А.П. Киселёв

Элементарная геометрия

Для средних учебных заведений

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.П. Киселёв

А11 Элементарная геометрия: Для средних учебных заведений / А.П. Киселёв – М.: Книга по Требованию, 2023. – 405 с.

ISBN 978-5-458-25757-2

Для многих математиков, это лучший учебник Киселева. Он выдержал 26 изданий до революции и 16 изданий после революции. В 1937 году учебник был утвержден как стабильный. В этом учебнике Киселев изложил свой собственный, сложившийся со временем опыт преподавания математики, начиная с репетиторских занятий в юные годы и заканчивая многолетней практикой преподавания в кадетских корпусах и реальных училищах.В Журнале Министерства народного просвещения за 1893 год 8 появились положительные рецензии. Автор рецензии (они обычно шли без подписи) отмечает, что "элементарная геометрияА.Киселева составлена с воззрениями на изложение этого предмета, высказанными авторами новейших французских и немецких руководств, в особенности первыми. В ней (в геометрии) нет ничего такого, что бы обнаруживало стремление автора блеснуть оригинальностью, тем не менее она содержит в себе много нового, предназначенного для удовлетворения существующих требований, теоретических и практических".

ISBN 978-5-458-25757-2

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

3. Какъ извѣстно, въ алгебрѣ существуютъ статьи, которыя не могутъ быть строго обоснованы въ элементарномъ курсѣ, но безъ которыхъ этотъ курсъ не обходится (напр., дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами). Въ элементарной геометріи къ такого рода статьямъ относится способъ предѣловъ. Для строгаго доказательства этого способа потребовалось бы ввести въ курсъ геометріи теорію предѣловъ почти въ такомъ размѣрѣ, въ какомъ эта статья проходится въ седьмомъ классѣ реальныхъ училищъ. Чтобы научно обосновать, напримѣръ, нахожденіе предѣла формулы объема усѣченной пирамиды $[V = \frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})]$, слѣдовало бы предварительно установить теоремы о предѣлѣ суммы, произведенія и корня, а для этого, въ свою очередь, пришлось бы ввести нѣкоторыя теоремы о безконечно-малыхъ величинахъ. Само собою разумѣется, что въ такомъ видѣ статья о предѣлахъ не можетъ быть пройдена въ среднихъ классахъ нашихъ учебныхъ заведеній. Съ другой стороны, обойтись совсѣмъ безъ способа предѣловъ въ элементарной геометріи невозможно. По необходимости здѣсь приходится поступиться строгостью изложенія въ пользу его краткости и доступности. Поэтому мы сочли за лучшее, доказавъ двѣ извѣстныя теоремы о предѣлахъ, указать затѣмъ безъ доказательства основной принципъ способа предѣловъ, состоящій въ томъ, что равенство, вѣрное при всевозможныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, остается вѣрнымъ и тогда, когда вмѣсто перемѣнныхъ подставимъ ихъ предѣлы.

4. Въ большинствѣ русскихъ оригинальныхъ учебниковъ геометріи теоремы о равенствѣ несоизмѣримыхъ отношеній доказываются отъ противнаго. Мы предпочли другой путь. Прежде чѣмъ доказывать равенство, необходимо точно установить, что разумѣется подъ этимъ терминомъ. Если же поставимъ вопросъ, что такое равенство несоизмѣримыхъ отношеній, то наиболѣе простой отвѣтъ на него будетъ слѣдующій: несоизмѣримыя отношенія считаются равными, если равны ихъ приближенныя значенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью. Принявъ это предложеніе за опредѣленіе равенства, мы не нуждаемся болѣе въ косвенномъ и тяжеломъ доказательствѣ отъ противнаго; его всегда можно замѣнить прямымъ доказательствомъ, и болѣе простымъ, и болѣе яснымъ.

5. Нѣкоторыя статьи изложены въ предлагаемомъ руководствѣ, какъ кажется, проще, чѣмъ въ распространенныхъ нашихъ учебникахъ. Таковы, напр., статьи: о параллельныхъ прямыхъ, объ отно-

сительномъ положеніи окружностей, о пропорціональныхъ линіяхъ, о правильныхъ многоугольникахъ, о нахожденіи объема всякаго параллелепипеда, о подобіи многоугольниковъ и нѣкоторыя другія. Сравнительная простота достигается нѣкоторымъ измѣненіемъ въ распредѣленіи матеріала, а иногда упрощеніемъ пріемовъ доказательства. Книга снабжена значительнымъ количествомъ упражненій, состоящихъ частію изъ нѣкоторыхъ, не вошедшихъ въ текстъ, но представляющихъ интересъ теоремъ, а главнымъ образомъ изъ задачъ на построеніе и вычисленіе. Въ концѣ планиметріи мы помѣстили *) нѣкоторыя задачи на вычисленіе изъ «Сборника геометрическихъ задачъ для повторительнаго курса планиметріи» г. М. Попруженко. Эти задачи обладаютъ прежде всего тѣмъ достоинствомъ, что онѣ содержатъ много чисто геометрическаго матеріала, а не представляютъ собою только ариѳметическихъ или алгебраическихъ упражненій съ геометрическими данными. Въ концѣ курса, въ видѣ дополненія, мы сочли не лишнимъ приложить небольшую статью о методахъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе съ примѣрами задачъ, рѣшаемыхъ этими методами. Существующіе у насъ сборники подобнаго рода, устрашая учащихся своимъ объемомъ, употребляются ими лишь въ рѣдкихъ случаяхъ. Мы изложили въ самомъ сжатомъ видѣ только главнѣйшіе методы и помѣстили наиболѣе типичныя задачи.

Слѣдуя учебнымъ планамъ гимназій и реальныхъ училищъ, мы помѣщаемъ основныя задачи на построеніе и вычисленіе въ самомъ текстѣ книги непосредственно послѣ тѣхъ теоремъ, на которыхъ основано ихъ рѣшеніе. Въ сокращенномъ видѣ мы указываемъ также сущность приложенія алгебры къ геометріи и построеніе простѣйшихъ алгебраическихъ формулъ.

Считаемъ не лишнимъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Съ точки зрѣнія строгой теоріи къ задачамъ на построеніе возможно приступить только тогда, когда ученики усвоили основныя предложенія объ окружности. Но съ педагогической точки зрѣнія это едва ли было бы удобно: отодвинуть практическія упражненія такъ далеко отъ начала курса значило бы сдѣлать начало геометріи, и безъ того трудное для начинающихъ, еще болѣе сухимъ и тяжелымъ. Мы поступились

*) Съ согласія составителя.

строгостью въ пользу практическаго интереса и помѣстили основныя задачи на построеніе тотчасъ послѣ разсмотрѣнія свойствъ треугольниковъ.

Книга напечатана двумя шрифтами: въ обыкновенномъ изложено все то, что должно быть пройдено въ среднихъ классахъ, въ мелкомъ—то, что желательно дополнить при повтореніи геометріи въ старшемъ классѣ.

Предисловіе къ 21-му изданію.

(1912 г.).

21-е изданіе «Элементарной геометріи» значительно переработано сравнительно съ изданіями предыдущими.

Главнѣйшія измѣненія слѣдующія (перечисляемъ ихъ въ порядкѣ слѣдованія параграфовъ).

1°. Въ началѣ главы «Параллельныя прямыя», раньше опредѣленія такихъ прямыхъ, поставлена вспомогательная лемма (§ 73) о взаимной связи извѣстныхъ 5-и соотношеній между углами, образующимися при пересѣченіи двухъ прямыхъ третьею. Предварительное установленіе этой связи, не представляя собой большой трудности для учащагося, значительно облегчаетъ усвоеніе дальнѣйшей теоріи параллельныхъ прямыхъ. Изложеніе самой этой теоріи тоже отличается теперь отъ прежняго. Такъ, ранѣе опредѣленія параллелизма мы показываемъ (§ 74) возможность существованія такихъ прямыхъ, которыя не пересѣкаются, сколько бы мы ихъ ни продолжали; затѣмъ мы сначала указываемъ признаки параллельности прямыхъ (§ 76), а уже потомъ излагаемъ, въ видѣ обратной теоремы (§ 81), свойства параллельныхъ прямыхъ, а не наоборотъ, какъ это дѣлалось въ предыдущихъ изданіяхъ. Иначе, чѣмъ прежде (болѣе общимъ способомъ) доказывается теорема (§ 77), что «черезъ всякую точку, лежащую внѣ прямой, можно провести параллельную этой прямой»; излагаемый теперь пріемъ доказательства даетъ больше возможности выяснить (§ 78) логическую потребность въ извѣстномъ постулатѣ параллельныхъ прямыхъ (§ 79). Признаки непараллельности прямыхъ (§ 83) изложены теперь нѣсколько подробнѣе, чѣмъ прежде.

Въ концѣ главы о параллельныхъ прямыхъ мы помѣстили теперь (мелкимъ шрифтомъ) добавленіе, могущее, какъ намъ кажется, заинтересовать многихъ любознательныхъ учениковъ: «О постулатѣ параллельныхъ линій»; въ этомъ добавленіи мы даемъ понятіе о важной роли этого постулата, а также и о «не-Эвклидовыхъ» геометріяхъ.

2°. Въ главѣ «Параллелограммы и трапеціи» мы теперь излагаемъ и тѣ теоремы, доказательство которыхъ въ предыдущихъ изданіяхъ предоставлялось самимъ учащимся; таковы, напр., обратныя теоремы: «всякій четыреугольникъ, котораго діагонали дѣлятся пополамъ, есть параллелограммъ» (§ 101), «всякій параллелограммъ, у котораго діагонали равны, есть прямоугольникъ» (§ 105), и т. п.

3°. Въ главѣ «Свойства касательной» болѣе подробно и систематично, чѣмъ прежде, разсматривается относительное положеніе прямой и окружности (§ 135), вслѣдствіе чего дальнѣйшее изложеніе свойствъ касательной упрощается. Въ той же главѣ теперь мы подробно излагаемъ (§ 142) доказательство (которое прежде предоставлялось самимъ ученикамъ) правильности рѣшенія задачи о проведеніи касательныхъ, общихъ двумъ даннымъ окружностямъ.

4°. Въ главѣ «Измѣреніе величинъ» нѣсколько упрощено (§ 156) доказательство теоремы о несоизмѣримости основанія и боковой стороны равнобедреннаго треугольника, у котораго уголъ при основаніи равенъ $^2/_5d$, а также добавлена (мелкимъ шрифтомъ, § 157) классическая теорема о несоизмѣримости діагонали квадрата съ его стороной.

5°. Въ книгѣ III подобіе треугольниковъ отдѣлено отъ подобія многоугольниковъ болѣе, чѣмъ это дѣлалось прежде, причемъ, ранѣе опредѣленій подобія тѣхъ и другихъ, предварительно устанавливается (въ леммахъ §§ 196 и 205), возможность существованія тѣхъ фигуръ, о которыхъ будетъ затѣмъ говориться въ опредѣленіяхъ.

6°. Существенному измѣненію подверглось доказательство теоремы Птоломея. Въ прежнихъ изданіяхъ эта теорема (§ 215 прежнихъ изданій) излагалась мелкимъ шрифтомъ, какъ слѣдствіе изъ формулъ, найденныхъ раньше, путемъ довольно сложныхъ вычисленій, для діагоналей вписаннаго четыреугольника; теперь мы даемъ классическое доказательство (§ 242) этой весьма важной теоремы и излагаемъ ее обыкновеннымъ шрифтомъ. Вычисленіе же діагоналей вписаннаго четыреугольника (оставляя его въ мелкомъ шрифтѣ) мы основываемъ на теоремѣ Птоломея и на другой, добавленной теперь (§ 244), объ отношеніи діагоналей такого четыреугольника.

Нѣкоторымъ измѣненіямъ (и дополненіямъ) подверглись также теоремы о пропорціональныхъ линіяхъ въ кругѣ (§§ 246, 247, 248, 249).

7°. Нѣсколько измѣнено изложеніе опредѣленія длины окружности и ея частей (§ 286) и упрощено доказательство теоремы (§ 288), что «длина дуги больше стягивающей ее хорды, но меньше всякой ломаной линіи, описанной около этой дуги и имѣющей съ нею одни и тѣ же концы».

8°. Существенно передѣлано теперь изложеніе теоремы: «площадь прямоугольника равна произведенію его основанія на высоту» (§ 305). Въ предыдущихъ изданіяхъ доказательство этой теоремы основывалось на двухъ предварительныхъ леммахъ объ отношеніи площадей прямоугольниковъ, причемъ приходилось перемножать между собою двѣ пропорціи, сокращая послѣдующій членъ одной пропорціи съ предыдущимъ членомъ другой, т.-е. приходилось скрытымъ образомъ предполагать, что площади, представляющія собою эти члены, уже выражены числами. Теперь мы даемъ прямое, болѣе строгое и вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе ясное, доказательство этой теоремы и только, какъ слѣдствіе изъ нея, выводимъ (§ 306) заключеніе объ отношеніи площадей двухъ прямоугольниковъ.

9°. Въ началѣ главы «Площади многоугольниковъ» мы помѣстили замѣчаніе (мелкимъ шрифтомъ, § 301), указывающее на важный вопросъ, возникающій относительно основныхъ допущеній о площадяхъ, а также дали наглядное понятіе о томъ (§ 303), что слѣдуетъ разумѣть подъ числомъ, измѣряющимъ какую-нибудь данную площадь въ квадратныхъ единицахъ.

10°. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, не ограничиваясь обычнымъ доказательствомъ равновеликости фигуръ, мы дали дополнительное замѣчаніе о возможности разложенія этихъ фигуръ на соотвѣтственно конгруентныя части (въ § 309—о превращеніи параллелограммовъ, въ § 312—о превращеніи треугольника въ прямоугольникъ и въ § 315—о превращеніи трапеціи въ прямоугольникъ).

11°. Для большей наглядности мы привели третье доказательство теоремы Пиѳагора (§ 321), показывающее, какъ разложить сумму квадратовъ, построенныхъ на катетахъ, на такія части, изъ которыхъ, перемѣщеніемъ ихъ, можно образовать квадратъ, построенный на гипотенузѣ.

12°. Въ стереометріи, въ главѣ «Перпендикуляръ и наклонныя», ради бо́льшей систематичности, мы помѣстили теперь и ту теорему (изъ точки, взятой внѣ плоскости, можно опустить на эту плоскость перпендикуляръ), которая въ предыдущихъ изданіяхъ отрывалась отъ родственной ей теоремы (изъ точки, взятой на плоскости, можно возставить къ этой плоскости перпендикуляръ), и доказывалась позже, въ концѣ главы о параллельныхъ прямыхъ.

13°. Извѣстное предложеніе о трехъ перпендикулярахъ, которое прежде излагалось нами, какъ лемма (§ 321 прежнихъ изданій), теперь поставлено въ видѣ самостоятельной теоремы въ концѣ главы о перпендикулярѣ и наклонныхъ (§ 359).

14°. Изложеніе главы «Объемъ призмы и пирамиды» измѣнено теперь въ соотвѣтствіи съ измѣненіемъ главы о площадяхъ; такъ, объемъ прямоугольнаго параллелепипеда находится непосредственно, а не на основаніи двухъ леммъ объ отношеніи объемовъ, какъ это дѣлалось прежде.

Мы перечислили только главнѣйшія измѣненія, сдѣланныя въ 21-мъ изданіи. Есть много другихъ болѣе мелкихъ отличій, введенныхъ главнымъ образомъ съ цѣлью достигнуть бо́льшей ясности изложенія или бо́льшей точности въ формулировкѣ опредѣленій и теоремъ.

Кромѣ того, частью съ цѣлью выполнить всѣ требованія офиціальныхъ программъ, а главнымъ образомъ съ цѣлью удовлетворить любознательность учениковъ, мы ввели и нѣкоторые новые параграфы и даже цѣлыя главы; напр., о симметріи фигуръ (§§ 33, 102, 109, 264), о постулатѣ параллельныхъ линій (§§ 91—95), о признакахъ, необходимыхъ и достаточныхъ (§ 187), о фигурахъ, подобно расположенныхъ (гомотетія §§ 211—218), объ однородности уравненій, получаемыхъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ (§ 342), о построеніи корней квадратнаго уравненія (§ 343), опредѣленіе проэкціи прямой на плоскость (§ 394) и нѣкоторые другіе.

Предисловіе къ 22-му изданію.

Приступая *къ 22-му изданію*, мы тщательно просмотрѣли изложеніе предыдущаго изданія съ цѣлью устранить всѣ замѣченныя опечатки, а также и неточности, неясности или шероховатости слога. При этомъ, для бо́льшей полноты или для достиженія бо́льшей ясности и бо́льшей строгости изложенія, пришлось сдѣлать нѣкоторыя небольшія измѣненія и добавленія (послѣднія, главнымъ образомъ, въ мелкомъ шрифтѣ). Укажемъ главнѣйшія изъ нихъ.

Къ § 35 сдѣлана выноска, въ которой разъясняется, что конгруенція на плоскости различается двухъ родовъ: прямая и не-прямая.

Въ § 130 добавлены 2 слѣдствія, представляющія собою предложенія, обратныя теоремѣ 1° этого параграфа. Въ нихъ встрѣчается надобность при доказательствѣ теоремы 2° (обратной) § 138, введенной для обоснованія содержащагося въ § 258 построенія правильнаго описаннаго многоугольника, стороны котораго параллельны сторонамъ правильнаго вписаннаго многоугольника.

Въ выноскѣ къ § 224 указано иное отложеніе прямыхъ *a*, *в* и *c*, къ которымъ отыскивается 4-ая пропорціональная.

Равнымъ образомъ, въ выноскѣ къ § 255, 3° указывается другой способъ построенія 3-й пропорціональной.

Въ концѣ того же § 255 добавлена выноска, въ которой говорится о невозможности рѣшенія помощью циркуля и линейки задачи об удвоеніи куба.

Въ § 301 добавлены два замѣчанія (2° и 3°), въ которыхъ разъясняется, что равновеликость фигуръ можетъ быть двоякаго рода: равновеликость «по разложенію» и равновеликость «по дополненію».

Къ § 433 добавлена выноска о томъ, что равновеликость двухъ пирамидъ, имѣющихъ равновеликія основанія и равныя высоты, не можетъ быть сведена ни на равновеликость «по разложенію», ни на равновеликость «по дополненію».

Изложеніе §§ 299 и 300 («Основныя допущенія о площадяхъ») теперь нѣсколько болѣе систематизировано; то же самое сдѣлано и относительно изложенія соотвѣтствующихъ §§ 422 и 423 объ объемахъ.

Измѣнено изложеніе конца § 429 съ цѣлью подробнѣе, чѣмъ было прежде, выяснить, что отрѣзокъ KS представляетъ собою высоту параллелепипеда.

Весьма многіе чертежи для 22-го изданія передѣланы вновь съ цѣлью ихъ улучшенія.

23-е изданіе существенно не отличается отъ изданія 22-го; лишь въ немногихъ мѣстахъ нѣсколько улучшено изложеніе (напр., о перпендикулярѣ и наклонныхъ, §§ **59,**$_1$, **59,**$_2$ и **60**), или сдѣланы небольшія добавленія (напр., § **160,**$_2$ „О пропорціи“).

ВВЕДЕНІЕ.

Математическія предложенія.

1. Во всякой математической наукѣ могутъ встрѣтиться слѣдующія предложенія:

Опредѣленія. Такъ называютъ предложенія, въ которыхъ разъясняется, какой смыслъ придаютъ тому или другому выраженію или названію. Наприм., въ ариѳметикѣ мы встрѣчаемъ опредѣленія наименьшаго кратнаго, общаго наибольшаго дѣлителя и т. п.

Аксіомы. Такъ называютъ истины, которыя, вслѣдствіе своей очевидности, принимаются безъ доказательства. Таковы, напр., предложенія:

Если двѣ величины равны порознь одной и той же третьей величинѣ, то онѣ равны и между собою.

Если къ равнымъ величинамъ придадимъ поровну, или отъ равныхъ величинъ отнимемъ поровну, то равенство не нарушится.

Если къ неравнымъ величинамъ придадимъ поровну, или отъ неравныхъ величинъ отнимемъ поровну, то смыслъ неравенства не измѣнится, т.-е. бо̀льшая величина останется бо̀льшей.

Теоремы. Такъ называются предложенія, которыхъ истинность обнаруживается только послѣ нѣкотораго разсужденія (доказательства). Примѣромъ можетъ служить ариѳметическая истина: «если сумма цыфръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9».

Слѣдствія. Такъ называются предложенія, которыя составляютъ непосредственный выводъ изъ аксіомы или теоремы. Напр., изъ теоремы: «въ пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ», выводится слѣдствіе: «крайній членъ пропорціи равенъ произведенію среднихъ членовъ, дѣленному на другой крайній».

2. Составъ теоремы. Во всякой теоремѣ можно различить двѣ части: условіе и заключеніе. Условіе выражаетъ то, что предполагается даннымъ; заключеніе — то, что требуется доказать. Напр., въ теоремѣ: «если сумма цыфръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9», условіемъ служитъ первая часть теоремы: «если сумма цыфръ дѣлится на 9», а заключеніемъ — вторая часть: «то число дѣлится на 9»; другими словами, намъ дано, что сумма цыфръ нѣкотораго числа дѣлится на 9, а требуется доказать, что въ въ такомъ случаѣ и само число дѣлится на 9.

Условіе и заключеніе теоремы могутъ иногда состоять изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ условій и заключеній; напр., въ теоремѣ: «если число дѣлится на 2 и на 3, то оно раздѣлится на 6», условіе состоитъ изъ двухъ частей: если число дѣлится на 2 и если число дѣлится на 3.

Полезно замѣтить, что всякую теорему можно подробно выразить словами такъ, что ея условіе будетъ начинаться словомъ «если», а заключеніе — словомъ «то».

3. Обратная теорема. Теоремою, обратною данной теоремѣ, наз. такая, въ которой условіемъ поставлено заключеніе или часть заключенія данной теоремы, а заключеніемъ — условіе или часть условія данной теоремы. Напр., слѣдующія двѣ теоремы обратны другъ-другу:

Если сумма цыфръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9.	Если число дѣлится на 9, то сумма цыфръ дѣлится на 9.

Если одну изъ этихъ теоремъ назовемъ прямою, то другую слѣдуетъ назвать обратною.

Въ этомъ примѣрѣ обѣ теоремы, и прямая и обратная, оказываются вѣрными. Но такъ бываетъ не всегда. Напр., теорема: «если каждое слагаемое дѣлится на одно и то же число, то и сумма раздѣлится на то же число» — вѣрна, но невѣрно обратное предложеніе: «если сумма дѣлится на какое-нибудь число, то каждое слагаемое раздѣлится на него».

4. Противоположная теорема. Теоремою, противоположною данной теоремѣ, наз. такая, которой условіе и заключеніе представляютъ отрицаніе условія и заключенія