

**Методы расчета
аэродинамических
характеристик профилей, тел
вращения и систем тел**

Сборник статей

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
М54

М54 Методы расчета аэродинамических характеристик профилей, тел вращения
и систем тел: Сборник статей / – М.: Книга по Требованию, 2013. – 76 с.

ISBN 978-5-458-32171-6

ISBN 978-5-458-32171-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

нием вихрей, и составляет система линейных уравнений, удовлетворяющих условию непротекания в контрольных точках.

Пусть поверхность профиля разбита на n панелей. Тогда число внутренних углов равно $n - 1$. Представим циркуляцию на каждом отрезке в виде полинома степени m (рис. 2):

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 S + \dots + \gamma_m S^m.$$

Число неизвестных составит $m + 1$. Вычислим число уравнений, необходимых для замыкания системы.

Условия непротекания будем выполнять в l точках на каждой панели, следовательно, уравнений будет ln .

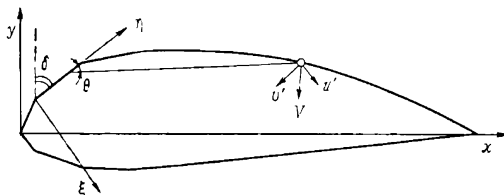


Рис. 1

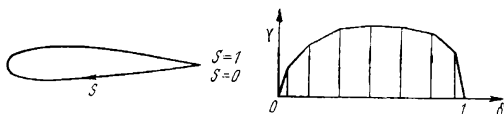


Рис. 2

На внутренних границах отрезков потребуем гладкости для плотности циркуляции вплоть до k -й производной, это даст $(k + 1)(n - 1)$ уравнений.

Условие Жуковского на задней кромке ($\gamma = 0$ при $S = 0$ и $S = 1$) даст еще два уравнения. Всего будем иметь $ln + (k + 1)(n - 1) + 2$ уравнения.

Условие замкнутости системы уравнений записывается в виде

$$(m + 1)n = ln + (k + 1)(n - 1) + 2,$$

отсюда

$$k + 1 = \frac{(m + 1)n - ln - 2 + (m + 1) + l}{n - 1} = m + 1 - l + \frac{m + 1 - l - 2}{n - 1}.$$

Так как k — целое число, то $m - l - 1 = p(n - 1)$, где p — целое. Тогда

$$k = m - l + p; \quad m - l = p(n - 1) + 1; \quad k = p(n - 1) + 1 + p = pn + 1;$$

$$k = pn + 1; \quad m = l + p(n - 1) + 1.$$

Должно выполняться условие $k \leq m$, поэтому $p \leq l$. При $p \neq 0$ значения k и m пропорциональны n и поэтому велики при $n \rightarrow \infty$. При $p = 0$ значение $k = 1$ и $m = l + 1$, т. е. при $l = 1$ распределение циркуляции по панели должно быть представлено в виде полинома второй степени по S .

Если распределение циркуляции по панели представить в виде линейной функции, как это предлагает Вудвард в своем методе, $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 S$, то $m = 1$, $k = 0$. При удовлетворении условия непротекания только в одной точке на панели число неизвестных равно n , а число

уравнений $n+1$, т. е. при данном виде распределения циркуляции и удовлетворении условия непротекания лишь в одной точке на каждой панели, система линейных уравнений неразрешима.

Для того чтобы система была замкнутой, можно либо добавить одно неизвестное (вихрь или источник неизвестной интенсивности), либо не удовлетворить условию непротекания в одной из контрольных точек и тем самым уменьшить число уравнений. Первый из этих методов дает неудовлетворительную картину распределения давления на профиле. Второй является темой данной работы.

Для решения задачи следующим образом преобразуем координаты (рис. 3):

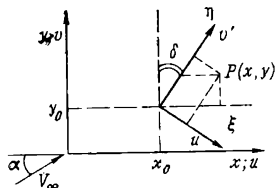


Рис. 3

Сформулируем граничные условия задачи.

Нормальная составляющая скорости набегающего потока в контрольной точке i (см. рис. 3)

$$V'_{ni} = \cos \alpha \cos \delta_i - \sin \alpha \sin \delta_i.$$

Скорости в контрольной точке i , индуцированные всеми вихрями на профиле в стационарной системе координат, имеют вид

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^N [u'_{ij} \cos \delta_j + v'_{ij} \sin \delta_j];$$

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^N [v'_{ij} \cos \delta_j - u'_{ij} \sin \delta_j],$$

где δ_j — угол наклона панели, на которой находится вихревое распределение;

u'_{ij} , v'_{ij} — скорости, индуцированные элементом вихревого распределения j в контрольной точке i в системе координат, связанной с панелью, на которой рассматривается вихревое распределение.

Нормальные составляющие скоростей, индуцированных распределением вихрей, к панели контрольной точки:

$$V''_{ni} = \Delta u_i \cos \delta_i - \Delta v_i \sin \delta_i = \left[\sum_{j=1}^N (u'_{ij} \cos \delta_j + v'_{ij} \sin \delta_j) \right] \cos \delta_i - \left[\sum_{j=1}^N (v'_{ij} \cos \delta_j - u'_{ij} \sin \delta_j) \right] \sin \delta_i.$$

Полная нормальная скорость в точке i

$$V_{ni} = V'_{ni} + V''_{ni} = \cos \alpha \cos \delta_i - \sin \alpha \sin \delta_i + \sum_{j=1}^N u'_{ij} (\cos \delta_i \cos \delta_j + \sin \delta_i \sin \delta_j) + \sum_{j=1}^N v'_{ij} (\cos \delta_i \sin \delta_j - \sin \delta_i \cos \delta_j).$$

Уравнение для граничных условий получается, если принять $V_{ni}=0$:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [u'_{ij} (\cos \delta_i \cos \delta_j + \sin \delta_i \sin \delta_j) + v'_{ij} (\cos \delta_i \sin \delta_j - \sin \delta_i \cos \delta_j)] =$$

$$= \sum_{i=1}^N (\sin \alpha \sin \delta_i - \cos \alpha \cos \delta_i);$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [u'_{ij} \cos (\delta_j - \delta_i) + v'_{ij} \sin (\delta_j - \delta_i)] = - \sum_{i=1}^N \cos (\delta_i + \alpha). \quad (1)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВИХРЕЙ ПО ПАНЕЛИ

Скорость, индуцированная в контрольной точке i бесконечным вихрем j , равна:

$$V = \frac{\Gamma_j}{2\pi d_{ij}}, \quad (2)$$

где Γ_j — интенсивность вихря;

d_{ij} — расстояние между контрольной точкой и точкой нахождения вихря.

В системе координат, связанной с панелью, на которой располагается вихревое распределение (см. рис. 2),

$$u' = V \cos \theta; \quad v' = -V \sin \theta. \quad (3)$$

Распределение циркуляции представляется в виде треугольной области на каждой панели. Суперпозиция таких областей дает искомое распределение плотности циркуляции по поверхности профиля (рис. 4).

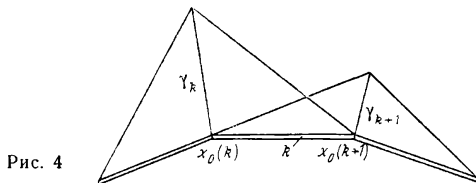


Рис. 4

Для k -й панели размером b_k в любой точке плотность циркуляции имеет вид

$$\gamma_j = \gamma_k \frac{b_k - \eta}{b_k} + \gamma_{k+1} \frac{\eta}{b_k}$$

или

$$\gamma_j = \gamma_k - \gamma_k \frac{\eta}{b_k} + \gamma_{k+1} \frac{\eta}{b_k}. \quad (4)$$

Подставляя значение плотности циркуляции в формулы (2) и (3) и интегрируя по длине вихревой панели, можем определить скорости, индуцированные вихревой панелью k в контрольной точке i в системе координат, связанной с этой панелью:

$$u'_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^b \left[\left(\frac{\cos \theta}{d} - \frac{\eta \cos \theta}{db} \right) \gamma_k + \left(\frac{\eta \cos \theta}{db} \right) \gamma_{k+1} \right] d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} [(u_1 - u_2) \gamma_k + u_2 \gamma_{k+1}]; \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 v'_k &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^b \left[\left(\frac{\sin \theta}{d} - \frac{\eta \sin \theta}{db} \right) \gamma_k + \left(\frac{\eta \sin \theta}{db_k} \right) \gamma_{k+1} \right] d\eta = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} [(v_1 - v_2) \gamma_k + v_2 \gamma_{k+1}].
 \end{aligned} \tag{6}$$

Из рис. 5 видно, что

$$\cos \theta = \frac{y - \eta}{\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}}; \quad \sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}}; \quad d = \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}.$$

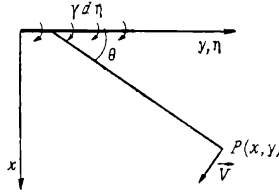


Рис. 5

Тогда

$$u_1 = \int_0^b \frac{y - \eta}{x^2 + (y - \eta)^2} d\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 + (y - b)^2}; \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \int_0^b \frac{\eta(y - \eta)}{b[x^2 + (y - \eta)^2]} d\eta = \frac{x}{b} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{b - y}{x} \right) - 1 + \\
 &\quad + \frac{y}{2b} \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 + (y - b)^2};
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$v_1 = \int_0^b \frac{x}{x^2 + (y - \eta)^2} d\eta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{b - y}{x}; \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \frac{x}{b} \int_0^b \frac{\eta}{x^2 + (y - \eta)^2} d\eta = \frac{x}{2b} \ln \frac{x^2 + (y - b)^2}{x^2 + y^2} + \\
 &\quad + \frac{y}{b} \left(\operatorname{arctg} \frac{b - y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим случай, когда x стремится к нулю. В этом случае выражение (7) преобразуется в следующее:

$$u_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{(y - b)^2}.$$

При $x \rightarrow 0_+$ (y всегда положительный) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}$, при $x \rightarrow 0_-$ $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -\frac{\pi}{2}$. Выражение (9) преобразуется в следующее:

$$v_1 = \pm \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому в контрольной точке панели, на которой рассматривается распределение плотности циркуляции, формулы для определения скоростей будут иметь вид (при $x \rightarrow 0_-$ и $y = \frac{b}{2}$):

$$u_1 = 0; \quad (11)$$

$$u_2 = -1; \quad (12)$$

$$v_1 = -\pi; \quad (13)$$

$$v_2 = -\frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Коэффициенты при неизвестных γ_k в системе, состоящей из линейных уравнений, удовлетворяющих граничным условиям, вычисляются по следующей схеме.

Введем новые переменные

$$u'_1 = \frac{u_1}{2\pi}, \quad u'_2 = \frac{u_2}{2\pi}, \quad v'_1 = -\frac{v_1}{2\pi}, \quad v'_2 = -\frac{v_2}{2\pi},$$

тогда из уравнений (5) и (6) следует:

$$u'_k = [u'_1(i, k) - u'_2(i, k)] \gamma_k + u'_2(i, k) \gamma_{k+1};$$

$$v'_k = [v'_1(i, k) - v'_2(i, k)] \gamma_k + v'_2(i, k) \gamma_{k+1}.$$

Очевидно, что искомые коэффициенты можно определить следующим образом (см. рис. 1):

$$A(i, k) = u'_2(i, k-1) \cos(\delta_{k-1} - \delta_i) + [u'_1(i, k) - u'_2(i, k)] \cos(\delta_k - \delta_i) + \\ + [v'_1(i, k) - v'_2(i, k)] \sin(\delta_k - \delta_i) + v'_2(i, k-1) \sin(\delta_{k-1} - \delta_i),$$

где δ_k — угол наклона панели, на которой находится рассматриваемая вихревая система;

δ_i — угол наклона панели, на которой находится контрольная точка i .

Поверхность профиля разбита на n панелей, но в связи с удовлетворением условия Жуковского на задней кромке, поскольку $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_{n+1} = 0$, с помощью решения системы необходимо определить $n-1$ неизвестных значений γ . Столбец свободных членов определяется как

$$B(i) = -\cos(\delta_i + \alpha),$$

где α — угол атаки.

Пусть l — номер панели, на которой опускается условие непротекания. Тогда система в матричном представлении будет иметь вид:

$$\begin{matrix} i=1 \\ \vdots \\ A_{l-1,2} \dots \\ A_{l+1,2} \dots \\ \vdots \\ i=n-1 \end{matrix} \begin{bmatrix} A_{1,2} & \dots & \dots & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & A_{l-1,2} & \dots & & A_{l-1,n} \\ & A_{l+1,2} & \dots & & A_{l+1,n} \\ & \vdots & & & \vdots \\ A_{n,2} & \dots & \dots & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{l-1} \\ B_{l+1} \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

Решение системы (15) производится методом исключений.

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ

Вудвард [2] не исследовал возможности расчета дозвукового обтекания крыла для случая, когда панели располагаются на верхней и нижней поверхностях, а потому в данной работе изучалось влияние на точность решения таких параметров, как относительная толщина профиля и угол τ между верхней и нижней поверхностями на задней кромке профиля и, кроме того, такой специфический параметр, как расположение по хорде неконтролируемой панели.

Результаты расчетов для всех рассмотренных профилей сравнивались с точными аналитическими решениями обобщенного профиля Жуковского — Чаплыгина, который может быть получен конформным отображением [3]:

$$\frac{z - \sigma a}{z + \sigma a} = \left(\frac{\xi - a}{\xi + a} \right)^\sigma, \quad \sigma = 2 - \frac{\tau}{\pi}.$$

Здесь a — радиус круга, параметр τ — острый угол на задней кромке профиля (рис. 6).

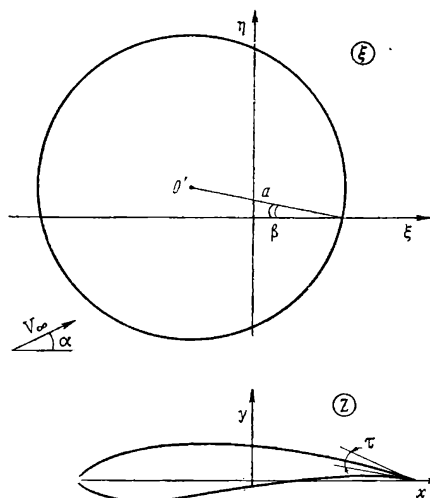


Рис. 6

В первой серии вычислений исследовались варианты с различным числом разбиения профиля на панели: 100, 60, 40 и 30 (рис. 7—10).

$\alpha = 2^\circ$; $N = 100$; $n = 25$; $\tau = 4^\circ$; $a = 1,058$;
 $\beta = 0,04$ рад; $\bar{c} = 0,09$;

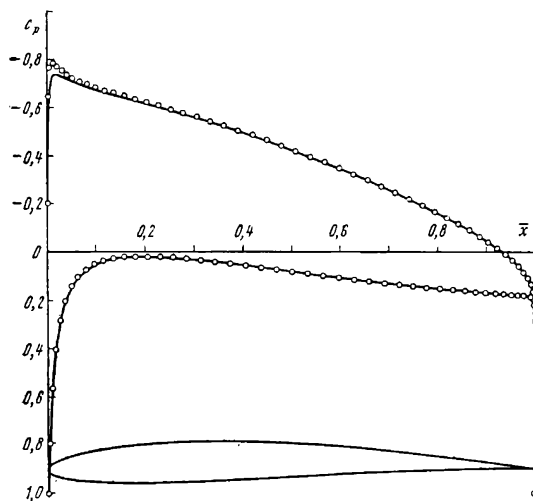


Рис. 7

$\alpha = 2^\circ$; $N = 60$; $n = 15$; $\tau = 4^\circ$; $a = 1,058$;
 $\beta = 0,04$ рад; $\bar{c} = 0,083$

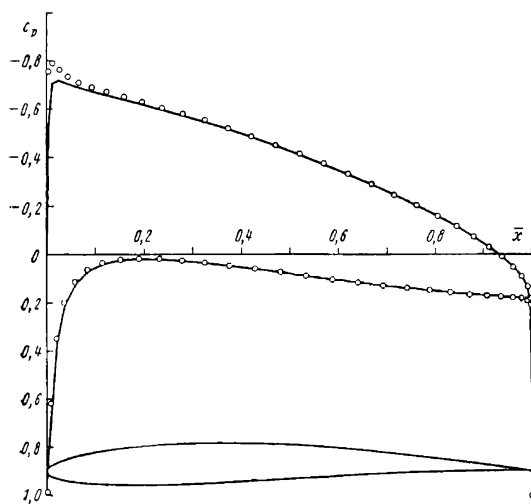


Рис. 8

$\alpha = 2^\circ$; $N = 40$; $n = 10$; $\tau = 4^\circ$; $a = 1,058$;
 $\beta = 0,04$ рад; $c = 0,084$

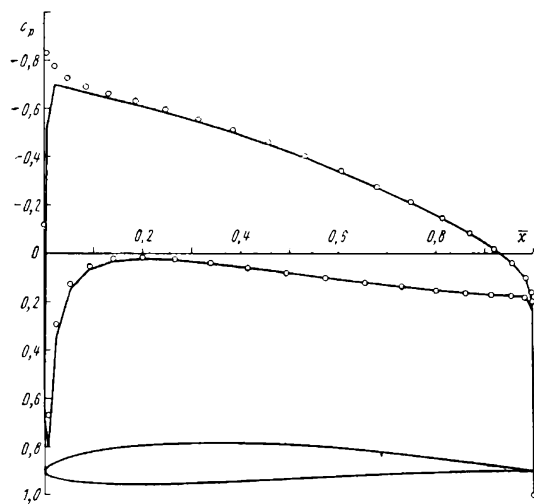


Рис. 9

$\alpha = 2^\circ$; $N = 30$; $n = 7$; $\tau = 4^\circ$; $a = 1,058$;
 $\beta = 0,04$ рад; $c = 0,083$;

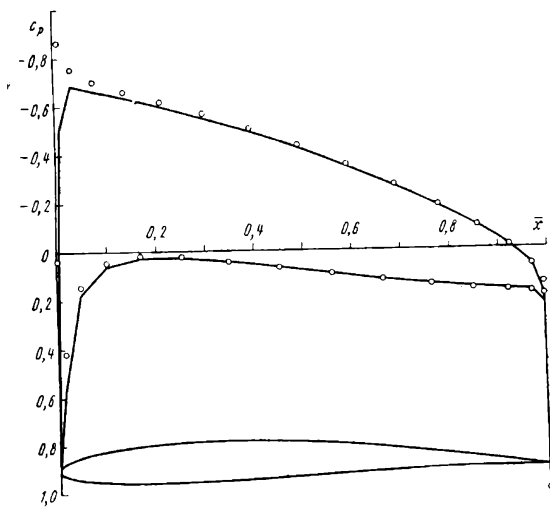


Рис. 10

В каждом из вариантов в контрольной точке каждой из панелей определялся нормальный компонент скорости, индуцированной всем распределением особенностей.

В контрольных точках, в которых удовлетворялось условие непротекания, нормальная скорость была порядка $10^{-10} - 10^{-11} V_{\infty}$. Эта величина не изменялась при изменении угла атаки, относительной толщины профиля и числа панелей. Зависимость нормальной скорости на неконтролируемой панели от положения этой панели по хорде профиля приведена на рис. 11. Из графиков видно, что минимальное значение нормальной скорости достигается на участке $x = 0,3 \div 0,7$: это значение составляет всего 0,0027% скорости набегающего потока при разбиении профиля на 100 панелей, 0,01% — на 60; 0,12% — на 40 и 0,28% — на

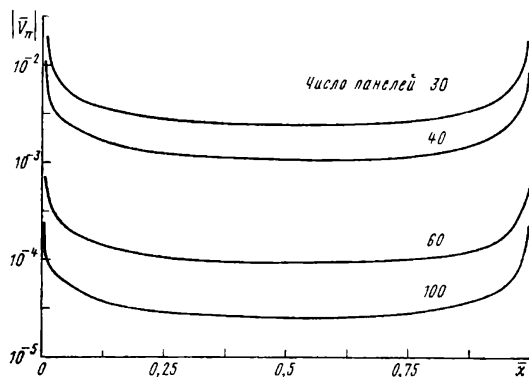


Рис. 11

30 панелей. Эти величины практически не меняются при изменении толщины профиля, угла между нижней и верхней поверхностями на задней кромке, угла атаки. Таким образом, видим, что хотя в контрольной точке неконтролируемой панели не удовлетворялось условие непротекания (не оговаривалась нормальная скорость), все же нормальная скорость в этой точке мала и можно считать, что до известной степени точности на неконтролируемой панели условие непротекания удовлетворяется автоматически.

Во второй серии вычислений исследовалось влияние относительной толщины профиля на точность решения (различия в распределении давления по хорде профиля). Значение относительной толщины варьировалось в пределах от 16 до 2% (рис. 12 и 13). Из графиков видно, что точность решения указанным методом не зависит от относительной толщины профиля.

В третьей серии исследовалось влияние на точность расчетов угла на задней кромке профиля (рис. 14 и 15): Из графиков следует, что хотя рассчитывались профили с углом на задней кромке до нуля, точность решения от этого не уменьшилась.

Далее исследовалось влияние относительной кривизны профиля (рис. 16 и 17). Для расчетов брались профили, близкие к реальным. Относительная кривизна менялась в пределах $\bar{f} = 0 \div 7\%$.

На рис. 18 и 19 показаны результаты расчетов для 9%-ного профиля при углах атаки нуль и 6° . Видно, что точность решения не зависит от угла атаки. Ошибка в определении коэффициента подъем-

$\alpha = 2^\circ; N = 100; n = 25; \tau = 4^\circ; a = 1,113;$
 $\beta = 0,04 \text{ рад}; \bar{c} = 0,16$

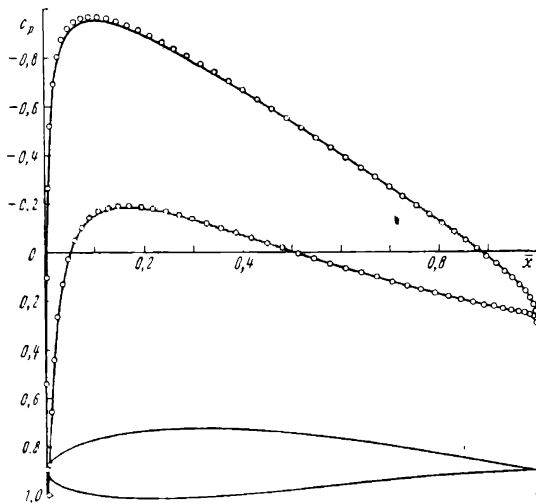


Рис. 12

$\alpha = 2^\circ; N = 100; n = 25; \tau = 4^\circ; a = 1,003;$
 $\beta = 0,04 \text{ рад}; \bar{c} = 0,02;$

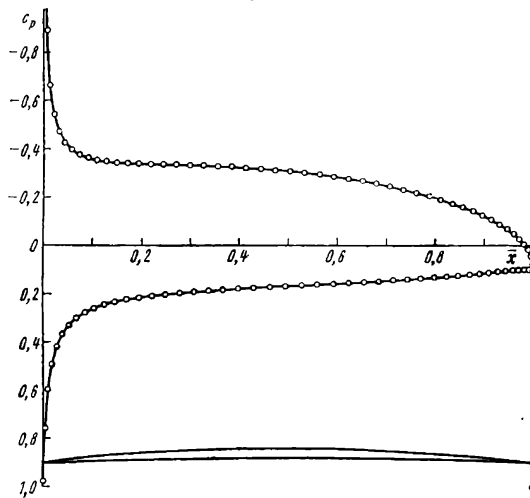


Рис. 13