

Д.Д. Ефремов

**Новая геометрия
треугольника**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Д11

Д11 **Д.Д. Ефремов**
Новая геометрия треугольника / Д.Д. Ефремов – М.: Книга по Требованию,
2013. – 351 с.

ISBN 978-5-458-27060-1

Данное издание датировано 1902 годом. Книга посвящена геометрии фигур так или иначе связанных с треугольником. Систематическое изложение полученных результатов получило название "новой геометрии треугольника". Книга адресована любителям истории математики.

ISBN 978-5-458-27060-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

ГЛАВА I.

О трансверсальныхъ и прямыхъ Чевы.

1. Сѣкущую или трансверсалью какой-либо фигуры наз. прямая, пересѣкающая эту фигуру.

При пересѣченіи прямой линіи съ прямолинейной фигурой разсматриваются не только точки пересѣченія этой прямой съ сторонами фигуры, но и съ продолженіями ихъ; поэтому, фигура, составленная изъ n прямыхъ (напр. n -угольникъ) пересѣкается прямою въ n точкахъ.

Свойства сѣкущихъ выводятся изъ свойствъ подобныхъ тр-въ.

2. Теорема Валеса. *Если углы двухъ тр-въ попарно равны, то соответственныя стороны ихъ пропорціональны.*

Обратно:

Если стороны тр-въ пропорціональны, то соответственныя углы ихъ попарно равны.

Эта теорема служитъ основаніемъ метода подобія. Доказательство ея общеизвѣстно.

3. Теорема Пифагора. *Квадратъ гипотенузы прямоугольнаго тр-ка равенъ суммѣ квадратовъ его катетовъ.*

Эта теорема даетъ количественное соотношеніе между сторонами прямоугольнаго тр-ка. Доказательство ея, какъ извѣстно, выводится изъ равенства или подобія тр-въ.

4. Условились отрѣзки прямой считать положительными, когда они откладываются въ одну сторону, — и отрицательными, когда они откладываются въ стороны противоположныя. Поэтому, если отрѣзокъ АВ какой-нибудь прямой считается положительнымъ, когда откладывается отъ А къ В, то тотъ-же отрѣзокъ, отложенный отъ В къ А (т. е. ВА) нужно принимать за отрицательный, такъ что $AB = -VA$ (Möbius).

Изъ этого условія слѣдуетъ, что если А, В, С суть три точки на одной прямой, то

$$AB + BC + CA = 0.$$

5. Положеніе сѣкущей относительно тр-ка можетъ быть только двоякое: или 1) сѣкущая пересѣкаетъ двѣ стороны тр-ка и продолженіе третьей, или 2) она пересѣкаетъ продолженіе всѣхъ трехъ сторонъ (не пересѣкая самого тр-ка).

Теорема Менелая (Menelaus). Если стороны тр-ка AB , BC , CA (или ихъ продолженія) пересѣкаются сѣкущей въ точкахъ s , a , b , то

$$\frac{aB \cdot bC \cdot cA}{aC \cdot bA \cdot cB} = 1.$$

Обратно:

Если точки a , b , c , взятія на сторонахъ тр-ка BC , CA , AB , образуютъ отрезки, удовлетворяющіе условію

$$\frac{aB \cdot bC \cdot cA}{aC \cdot bA \cdot cB} = 1,$$

то эти точки лежатъ на одной прямой.

Простейшее доказательство основывается на свойствѣ подобныхъ тр-ъ (2).

6. Обобщеніе этой теоремы представляетъ **Теорема Карно (Carnot)**. Если стороны много-ка (или ихъ продолженія) пересѣкаются прямою, то произведеніе отрезковъ стороны, не имѣющихъ общаго конца, равно произведенію другихъ такихъ-же отрезковъ.

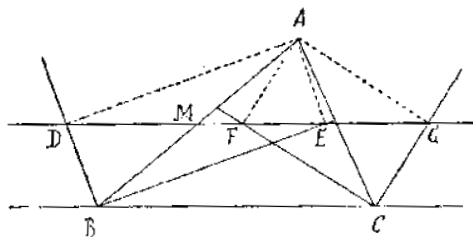
7. **Биссектрисы треугольника.** Прямая, дѣлящая внутренніе или внѣшніе углы тр-ка, наз. *внутренними или внѣшними биссектрисами* этого тр-ка (*bissectrices*).

Внутреннія и внѣшнія биссектрисы тр-ка, проходящія чрезъ одну вершину его, взаимно перпендикулярны.

Теорема. Биссектриса тр-ка (внутренняя или внѣшняя) дѣлитъ противоположную сторону на части, пропорціональныя двумъ другимъ сторонамъ.

Доказательство извѣстно.

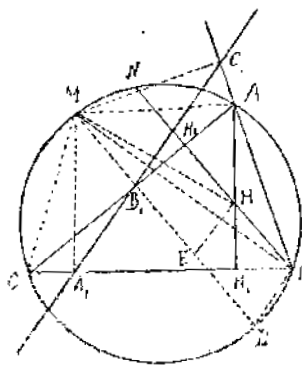
8. **Теорема.** Проекціи вершины одного изъ угловъ тр-ка на четыре биссектрисы (внутреннія и внѣшнія) двухъ другихъ угловъ его находятся на одной прямой.



Фиг. 1.

Пусть D и E , F и G суть проекціи вершины A тр-ка ABC на биссектрисы угловъ его B и C (фиг. 1). Обозначимъ чрезъ M пересѣченіе стороны AB съ прямою DE . Такъ какъ фигура $ADBE$ — прямо угольникъ, то $AM = MB$ и $\angle MED = \angle MBE = \angle EBC$; слѣдов., прямая DE параллельна BC и дѣлитъ пополамъ стороны AB и AC . То же справедливо и для прямой FG ; и потому точки D , E , F , G находятся на одной прямой.

9. Теорема Симсона (Simson). Основания перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь точки окружности на стороны вписаннаго тр-ка, падаются на одной прямой.



Фиг. 2.

Пусть A_1, B_1, C_1 суть основания перпендикуляровъ, опущенныхъ на стороны тр-ка ABC изъ произвольной точки M описанной окружности (фиг. 2).

Изъ подобия тр-въ MC_1B и MB_1C , MA_1B и MB_1A , MA_1C и MC_1A слѣдуетъ, что

$$\frac{CB_1}{BC_1} = \frac{MB_1}{MC_1} = \frac{BA_1}{AB_1} = \frac{MA_1}{MB_1} = \frac{AC_1}{CA_1} = \frac{MC_1}{MA_1};$$

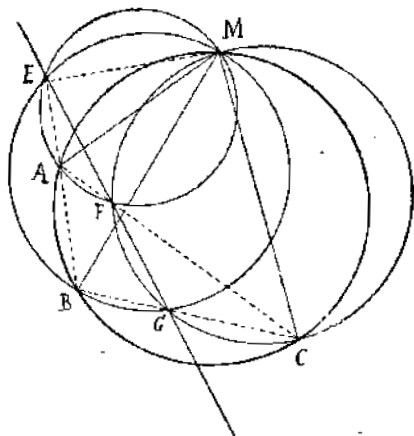
перемноживъ эти пропорціи, получимъ

$$\frac{CB_1 \cdot BA_1 \cdot AC_1}{BC_1 \cdot AB_1 \cdot CA_1} = 1;$$

слѣдов., точки A_1, B_1, C_1 лежатъ на одной прямой (5).

Прямая, проходящая чрезъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на стороны тр-ка изъ какой нибудь точки описанной окружности, наз. прямою Симсона.

10. Теорема Сальмона. (Salmon). Три окружности, имѣющія діаметрами три хорды четвертой окружности, выходящая изъ одной ея точки, попарно пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой.

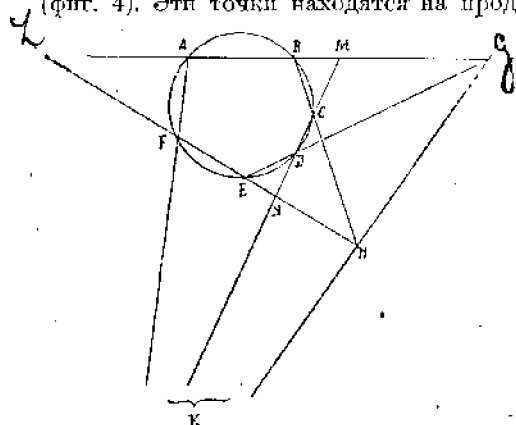


Фиг. 3.

На хордахъ МА, МВ, МС окружности МАВС опишемъ какъ на діаметрахъ три окружности и обозначимъ вторыя точки пересѣченія ихъ чрезъ Е, F, G. Соединивъ точку Е съ А и В и замѣтивъ, что углы МЕА и МЕВ прямые, заключаемъ, что Е есть основаніе перпендикуляра изъ М на сторону АВ тр-ка АВС; подобнымъ-же образомъ, точки F и G суть основанія перпендикуляровъ изъ М на стороны АС и ВС того-же тр-ка; слѣдов. (9), точки Е, F, G лежатъ на одной прямой.

11. Теорема Паскаля (Pascal). Точка пересѣченія противоположныхъ сторонъ вписаннаго въ кругъ шестигульника лежатъ на одной прямой.

Обозначимъ чрезъ G, H, K точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ вписаннаго въ кругъ шестиугольника ABCDEF. (фиг. 4). Эти точки находятся на продолженныхъ сторонахъ тр-ка



Фиг. 4.

LMN, составленнаго продолженными сторонами AB, CD и EF шестиугольника. Разсматривая прямые BC, DE и FA, какъ стороны этого тр-ка и применяя къ нимъ теорему Менелая (5), найдемъ, что

$$\frac{LG \cdot MK \cdot NH}{MG \cdot NK \cdot LH} = 1;$$

сѣдов., точки G, H и K находятся на одной прямой.

Прямая, проходящая чрезъ точки пересѣченія

противоположныхъ сторонъ вписаннаго шестиугольника, наз. *прямая Паскаля*.

12. Слѣдствіе. Касательныя къ кругу въ вершинахъ вписаннаго въ него тр-ка пересѣкаются съ противоположными сторонами этого тр-ка въ трехъ точкахъ, расположенныхъ на одной прямой.

13. Теорема Чевы (Ceva). Если прямая, соединяющая какую нибудь точку съ вершинами тр-ка ABC, пересѣкаютъ его стороны AB, BC, CA (или продолженія ихъ) въ e, a, b, то отрезки сторонъ, взятые съ ихъ знаками, удовлетворяютъ равенству:

$$\frac{aB \cdot bC \cdot cA}{aC \cdot bA \cdot cB} = -1.$$

Обратно:

Если точки a, b, c, взятые на сторонахъ BC, CA, AB тр-ка ABC, образуютъ отрезки, удовлетворяющіе предыдущему равенству, то прямые Aa, Bb, Cc пересѣкаются въ одной точкѣ.

Для доказательства можно пользоваться теоремой Менелая (5). Прямая, проходящая чрезъ вершины тр-ка, иногда наз. *прямая Чевы* или *сѣканами* (сѣantes. Poulain). Пересѣченія ихъ съ сторонами тр-ка наз. *основаніями*.

14. Слѣдствія. Внутреннія биссектрисы тр-ка пересѣкаются въ одной точкѣ. (Центръ круга вписаннаго въ тр-къ).

Внутренняя биссектриса одного изъ угловъ тр-ка и внѣшнія биссектрисы двухъ другихъ его угловъ, пересѣкаются въ одной точкѣ. (Центръ круга описаннаго въ тр-къ).

Примѣняя для доказательства этихъ теоремъ теорему Чевы, слѣдуетъ имѣть въ виду свойство биссектрисъ (7).

Для всякаго тр-ка существуютъ три вписанныхъ круга; центры ихъ будемъ обозначать чрезъ I_1, I_2, I_3 . Центръ круга, вписаннаго внутри тр-ка, будетъ обозначаться чрезъ I .

15. Медианы тр-ка. Прямая, соединяющая вершины тр-ка съ серединами противоположныхъ сторонъ его, наз. *медианой* этого тр-ка (*medianes*).

Три медианы тр-ка пересекаются въ одной точкѣ.

Точка пересѣченія медианъ тр-ка наз. *центромъ медианъ* или *центромъ тяжести тр-ка*.

Каждая медиана тр-ка дѣлится въ центромъ тяжести такъ, что отрезокъ отъ вершины тр-ка вдвое больше отрезка отъ основанія.

16. Высоты тр-ка. Перпендикуляры изъ вершинъ тр-ка на противоположныя стороны его наз. *высотами* тр-ка.

Высоты тр-ка обратно пропорціональны соответственнымъ сторонамъ его.

Теорема Архимеда. Высоты тр-ка пересекаются въ одной точкѣ.

Если основанія высотъ тр-ка на сторонахъ его BC, CA, AB суть a, b, c , то

$$\frac{Ab}{AB} = \frac{Ac}{AC} = \frac{Bc}{BC} = \frac{Ba}{BA} = \frac{Ca}{CA} = \frac{Cb}{CB};$$

въслѣдствіе этого, теорема является слѣдствіемъ теоремы Чевы (13).

Точка пересѣченія высотъ тр-ка наз. *ортоцентромъ* (*orthocentre, Besant*).

17. Теорема. Прямая, соединяющая вершины тр-ка съ точками касанія вписаннаго или въ него вписаннаго круга, пересекаются въ одной точкѣ.

Пусть стороны тр-ка BC, CA, AB касаются вписаннаго круга (I) въ точкахъ α, β, γ и имѣ вписанныхъ круговъ

$$(I_1) \text{ въ точкахъ } \alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$$

$$(I_2) \text{ " " } \alpha_2, \beta_2, \gamma_2,$$

$$(I_3) \text{ " " } \alpha_3, \beta_3, \gamma_3. \text{ (фиг. 5).}$$

Извѣстно, что

$$A\beta = A\gamma = B\alpha_3 = B\gamma_3 = C\alpha_2 = C\beta_2 = p - a,$$

$$B\gamma = B\alpha = C\beta_1 = C\alpha_1 = A\beta_3 = A\gamma_3 = p - b,$$

$$C\alpha = C\beta = A\gamma_2 = A\beta_2 = B\gamma_1 = B\alpha_1 = p - c,$$

$$A\beta_1 = A\gamma_1 = B\gamma_2 = B\alpha_2 = C\alpha_3 = C\beta_3 = p,$$

гдѣ

$$a = BC, b = CA, c = AB$$

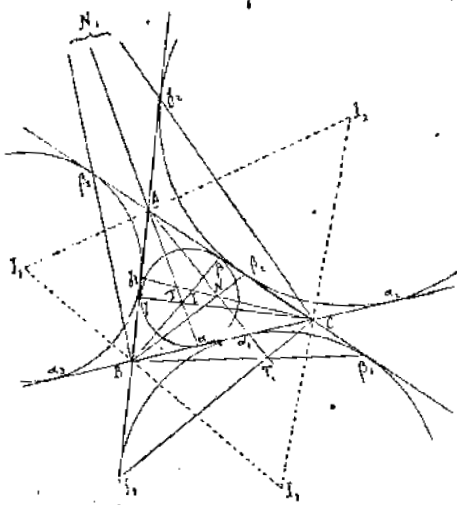
и

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Следовательно, по теоремѣ Чевы (13), прямая

$A\alpha, B\beta, C\gamma$	пересекаются въ одной точкѣ $T,$
$A\alpha_1, B\beta_1, C\gamma_1$	" " " " $T_1,$
$A\alpha_2, B\beta_2, C\gamma_2$	" " " " $T_2,$
$A\alpha_3, B\beta_3, C\gamma_3$	" " " " $T_3.$

Точка T наз. *точкою Жергона* (*point de Gergonne*), а точки T_1, T_2, T_3 наз. *дополнительными точками* (*points adjoints*) Жергона.



Фиг. 5.

18. Изъ предыдущихъ равенствъ (17) слѣдуетъ также, что *прямая, соединяющая вершины т-ка съ точками касанія противоположныхъ сторонъ и въ-описанныхъ окружностей или вписанной и двухъ въ-описанныхъ окружностей, пересекаются въ одной точкѣ.* Импло, прямая

$A\alpha_1, B\beta_2, C\gamma_3$	пересекаются въ одной точкѣ $N,$
$A\alpha, B\beta_3, C\gamma_2$	" " " " $N_1,$
$B\beta, C\gamma_1, A\alpha_3$	" " " " $N_2,$
$C\gamma, A\alpha_2, B\beta_1$	" " " " $N_3.$

Точка N наз. *точкою Навеля* (*Nagel*), а точки N_1, N_2, N_3 —*дополнительными точками Навеля*.

19. Теорема. *Прямая $A\alpha, B\beta, C\gamma$, соединяющая вершины т-ка съ точками касанія описаннаго круга, делятся въ точкѣ Жергона T такъ, что*

$$\frac{AT}{\alpha T} \cdot \frac{BT}{\beta T} \cdot \frac{CT}{\gamma T} = \frac{4R}{r},$$

идеи R и r суть радиусы кругов описанного около тр-ка и вписанного в него.

Рассматривая тр-кт $A\alpha B$, пересеченный прямою $CT\gamma$, получимъ (5):

$$\frac{A\gamma \cdot BC \cdot \alpha T}{B\gamma \cdot \alpha C \cdot \Delta T} = 1;$$

отсюда (17):

$$\frac{\Delta T}{\alpha T} = \frac{A\gamma \cdot BC}{B\gamma \cdot \alpha C} = \frac{a(p-b)}{(p-b)(p-c)};$$

также найдемъ, что

$$\frac{BT}{\beta T} = \frac{b(p-b)}{(p-c)(p-a)} \text{ и } \frac{CT}{\gamma T} = \frac{c(b-c)}{(p-a)(p-b)};$$

следовательно,

$$\frac{AT \cdot BT \cdot CT}{\alpha T \cdot \beta T \cdot \gamma T} = \frac{abc \cdot p}{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

По известному, что, если площадь тр-ка обозначить чрезъ S , то

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \frac{abc}{4R} = p \cdot r; \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{AT \cdot BT \cdot CT}{\alpha T \cdot \beta T \cdot \gamma T} = \frac{4R}{r}.$$

20. Теорема. Если A_1 , B_1 , C_1 суть основания перпендикуляров изъ некоторой точки M на стороны тр-ка BC , CA , AB , то

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{C_1A_1}^2 = \overline{AC_1}^2 + \overline{BA_1}^2 + \overline{CB_1}^2.$$

Дѣйствительно, на основаніи теоремы Пифагора (3), легко найдемъ, что

$$\overline{AB_1}^2 - \overline{CB_1}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{CM}^2,$$

$$\overline{BC_1}^2 - \overline{AC_1}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{AM}^2,$$

$$\overline{CA_1}^2 - \overline{BA_1}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{BM}^2;$$

сложивъ эти равенства, получимъ то, которое слѣдуетъ доказать.

Обратно:

Если на сторонахъ тр-ка BC , CA , AB выбраны три точки A_1 , B_1 , C_1 такъ, что

$$\overline{AB_1}^2 + \overline{BC_1}^2 + \overline{CA_1}^2 = \overline{AC_1}^2 + \overline{BA_1}^2 + \overline{CB_1}^2,$$

то перпендикулярны къ сторонамъ тр-ка въ точкахъ A_1, B_1, C_1 пересекаются въ одной точкѣ.

21. Медиатрисы тр-ка (*Mediatrices*. Neuberg.) Перпендикуляры къ сторонамъ тр-ка, возставленные въ серединахъ ихъ, наз. медиатрисами тр-ка.

Изъ предыдущей теоремы слѣдуетъ, что медиатрисы тр-ка пересекаются въ одной точкѣ O . (Центръ круга описаннаго около тр-ка).

Расстоянія ортоцентра тр-ка отъ вершинъ его вдвое больше расстояній центра описаннаго круга отъ противоположныхъ сторонъ.

22. Теорема. Перпендикуляры на стороны тр-ка изъ центровъ вписанныхъ въ него круговъ пересекаются въ одной точкѣ.

Дѣйствительно, такъ какъ эти перпендикуляры проходятъ чрезъ точки касанія $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ (фиг. 5) названныхъ круговъ, то (17)

$$\begin{aligned} A\beta_2 &= p - c, & B\gamma_3 &= p - a, & C\alpha_1 &= p - b, \\ A\gamma_3 &= p - b, & B\alpha_1 &= p - c, & C\beta_2 &= p - a; \end{aligned}$$

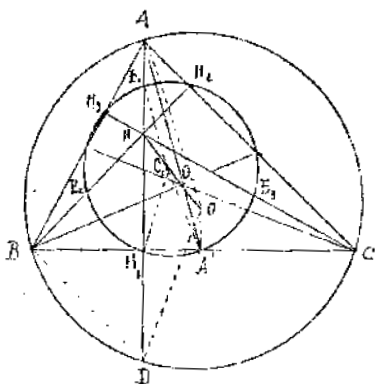
слѣдовательно (20), они пересекаются въ одной точкѣ.

23. Прямая Эйлера (*Euler*). Прямая, проходящая чрезъ ортоцентр тр-ка и центр описаннаго круга, наз. прямою Эйлера.

Теорема. Прямая Эйлера проходитъ чрезъ центр тяжести тр-ка.

Пусть H и O суть ортоцентр и центр описаннаго круга тр-ка ABC (фиг. 6). Опустимъ изъ O перпендикуляръ OA' на сторону BC и обозначимъ чрезъ G пересѣченіе медианы AA' съ прямою Эйлера HO . Такъ какъ тр-ки AGP и $A'GO$ подобны и $AP = 2OA'$ (21), то $AG = 2GA'$; слѣдовательно (15) точка G есть центр тяжести тр-ка.

Слѣствие. Расстояніе центра тяжести тр-ка отъ ортоцентра вдвое больше расстоянія его отъ центра описаннаго круга.



Фиг. 6.

24. Точки Эйлера. (*Points eulériens*. F. J.) Средины отрезковъ высотъ тр-ка отъ вершинъ его до ортоцентра наз. точками Эйлера.

Теорема Эйлера. Основанія высотъ тр-ка (H_1, H_2, H_3), средины сторонъ его (A', B', C') и точки Эйлера (E_1, E_2, E_3) лежатъ на одной окружности.

Соединимъ ортоцентр тр-ка H съ центромъ описаннаго круга O и обозначимъ чрезъ O_1 средину HO и чрезъ R радіусъ описаннаго круга. Продолжимъ

высоту $АН_1$ до пересѣченія въ D съ описанной окружностью, увидимъ, что

$$\angle DBC = \angle DAC = \angle CBH_2;$$

поэтому $ПН_1 = Н_1D$ и $О_1Н_1 = О_1A' = \frac{1}{2}OD = \frac{R}{2}$; а такъ какъ E_1

и O_1 суть середины $АН$ и $НО$, то и $O_1E_1 = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}$. Такимъ

образомъ, точки $Н_1$, A' и E_1 лежатъ на окружности, описанной около O_1 радиусомъ $= \frac{R}{2}$; то же справедливо и для точекъ $Н_2$,

$В$, E_2 , $Н_3$, C' , E_3 .

Изъ доказательства видно, что точки, симметричныя съ ортоцентромъ тр-ка относительно его сторонъ (напр. D), находятся на описанной окружности.

25. Окружность девяти точекъ. Окружность, проходящая чрезъ основанія высотъ тр-ка, середины сторонъ его и точки Эйлера, наз. *окружностью девяти точекъ или окружностью Эйлера*.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что радиусъ окружности Эйлера равенъ половинѣ радиуса круга, описаннаго около тр-ка, а центръ ея находится на прямой Эйлера и дѣлитъ пополамъ разстоянiе между ортоцентромъ и центромъ описаннаго круга.

26. Теорема. *Прямая, соединяющая ортоцентръ тр-ка съ какой либо точкой описанной окружности, дѣлится пополамъ прямою Симсона, соответствующей этой точкѣ.*

Продолжимъ перпендикуляръ $МВ_1$ до пересѣченія съ описанной окружностью въ D (фиг. 2). Не трудно убѣдиться, что прямая Симсона A, B_1, C_1 параллельна BD . Но, отложимъ $B_1E = MB_1$ и продолжимъ $ВН_2$ до пересѣченія съ описанной окружностью въ N , получимъ равнобочную трапецію $MNHE$; такъ какъ трапеція $MNBD$ также равнобочная, то $HE \parallel BD \parallel A_1C_1$; слѣдовательно, прямая Симсона дѣлитъ $МН$ пополамъ.

27. Теорема Гамильтона (Hamilton). *Если H есть ортоцентръ тр-ка ABC , то тр-ки ABC , $АНВ$, $ВНС$ и $СНА$ имѣютъ общую окружность Эйлера.*

Ибо основанiя высотъ тр-ка ABC суть также основанiя высотъ тр-въ $АНВ$, $ВНС$ и $СНА$ (фиг. 6).

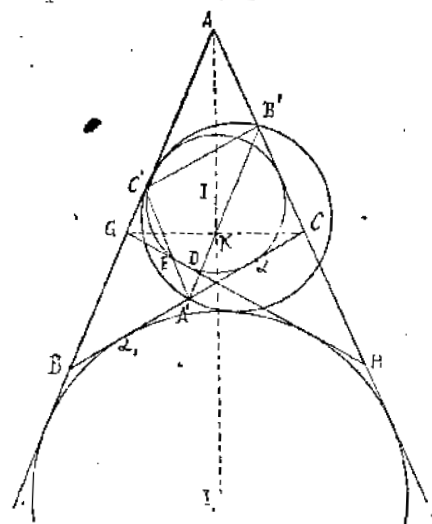
Вершины тр-ка ABC суть ортоцентры тр-въ $АНВ$, $ВНС$, $СНА$.

Радиусы окружностей, описанныхъ около тр-въ ABC , $АНВ$, $ВНС$, $СНА$ равны.

28. Теорема Фейербаха (Feuerbach). *Окружность Эйлера касается окружностей вписанной и невписаннаго съ тр-къ.*

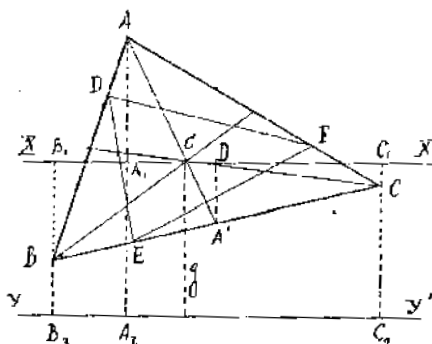
Обозначимъ чрезъ I и I_1 центры вписанной и невписанной окружностей, касающихся стороны тр-ка BC въ α и α_1 ; чрезъ

$A'B'C'$ — средины сторонъ тр-ка; чрезъ D, E — точки пересѣченія второй общей внутренней касательной СП къ окружностямъ I и I_1 съ прямыми $A'B'$ и $A'C'$, и чрезъ K — точку пересѣченія прямыхъ AI, $A'B'$ и CG.



Фиг. 7.

23. Теорема. Если чрезъ центр тяжести тр-ка провести прямую, то сумма разстояній этой прямой отъ двухъ вершинъ тр-ка, находящихся отъ нея по одну сторону, равна разстоянью этой прямой отъ третьей вершины.



Фиг. 8.

Проведемъ прямую $UY' \parallel XX'$ (фиг. 8) и обозначимъ чрезъ g разстоянiе ея отъ центра тяжести G. Опустивъ на эту прямую перпендикуляры AA_2 , BB_2 , CC_2 изъ вершинъ тр-ка, получимъ

$$AA_2 = AA_1 + g, \quad BB_2 = g - BB_1, \quad CC_2 = g - CC_1;$$

Такъ какъ (17) $BA_1 = \alpha$ и $\alpha_1 = AB - AC$, $A'\alpha = A'\alpha_1 =$

$$= \frac{AB - AC}{2} = \frac{BG}{2} = A'K \text{ и}$$

$$\frac{AD}{A'K} = \frac{BG}{BA} = \frac{A'K}{A'B'},$$

то

$$A'D \cdot A'B' = A'K^2 = A'\alpha^2 = A'\alpha_1^2;$$

также и

$$A'E \cdot A'C' = A'K^2 = A'\alpha^2 = A'\alpha_1^2;$$

отсюда легко вывести, что окружность $A'B'C'$ касается окружностей I, I_1 .

Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 суть перпендикуляры изъ вершинъ тр-ка ABC на прямую XX' , проходящую чрезъ центр тяжести G. Если $A'D$ есть перпендикуляр на ту-же прямую изъ середины A' стороны BC, то $BB_1 + CC_1 = 2A'D$; по $A'D = \frac{1}{2} AA_1$ (15); следов. $BB_1 + CC_1 = AA_1$ (фиг. 8).

Слѣдствiе. Сумма разстоянiй вершинъ тр-ка отъ какой нибудь прямой равна удвоенному разстоянью центра тяжести отъ той-же прямой.