, но для систем с одной ударной волной они находятся в хорошем соответствии с результатами, полученными при использовании уравнений со скалярной искусственной вязкостью.

2. Определения, обозначения и формулы преобразования

Для удобства мы сначала рассмотрим несколько соотношений, связывающих координаты Эйлера с координатами Лагранжа. Координаты Эйлера наиболее распространены в физике.

Кроме того, выражения в переменных Эйлера служат для сокращения записи более сложных эквивалентных выражений в переменных Лагранжа. Перед представлением любых выражений в конечно-разностном виде они, конечно, будут сначала записываться в переменных Лагранжа (рис. 1), где приняты следующие обозначения: $R(k, l, t)$ — координата Эйлера (она может быть либо декартовой, либо цилиндрической координатой);

$Z(k, l, t)$ — координата Эйлера (всегда является декартовой координатой); $\mathbf{R}$ — вектор (R, Z) ; k — координата Лагранжа; l — координата Лагранжа; j — якобиан преобразования.

Если $R_k = \partial R / \partial k$, $R_l = \partial R / \partial l$ и т. д., то тогда $j = R_k Z_l - R_l Z_k$ представляет собой якобиан, выражающий отношение площадей в рассматриваемых переменных.

Пусть

$$\hat{R} = \begin{cases} R & \text{для цилиндрических координат,} \\ 1 & \text{для декартовых координат,} \end{cases}$$

тогда «объемный якобиан» можно определить так:

$$J = \hat{R} j.$$

Рассмотрим преобразование производной в переменных Эйлера в производную в переменных Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} &= \left(\frac{\partial k}{\partial R} \right) \frac{\partial}{\partial k} + \left(\frac{\partial l}{\partial R} \right) \frac{\partial}{\partial l}, \\ \frac{\partial}{\partial Z} &= \left(\frac{\partial k}{\partial Z} \right) \frac{\partial}{\partial k} + \left(\frac{\partial l}{\partial Z} \right) \frac{\partial}{\partial l}. \end{aligned}$$

Выражение для $\partial k / \partial R, \dots, \partial l / \partial Z$ через производные $R_k, \dots, Z_l$ можно найти следующим образом. Для произвольного g имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial k} &= R_k \frac{\partial g}{\partial R} + Z_k \frac{\partial g}{\partial Z}, \\ \frac{\partial g}{\partial l} &= R_l \frac{\partial g}{\partial R} + Z_l \frac{\partial g}{\partial Z}. \end{aligned}$$

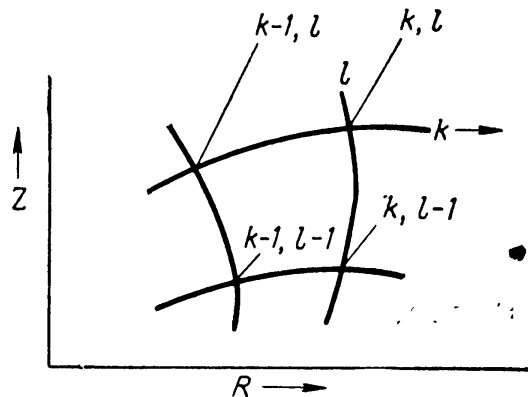


Рис. 1. Лагранжева координатная сетка для расчетов конечно-разностным методом.

Пусть $g=k$, тогда эти уравнения можно разрешить относительно $\partial k/\partial R$ и $\partial k/\partial Z$. Аналогично, полагая $g=l$, найдем $\partial l/\partial R$ и $\partial l/\partial Z$. В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial R} &= \frac{Z_l}{j}, & \frac{\partial l}{\partial R} &= -\frac{Z_k}{j}, \\ \frac{\partial k}{\partial Z} &= -\frac{R_l}{j}, & \frac{\partial l}{\partial Z} &= \frac{R_k}{j},\end{aligned}$$

что дает

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial R} &= \frac{Z_l}{j} \frac{\partial}{\partial k} - \frac{Z_k}{j} \frac{\partial}{\partial l}, \\ \frac{\partial}{\partial Z} &= -\frac{R_l}{j} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{R_k}{j} \frac{\partial}{\partial l}.\end{aligned}$$

Определим вектор $\bar{\mathbf{R}}$, повернутый относительно вектора $\mathbf{R}$ на 90° против часовой стрелки, как «нормальный вектор» к $\mathbf{R}$, т. е.

$$\bar{\mathbf{R}} = (Z, -R) \text{ — нормальный вектор к } \mathbf{R}.$$

Заметим, что

$$\bar{\mathbf{R}}_1 \cdot \bar{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2, \quad \bar{\mathbf{R}}_1 \cdot \mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1 \cdot \bar{\mathbf{R}}_2.$$

Можно определить также следующий полезный векторный оператор:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{j} \left[\bar{\mathbf{R}}_l \frac{\partial}{\partial k} - \bar{\mathbf{R}}_k \frac{\partial}{\partial l} \right] = \frac{1}{j} \left[\frac{\partial}{\partial k} (\bar{\mathbf{R}}_l \dots) - \frac{\partial}{\partial l} (\bar{\mathbf{R}}_k \dots) \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned}\nabla f &= \mathbf{D}f, \\ \nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{1}{\hat{R}} \mathbf{D} \cdot (\hat{R} \mathbf{f}).\end{aligned}$$

Производные по времени в переменных Лагранжа, т. е. частные производные при фиксированных k и l , записываются следующим образом:

$$u(k, l, t) = \frac{\partial R}{\partial t} = R_t = \dot{R} \text{ — скорость по направлению } R,$$

$$v(k, l, t) = \frac{\partial Z}{\partial t} = Z_t = \dot{Z} \text{ — скорость по направлению } Z,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(u, v) \text{ — вектор скорости.}$$

Теперь введем некоторые соотношения, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$\begin{aligned}j &= \mathbf{R}_k \cdot \bar{\mathbf{R}}_l, \\ j_t &= \mathbf{R}_{kt} \cdot \bar{\mathbf{R}}_l + \mathbf{R}_k \cdot \bar{\mathbf{R}}_{lt} = \bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{R}_{kt} - \bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{R}_{lt}, \\ j_t &= \bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l = j \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}.\end{aligned} \tag{1}$$

В цилиндрических координатах

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{u}{R} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}.$$

Подставляя сюда $\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$ из выражения (1), получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{R_t}{R} + \frac{j_t}{j} = \frac{(Rj)_t}{Rj}.$$

Следовательно,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{j_t}{j}. \quad (2)$$

Поскольку $J=j$ для декартовой системы координат, то формула (2) сводится к (1) и, таким образом, действительна для обеих (декартовой и цилиндрической) систем координат.

Заканчивая рассмотрение формул преобразования, выведем связь между производными по времени в переменных Эйлера и Лагранжа.

Пусть g — произвольная функция, тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_R + \frac{\partial g}{\partial R} R_t + \frac{\partial g}{\partial Z} Z_t.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_R + (\mathbf{u} \cdot \nabla).$$

Перечислим еще некоторые обозначения и определения: p — давление; ρ — плотность; $\tau = \rho^{-1}$ — удельный объем; ε — удельная внутренняя энергия; S — энтропия; $M = \rho^0 J^0$ — массовая константа (верхний индекс «0» означает, что $t=0$); $\varepsilon(s)$ — удельная внутренняя энергия, вносимая внешним источником; $E = M\varepsilon$.

3. Уравнения сохранения

В этом разделе приводится система дифференциальных уравнений гидродинамики. Здесь даются замечания к различным дифференциальным уравнениям и проводится сопоставление их между собой, но без фундаментального обсуждения их смысла. Таким образом, будем считать, что дифференциальные уравнения известны (исключая лишь вопросы, связанные с введением искусственной вязкости), и будем исходить из этого предположения. Следовательно, уравнения (3)—(6) будем рассматривать как определяющие, а уравнения (7)—(9) выводятся из этих определяющих уравнений.

Уравнение массы

$$\tau = J/M. \quad (3)$$

Это уравнение непосредственно следует из уравнения сохранения массы, которое обычно записывается в виде

$$(\rho J)_t = 0,$$

и, следовательно,

$$\rho J = \rho^0 J^0 = M.$$

Дифференциальное уравнение количества движения

$$\rho \mathbf{u}_t + \nabla p + \frac{\rho}{M} \left[\frac{\partial}{\partial k} (\hat{R} \bar{\mathbf{R}}_l q_A) - \frac{\partial}{\partial l} (\hat{R} \bar{\mathbf{R}}_k q_B) \right] = 0. \quad (4)$$

В уравнениях гидродинамики для сглаживания разрывов, обусловленных ударными волнами, будет применяться тензорная искусственная вязкость. В уравнении (4) величина q_A должна интерпретироваться как «одномерная» вязкость, связанная с направлением $\bar{\mathbf{R}}_l$, тогда как величина q_B является «одномерной» вязкостью, связанной с направлением $\bar{\mathbf{R}}_k$ ¹⁾.

Уравнение внутренней энергии

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon(s)}{\partial t} + p \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{q_A (\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k)}{\rho j} + \frac{q_B (-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l)}{\rho j} = 0. \quad (5)$$

Уравнение сохранения полной энергии (7) показывает, что в уравнениях количества движения и внутренней энергии члены, содержащие q_A и q_B , являются взаимосогласованными.

Уравнение состояния. Величина p , которая входит в уравнения сохранения, вычисляется как известная функция от ε и τ . Таким образом, должны быть заданы уравнения (или таблицы) в форме

$$p = p(\varepsilon, \tau). \quad (6)$$

Уравнение сохранения полной энергии. Из уравнения количества движения и уравнения внутренней энергии имеем

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \left\{ \mathbf{u}_t + \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{M} \left[\frac{\partial}{\partial k} (\hat{R} \bar{\mathbf{R}}_l q_A) - \frac{\partial}{\partial l} (\hat{R} \bar{\mathbf{R}}_k q_B) \right] \right\} + \\ + \rho \left\{ \varepsilon_t - \varepsilon(s)_t + p \tau_t + \frac{q_A}{\rho j} (\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k) + \frac{q_B}{\rho j} (-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Преобразуя это выражение и используя равенство

$$\rho \tau_t = \frac{\tau_t}{\tau} = \frac{J_t}{J} = \nabla \cdot \mathbf{u},$$

¹⁾ Подробное обсуждение тензорной искусственной вязкости проводится в § 4.