

Канторович Леонид Витальевич

**Методы приближенного решения
уравнений в частных
производных**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
Л47

Л47 **Леонид Витальевич К.**
Методы приближенного решения уравнений в частных производных / Канторович Леонид Витальевич – М.: Книга по Требованию, 2023. – 528 с.

ISBN 978-5-519-88069-5

ISBN 978-5-519-88069-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг — не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель — вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания — решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ГЛАВА I

МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОГО РЯДА

§ 1. Метод Фурье

Одним из основных и наиболее распространенных методов решения задач математической физики является метод Фурье. Решение, найденное по этому методу, получается обычно в форме бесконечного ряда, во многих случаях быстро сходящегося, поэтому метод Фурье часто может быть использован и для нахождения необходимых численных результатов; отрезок же этого ряда дает приближенное решение задачи. Мы предполагаем, что читатель знаком с простейшими применениями метода Фурье к решению задач математической физики, например с решением задачи о струне по методу Фурье.¹ Поэтому мы не будем излагать здесь метод Фурье со всей полнотой и подробностью, а рассмотрим только его применение к задачам, относящимся к уравнениям эллиптического типа и главным образом к уравнению Лапласа.

В п° 1 приведено решение одной частной задачи — именно задачи Дирихле для прямоугольника. В п° 2 намечены общие принципы применения метода Фурье к задачам эллиптического типа. В п° 3, 4 — дальнейшие применения метода Фурье к частным задачам.

п° 1. Задача Дирихле для прямоугольника. Простейшим и основным уравнением в частных производных эллиптического типа является уравнение Лапласа:

$$(1) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Функции непрерывные с частными производными первого и второго порядка, являющиеся решениями этого уравнения, называются гармоническими.

Первая основная задача, относящаяся к уравнению Лапласа, есть задача Дирихле. Она формулируется так: *найти функцию u ,*

¹ См. В. И. Смирнов. Курс Высшей математики, т. II, стр. 449 (изд. 2). Н. С. Кошляков. Дифференциальные уравнения математической физики. Вебстер-Сеге. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. Гильберт-Курант. Методы математической физики.

гармоническую в данной области D и принимающую на замкнутом контуре L , ограничивающем область D , заданные значения. Если уравнения контура L даны в параметрическом виде: $x = x(s)$, $y = y(s)$, то это условие можно, например, записать так:

$$u[x(s), y(s)] = f(s),$$

где $f(s)$ заданная функция. Короче будем записывать:

$$u = f(s) \text{ на } L.$$

Сделаем одно замечание, которое будет нам полезно. Если функция $f(s)$ есть сумма $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$, то достаточно, очевидно, найти решения u_1 и u_2 , обращающиеся на L соответственно в $f_1(s)$ и $f_2(s)$, так как $u = u_1 + u_2$ даст решение задачи, обращающееся на L в $f(s)$.

Перейдем теперь к решению задачи Дирихле для случая, когда область D есть прямоугольник со сторонами a и b . Оси координат выберем как указано на чертеже, т. е. за ось абсцисс возьмем горизонтальную среднюю линию, а за ось ординат — левую сторону.

Общая задача Дирихле будет состоять здесь в нахождении гармонической функции, обращающейся

в заданные произвольные функции на сторонах прямоугольника. Следовательно, граничные условия можно записать так:

$$(2) \quad u = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } y = \frac{b}{2} \\ \varphi_2(x) & \text{" } y = -\frac{b}{2} \\ \psi_1(y) & \text{" } x = 0 \\ \psi_2(y) & \text{" } x = a \end{cases}$$

Решение этой задачи можно получать как сумму $u_1 + u_2$ решений двух более простых задач:

$$(3) \quad u_1 = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } y = \frac{b}{2} \\ \varphi_2(x) & \text{" } y = -\frac{b}{2} \\ 0 & \text{" } x = 0 \text{ и } x = a \end{cases}$$

$$(3') \quad u_2 = \begin{cases} \psi_1(y) & \text{при } x = 0 \\ \psi_2(y) & \text{" } x = a \\ 0 & \text{" } y = \pm \frac{b}{2} \end{cases}$$

Эти задачи являются более простыми, так как в них мы имеем на двух сторонах нулевые условия. Обе задачи несущественно разнятся между собой и решение одной из них может быть легко сведено к решению другой, поэтому мы рассмотрим подробно лишь задачу нахождения функции u_1 .

Задачу решаем методом Фурье. Ищем прежде всего элементарные основные решения, именно функции вида

$$(4) \quad u = X(x) \cdot Y(y),$$

которые удовлетворяли бы уравнению Лапласа (1) и лишь последнему из условий (3).

Подставляя (4) в уравнение Лапласа, найдем:

$$X''Y + Y''X = 0$$

или

$$(5) \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k,$$

где k некоторая постоянная, ибо оба выражения $\frac{X''}{X}$ и $\frac{Y''}{Y}$ должны быть постоянными, так как только в этом случае функция одного x может тождественно равняться функции одного y . Для нахождения функции X из (5) получим уравнение второго порядка:

$$(6) \quad X'' - kX = 0,$$

а чтобы функция u , определенная равенством (4), удовлетворяла последнему из условий (3), функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$(7) \quad X(0) = X(a) = 0.$$

Мы должны найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условию (7). Если положить $k = -\lambda^2$,¹ то общее решение уравнения (6) будет:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Условия (7) дают

$$C_1 = 0$$

$$C_1 \cos \lambda a + C_2 \sin \lambda a = 0,$$

следовательно $C_1 = 0$ непременно, а C_2 можно взять неравным нулю только при условии

$$(8) \quad \sin \lambda a = 0,$$

т. е., если λa число кратное π :

$$\lambda a = n\pi \quad [n = 1, 2, 3, \dots],$$

n неположительные здесь отсутствуют, так как новых решений они не

¹ Можно было бы рассмотреть и положительные значения k , но они не дали бы никаких отличных от нуля решений. Действительно, положив $k = \lambda^2$, нашли бы $X(x) = C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \operatorname{sh} \lambda x$, начальные условия (7) заставили бы здесь принять $C_1 = C_2 = 0$, т. е. мы бы получили бы никакого нетривиального решения.

дают. Итак, при $\lambda = \frac{n\pi}{a}$ мы получаем решение:

$$(9) \quad X_n(x) = C \sin \frac{n\pi x}{a} \quad [n = 1, 2, \dots].$$

Подставляя $k = -\lambda^2 = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ в (5), получим для Y уравнение

$$(9') \quad Y'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y = 0,$$

решая которое, найдем

$$(10) \quad Y = C_1 * e^{\frac{n\pi}{a} y} + C_2 * e^{-\frac{n\pi}{a} y} = C_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + C_2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y,$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

Окончательно основное решение уравнения (4) в виду (9) и (10) можем записать так:

$$(11) \quad u = \left(A \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + B \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

где A и B опять произвольные постоянные.

Теперь решение нашей задачи — функцию u_1 можем искать в виде суммы основных решений:

$$(12) \quad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа (1) и последнему из условий (3), остается подобрать постоянные A_n и B_n так, чтобы удовлетворить первым двум из условий (3). На основании этих условий напишем следующие равенства:

$$(13) \quad \begin{cases} u_1 \Big|_{y=\frac{b}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} \right) \sin \frac{n\pi}{a} x = \varphi_1(x), \\ u_1 \Big|_{y=-\frac{b}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} \right] \sin \frac{n\pi}{a} x = \varphi_2(x). \end{cases}$$

С другой стороны, разлагая $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в ряды, по $\sin \frac{n\pi}{a} x$, имеем:

$$(14) \quad \varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(1)} \sin \frac{n\pi x}{a}; \quad \varphi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(2)} \sin \frac{n\pi x}{a},$$

где

$$(15) \quad \beta_n^{(1)} = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx; \quad \beta_n^{(2)} = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_2(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Сравнивая коэффициенты рядов (13) и (15), получаем следующие равенства.

$$(16) \quad \begin{cases} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} = \beta_n^{(1)}, \\ A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} = \beta_n^{(2)}. \end{cases}$$

Если из этих равенств определить A_n и B_n и подставить в (12), то для u_1 получаем окончательно следующее выражение:

$$(17) \quad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}}{2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \right. \\ \left. + \frac{\beta_n^{(1)} - \beta_n^{(2)}}{2 \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right] \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Этот ряд будет наверное сходящимся во всякой точке внутри прямоугольника, ибо $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$, как коэффициенты Фурье интегрируемой функции, стремятся к нулю, а отношения

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}; \quad \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}}$$

представляют величины порядка

$$e^{\frac{n\pi}{a} \left(|y| - \frac{b}{2} \right)}$$

и так как $|y| < \frac{b}{2}$, то ряд для u_1 сходится как прогрессия со знаменателем $e^{\frac{n\pi}{a} \left(|y| - \frac{b}{2} \right)}$.

Следует отметить, что для быстроты сходимости ряда (17), особенно в точках близких к контуру (когда $|y|$ близок к $\frac{b}{2}$), имеет существенное значение быстрота убывания коэффициентов $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$. Это обстоятельство дает путь для улучшения сходимости ряда (17) [смотри ниже (§ 5)].

В виду быстрой сходимости ряда (17) будут сходиться ряды для производных u_1 и будем допустить почленное дифференцирование, а потому можно непосредственной подстановкой проверить, что функция $u_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (1). Далее, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны, то можно показать, что предельные значения для $u_1(x, y)$ при приближении к контуру будут те, которые предписаны

условиями (3). Итак, найденная функция u_1 удовлетворяет всем поставленным условиям.

Для нахождения функции u_2 нужно решить уравнение Лапласа при условиях (3'). Но, вводя преобразование координат при помощи формулы

$$x' = y + \frac{b}{2}; \quad y' = x - \frac{a}{2},$$

приведем условия (3') к виду (3), только при этом обменяются ролями числа a и b и вместо функций φ_1 и φ_2 войдут ψ_1 и ψ_2 . Поэтому, воспользовавшись формулой (17), а затем вернувшись к переменным x и y , решение для функции u_2 получаем в следующем виде:

$$(18) \quad u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)}}{2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\delta_n^{(1)} - \delta_n^{(2)}}{2 \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] \sin \frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right),$$

где

$$(19) \quad \delta_n^{(1)} = \frac{2}{b} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \psi_1(y) \cdot \sin \frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) dy, \quad \delta_n^{(2)} = \frac{2}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \psi_2(y) \cdot \sin \frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) dy.$$

Полное решение поставленной задачи — функцию u — получим, складывая решения (17) и (18). Следует заметить, что выражения для функций u_1 и u_2 упрощаются, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ [соответственно $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$] равны между собой. Например, если $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x)$, то

$$\beta_n^{(1)} = \beta_n^{(2)} = \beta_n = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

и выражение для u_1 принимает вид

$$(20) \quad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Таким же образом может быть решена для случая прямоугольника и вторая основная граничная задача — задача Неймана.

Задача Неймана вообще ставится так: найти функцию u , гармоническую в области D , у которой нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$,

т. е. производная по направлению нормали к контуру, имеет заданные значения на контуре L ,

$$(21) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = f_1(s) \text{ на } L.$$

Задача Неймана имеет некоторые особенности по сравнению с задачей Дирихле. Во-первых, она имеет не единственное решение, ибо очевидно, что если мы к некоторому решению задачи прибавим любую постоянную, то снова получим решение. Во-вторых, функция $f_1(s)$ не может быть взята произвольно. Именно, по известному свойству гармонической функции, интеграл от ее нормальной производной по замкнутому контуру должен равняться нулю,¹

$$(22) \quad \int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_L f_1(s) ds = 0.$$

Перейдем теперь к случаю прямоугольника. Обозначения и систему координат сохраняем те же, что и в задаче Дирихле. Так же как и там можем разбить задачу на две, причем в каждом случае на двух сторонах условия нулевые. Для функции u_1 будем иметь условия

$$(23) \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \begin{cases} \gamma_1(x) & \text{при } y = \frac{b}{2} \\ \gamma_2(x) & \text{при } y = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad x = a.$$

Задачу решаем методом Фурье. Отыскивая решение в форме $u = XY$, имеем здесь для $X(x)$ вместо (7) условие

$$(24) \quad X'(0) = X'(a) = 0.$$

На основании этого условия получим тем же путем, что $\lambda = \frac{n\pi}{a}$, и

$$(25) \quad X_n = \cos \frac{n\pi}{a} x \quad [n = 0, 1, 2, \dots]$$

Тогда для u_1 найдем вместо (12) ряд

$$(26) \quad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right] \cos \frac{n\pi}{a} x + A_0 y + B_0;$$

последнее слагаемое $A_0 y + B_0$ есть решение уравнения (9'), отвечающее случаю $n = 0$.

¹ См. В. И. Смирнов, т. II, стр. 500.

Постоянные A_n и B_n можем определить, пользуясь первыми двумя из условий (23). Именно на основании этих условий и ряда (26) пишем

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=\frac{b}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} \left[A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} \right] \cos \frac{n\pi}{a} x + \\ &\quad + A_0 = \gamma_1(x), \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=-\frac{b}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} \left[-A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} \right] \cos \frac{n\pi}{a} x + \\ &\quad + A_0 = \gamma_2(x). \end{aligned} \right.$$

Обозначим через $\alpha_n^{(1)}$ и $\alpha_n^{(2)}$ коэффициенты Фурье функций $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ при разложении их в ряд по $\cos \frac{n\pi}{a} x$:

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(1)} &= \frac{2}{a} \int_0^a \widetilde{\gamma_1(x)} \cos \frac{n\pi x}{a} dx; \\ \alpha_n^{(2)} &= \frac{2}{a} \int_0^a \gamma_2(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \quad [n=0, 1, 2, \dots]. \end{aligned}$$

Если сравнить теперь коэффициент при $\cos \frac{n\pi x}{a}$ в обеих частях равенств (27), то найдем систему для определения A_n и B_n :

$$(27') \quad \begin{cases} A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} = \frac{a}{n\pi} \alpha_n^{(1)} \\ -A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} = \frac{a}{n\pi} \alpha_n^{(2)} \end{cases} \quad [n=1, 2, \dots].$$

Для $n=0$ получим непосредственно из (27) равенства:

$$A_0 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2}; \quad A_0 = \frac{\alpha_0^{(2)}}{2}.$$

Последним равенствам можно удовлетворить только, если $\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(2)}$.

При этом же условии будет $A_0 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2} = \frac{\alpha_0^{(2)}}{2} = \frac{a}{2}$. Определяя же A_n и B_n из систем (27) и подставляя полученные значения в (26), найдем окончательно:

$$(28) \quad u_1 = \frac{a}{2} y + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_n^{(1)} - \alpha_n^{(2)}}{2n\pi} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}}{2n\pi} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right] \cos \frac{n\pi x}{a}.$$

В процессе решения сами собой выявились отмеченные выше особенности задачи Неймана: во-первых, вошла в решение произвольная постоянная B_0 ; во-вторых, мы получили дополнительное условие $\alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)} = 0$. Но это условие означает не что иное, как условие (22) для рассматриваемой задачи. Действительно,

$$\begin{aligned}\alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)} &= \frac{2}{a} \int_0^a \chi_1(x) dx - \frac{2}{a} \int_0^a \chi_2(x) dx = \\ &= \frac{2}{a} \left[\int_{DC} \frac{\partial u_1}{\partial y} dx - \int_{AB} \frac{\partial u_1}{\partial y} dx \right] = -\frac{2}{a} \int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds,\end{aligned}$$

так как по остальным сторонам последний интеграл равен нулю. Итак действительно условие $\alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)} = 0$ равносильно (22).

Задача об определении второй части u_2 может быть поставлена и решена аналогичным образом.

Отметим еще, что методом Фурье можно найти решение задачи и для того случая, когда на одних сторонах дана сама неизвестная функция, а на других ее нормальная производная, а также, когда задана линейная комбинация функции и ее нормальной производной.

Возможность решения основных граничных задач для уравнения Лапласа в случае прямоугольника позволяет во многих случаях получить решение тех же задач и для уравнения Пуассона

$$(29) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Действительно, пусть для определенности речь идет о задаче Дирихле:

$$u = \varphi(s) \text{ на } L.$$

Предположим, что нам удалось найти какое-то частное решение уравнения Пуассона $u_0(x, y)$:

$$\Delta u_0 = f.$$

Введем тогда новую неизвестную функцию

$$u_1(x, y) = u(x, y) - u_0(x, y).$$

Функция $u_1(x, y)$ должна уже удовлетворять уравнению Лапласа, ибо

$$\Delta u_1 = \Delta u - \Delta u_0 = f - f = 0.$$

Граничные условия для u_1 будут, правда, другие, именно если обозначить $f_0(s)$ ту известную функцию, в которую обращается $u_0(x, y)$ на контуре L , то для u_1 получим условие:

$$u_1 = f(s) - f_0(s) = f_1(s) \text{ на } L.$$

Таким образом всегда решение граничной задачи для уравнения Пуассона приводит к нахождению частного его решения и к решению граничной задачи для уравнения Лапласа.

Что касается частного решения $u_0(x, y)$, то его часто бывает легко найти, отыскивая в форме, отвечающей правой части и содержащей неопределенные коэффициенты. Например, если правая часть $f(x, y)$ есть полином n -ой степени, то решение нужно искать в виде полинома $(n+2)$ -ой степени с неопределенными коэффициентами. При этом двум из коэффициентов в членах каждой степени $k \leq n+2$ можно дать произвольные значения, остальные определятся тогда единственным образом. Эта произвольность может быть использована для придания частному решению возможно более простого вида.

Рассмотрим теперь один пример решения задачи Дирихле, именно в случае уравнения Пуассона.

Пример. Задача о кручении прямоугольной призмы.

По теории Сен-Венана задача о кручении любого призматического тела, сечение которого — область D , ограниченная контуром L , — приводится к следующей граничной задаче: найти решение уравнения Пуассона

$$(30) \quad \Delta u = -2,$$

обращающееся в нуль на контуре L :

$$(31) \quad u = 0 \text{ на } L.$$

При этом основные величины, требующиеся для расчета, выражаются через функцию u (ее называют функцией напряжения) следующим образом:¹

компоненты касательного напряжения

$$(32) \quad \tau_{xz} = G\vartheta \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -G\vartheta \frac{\partial u}{\partial x},$$

а момент при кручении

$$(33) \quad M = 2G\vartheta \iint_D u \, dx \, dy.$$

Здесь ϑ угол поворота, отнесенный к единице длины, а G модуль сдвига.

Дадим теперь решение задачи о кручении для прямоугольника со сторонами a и b . Мы должны найти решение уравнения (30), обращающееся в нуль на контуре. Чтобы свести дело к решению уравнения Лапласа, ищем частное решение u_0 уравнения (30).

Решение ищем в виде $u_0 = Ax^2 + By^2$. Подставляя его в упомянутое уравнение, получаем:

$$2A + 2B = -2.$$

Проще всего принять $A = -1$ и $B = 0$. Кроме того к полученному

¹ См. Геккелер. Статика упругого тела, стр. 17. Дальнейшие ссылки — там же. Физическое значение функции u таково. Если перемещения в направлении оси Z есть $w = \vartheta \varphi(x, y)$ и если ψ функция, сопряженная с φ , т. е. такая, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, то $u = \psi - \frac{x^2 + y^2}{2}$.