

Малинин Александр Федорович

**Руководство прямолинейной
тригонометрии**

Для гимназий

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
А46

А46 **Александр Федорович М.**
Руководство прямолинейной тригонометрии: Для гимназий / Малинин Александр Федорович – М.: Книга по Требованию, 2025. – 72 с.

ISBN 978-5-519-95041-1

ISBN 978-5-519-95041-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2025
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2025

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг — не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель — вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания — решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Введеніе.

Предметъ Тригонометріи есть *рѣшеніе треугольниковъ*. Рѣшить треугольникъ значитъ по достаточному числу данныхъ его частей опредѣлить остальные; такъ, зная длины трехъ сторонъ треуг., найти углы его, по данному периметру и угламъ опредѣлить стороны треуг. и т. под. задачи относятся къ рѣшенію треугольниковъ; необходимо, чтобы въ числѣ данныхъ находилась по крайней мѣрѣ одна сторона или линія, находящаяся въ зависимости отъ сторонъ треуг., напр. высота, радіусъ вписаннаго или описаннаго круга и т. под.; три угла еще не опредѣляютъ треуг., потому что можно представить себѣ безчисленное множество треуг., имѣющихъ равные углы; такіе треуг. называются подобными, и длина сторонъ ихъ остается совершенно произвольною. Такъ какъ треугольники могутъ быть начерчены на плоскости и имѣть сторонами прямыя линіи, или на поверхности шара, при чемъ сторонами ихъ будутъ дуги круговъ, то и Тригонометрія раздѣляется на *прямолинейную* или *плоскую* и *сферическую*. Въ предлагаемомъ руководствѣ изложена только прямолинейная тригонометрія.

Всякій вопросъ, относящійся къ рѣшенію треуг., можетъ быть рѣшенъ двумя способами: или геометрически—построеніемъ, или аналитически—вычисленіемъ. Легко видѣть, что графическій или геометрический способъ не удобенъ и не даетъ точныхъ результатовъ. Положимъ напр., что въ треугольникѣ извѣстна одна сторона = 357,36 саж. и два прилежащіе угла $57^{\circ}38'42''$ и $64^{\circ}18'57''$, и требуется опредѣлить остальные двѣ стороны и уголъ. Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно изъ Начальной Геометріи, должно на произвольной прямой отложить линію, равную (по принятому масштабу) 357,36 саж., потомъ при концахъ ея построить углы въ $57^{\circ}38'42''$ и $64^{\circ}18'57''$, и треугольникъ опредѣлится. Измѣривъ остальные двѣ стороны тѣмъ же масштабомъ, найдемъ длины ихъ въ тѣхъ единицахъ, въ какихъ дана первая сторона. Рѣшеніе, какъ видно, очень простое, но съ тѣмъ

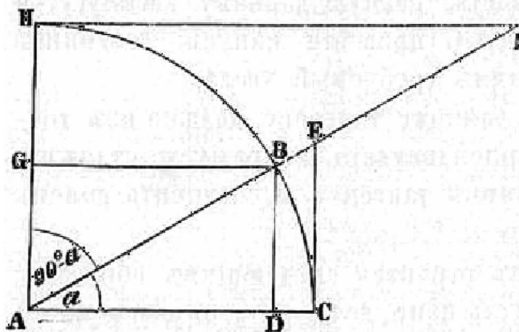
вмѣстѣ весьма не точное. Дѣйствительно, если принять въ масштабѣ сажень за линію, т. е. за $\frac{1}{10}$ дюйма, то пришлось бы отложить на бумагѣ 357,36 линій, что составитъ почти 3 фута; но сотыя части линій нельзя отличить на бумагѣ, поэтому уже при отложеніи стороны мы дѣлаемъ ошибку; углы откладываются по транспортиру; но ни на одномъ транспортирѣ нѣтъ не только секундъ, но большей частью и минутъ; слѣд. опять будутъ ошибки; наконецъ при измѣреніи другихъ сторонъ посредствомъ масштаба опять впадемъ въ погрѣшности; притомъ, еслибы мы при измѣреніи масштабомъ стороны треуг. сдѣлали ошибку, напр. въ одну линію, то въ дѣйствительности ошибка будетъ на одну сажень, такъ какъ мы принимали сажень за линію; по этому ошибка въ окончательномъ результатѣ возрастетъ пропорціонально тому масштабу, который избранъ для черченія; предѣлы погрѣшностей опредѣлять нельзя, такъ какъ они зависятъ и отъ неточности употребляемыхъ инструментовъ и отъ неправильности черченія. Такимъ образомъ видимъ, что графическій способъ даетъ результаты весьма неточные, и рѣшая треугольнички по этому способу, мы не удовлетворимъ главному требованію при рѣшеніи каждой задачи, требованію, состоящему въ томъ, что если искомыя величины опредѣляются неточно, а приближенно, то во всякомъ случаѣ необходимо должна быть извѣстна степень приближенія. И такъ для опредѣленія искомыхъ частей треуг. съ желаемой степенью точности, должно связать данныя съ неизвѣстными посредствомъ вычисленія, путемъ аналитическимъ; нужно вывести уравненія, которыя показывали бы, какія отношенія существуютъ между сторонами и углами треугольника; въ Геометріи уже были показаны нѣкоторые соотношенія между сторонами треугольника или между его углами; такъ напр. извѣстно, что квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ; извѣстно, чему равенъ квадратъ стороны, лежащей противъ остраго или тупаго угла треуг.; извѣстна сумма угловъ треуг. и т. под.; что же касается того, въ какой зависимости находятся углы отъ сторонъ треуг. и обратно, то въ Геометріи извѣстно только, что противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы, что съ увеличеніемъ угла увеличивается и противолѣжащая сторона и обратно; но чтобы опредѣлить, какое именно отношеніе существуетъ между сторонами и углами, нужно вывести уравненія, которыя бы связывали ихъ между собою и выражали ихъ взаимную зависимость; а такіа уравненія не могли быть выведены

въ Геометріи, и именно потому, что углы и стороны суть количества разнородныя; поэтому, чтобъ вывести ихъ, нужно углы и стороны треуг. привести къ одной единицѣ, иначе сказать, нужно показать способъ измѣрять углы не дугами, какъ было показано въ Геометріи, а прямыми линіями. Для этого служатъ особыя линіи, называемыя *тригонометрическими*, которыя мы теперь и будемъ разсматривать.

I. Тригонометрическія величины и ихъ взаимное отношеніе.

§ 1. Возьмемъ произвольный уголъ ВАС (чер. 1) и назовемъ его α ; изъ вершины его А радіусомъ, равнымъ какой нибудь линейной единицѣ, напр. 1 ар., 1 метру и т. д., опишемъ дугу СВ; перпендикуляръ ВD, опущенный изъ конца В этой дуги на радіусъ, проходящій черезъ ея начало С, называется *синусомъ* угла α или дуги ВС; а отръзокъ АD, или *разстояніе* конца синуса отъ

чер. 1.



центра называется *косинусомъ* угла α . Если изъ точки С возставимъ перпендикуляръ къ радіусу АС, то онъ будетъ, какъ извѣстно, касательная къ дугѣ ВС, и отръзокъ ея СЕ между началомъ дуги и продолженнымъ радіусомъ есть *тангенсъ* угла α . Линія АЕ, или радіусъ, продолженный до встрѣчи съ тангенсомъ, называется *секансомъ* угла α . Линія CD, т. е. *разстояніе* между началомъ дуги и концомъ синуса, есть *синусъ версусъ* (обращенный синусъ) угла α . Возставивъ перпендикуляръ изъ А къ линіи АС, получимъ уголъ $\text{ВАН} = 90^\circ - \alpha$; продолжимъ дугу СВ до пересѣченія съ АН и проведемъ тригонометрическія линіи угла ВАН; линія ВG или синусъ угла ВАН равна, какъ видно

1*

по чертежу, AD или косинусу угла a , и обратно AG , косинусу $BAH = BD$, синусу a . — Линія PM или *тангенсъ* BAH называется *котангенсомъ* a ; AM , *секансъ* *дополнительнаго угла*, называется *косекансомъ* a ; HG , *синусъ версусъ* *дополнительнаго угла*, наз. *косинусъ версусъ* a . Такимъ образомъ мы имѣемъ восемь тригонометрическихъ линій: *синусъ*, *косинусъ*, *тангенсъ*, *котангенсъ*, *секансъ*, *косекансъ*, *синусъ версусъ*, *косинусъ версусъ*. Они обозначаются слѣдующимъ образомъ:

$$BD = \sin a, \quad AD = \cos a,$$

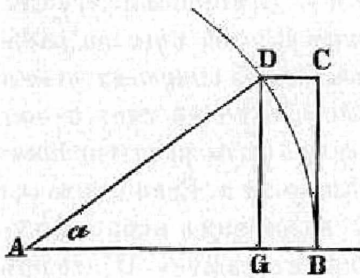
$$CE = \operatorname{tg} a, \quad HM = \operatorname{tg}(90^\circ - a) = \operatorname{ctg} a,$$

$$AE = \sec a, \quad AM = \sec(90^\circ - a) = \operatorname{csc} a,$$

$$DC = \sin v a, \quad HG = \sin v(90^\circ - a) = \operatorname{csc} v a.$$

§ 2. Каждая изъ этихъ тригонометрическихъ линій опредѣляетъ уголъ; положимъ напр., что $\sin a = \frac{2}{3}$; чтобъ построить уголъ a , проводимъ произвольную линію и изъ какой нибудь ся точки A (чер. 2) радиусомъ $AB = 1$ опишемъ дугу; изъ B возставимъ

чер. 2.



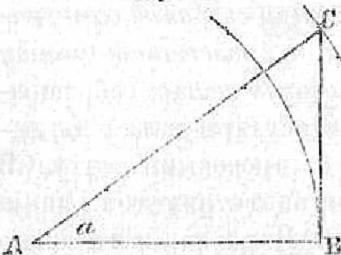
перпендикуляръ $BC = \frac{2}{3} AB$; проведемъ изъ C линію CD параллельно AB и соединивъ точку D съ A , получимъ уголъ DAB , котораго $\sin = \frac{2}{3}$. Если бы хотѣли построить уголъ по данному косинусу, то, описавши дугу радиусомъ, равнымъ единицѣ, должно отъ центра A отложить на радиусѣ часть, равную данному косинусу, и изъ G провести синусъ; соединивъ

точку D съ центромъ, получимъ требуемый уголъ.

Чтобъ построить уголъ по данному тангенсу, должно изъ точки B (чер. 2) возставить перпендикуляръ къ радиусу, отложить на немъ часть, равную величинѣ тангенса, и соединить конецъ тангенса съ центромъ.

По данному секансу уголъ строится слѣдующимъ образомъ:

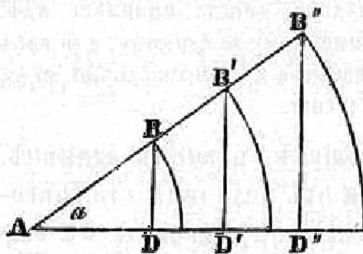
чер. 3.



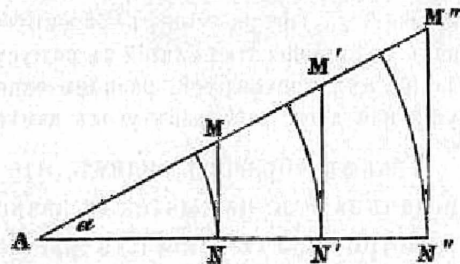
пусть напр. $\sec a = 1\frac{1}{2}$; описавъ изъ A (чер. 3) дугу радиусомъ, равнымъ единицѣ, проводимъ изъ B перпендикуляръ къ AB ; потомъ изъ A радиусомъ $= 1\frac{1}{2}$ опишемъ дугу; соединивъ точку C съ центромъ, получимъ уголъ, котораго $\sec = 1\frac{1}{2}$.

§ 3. Такимъ образомъ мы видимъ, что зная длину $\sin$, $\cos$, tg ... при радиусѣ $= 1$, мы можемъ опредѣлить уголъ; но если бы длина радиуса была произвольная, то однимъ $\sin$, $\cos$... мы не могли бы опредѣлять угла, потому что, принимая вершину угла за центръ, можно описать множество дугъ и слѣд. провести множество $\sin$, tg и т. д., какъ это и видно на чер. 4 и 5; такъ что если намъ скажутъ, что $\sin$ угла $= 2$ фут., то мы не можемъ опредѣлить, какому углу принадлежитъ этотъ синусъ; точно также нельзя опредѣлять угла, котораго тангенсъ равенъ 3 арш., потому что можно

чер. 4.



чер. 5.



представить себѣ безчисленное множество угловъ, которые, при различныхъ радиусахъ, будутъ имѣть такой $\sin$ или tg . Но если, кромѣ длины какой нибудь тригонометрической линіи, будетъ извѣстна еще и длина радиуса, то этого будетъ уже слишкомъ много для опредѣленія угла, потому что при этомъ опредѣлится не только уголъ, но и цѣлый треугольникъ; для опредѣленія угла достаточно знать только отношеніе какой нибудь тригонометрической линіи къ радиусу. Дѣйствительно изъ подобія треуг. ABD , $AB'D'$, $AB''D''$ (чер. 4) и AMN , $AM'N'$, $AM''N''$ (чер. 5) имѣемъ:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{B'D'}{AB'} = \frac{B''D''}{AB''} = \dots\dots$$

$$\frac{MN}{AN} = \frac{M'N'}{AN'} = \frac{M''N''}{AN''} = \dots\dots \text{ или}$$

$$\frac{\sin a}{r} = \frac{\sin' a}{r'} = \frac{\sin'' a}{r''} = \dots\dots$$

$$\frac{\operatorname{tg} a}{r} = \frac{\operatorname{tg}' a}{r'} = \frac{\operatorname{tg}'' a}{r''} = \dots\dots, \text{ т. е. каждый синусъ,}$$

тангенсъ и т. д. относится къ своему радиусу такъ какъ другой, третій и т. д. синусъ, тангенсъ... относится къ своимъ радиусамъ, или, иначе говоря, *отношеніе каждой тригонометрической линіи къ радиусу есть для каждаго угла величина постоянная*, и этии-то отношеніемъ мы и можемъ опредѣлить величину угла; такъ въ послѣдствіи увидимъ, что если отношеніе синуса къ радиусу $= 1/2$, то уголъ $= 30^\circ$; въ углѣ 45° отношеніе тангенса къ радиусу $= 1$, т. е. тангенсъ равенъ радиусу и т. под. — Обыкновенно полагаютъ радиусъ равнымъ единицѣ, и тогда величины тригонометрическихъ линій выразятся отвлеченными числами; но очевидно, что зная отношеніе тригонометрической линіи къ радиусу, равному единицѣ, легко опредѣлить

длину ея при какойнибудь другой длинѣ радіуса; такъ уголъ 30° при радіусѣ 10 фут. будетъ имѣть синусъ $= 5$ ф.; если $\text{сва} = \frac{1}{2}$, то при $r = 27$ дюй. онъ будетъ $= 18$ дюй. и т. под.; вообще, чтобъ узнать длину тригонометрической линіи даннаго угла при данномъ радіусѣ, должно ея отношеніе или число, показывающее ея длину при $r = 1$ помножить на число, выражающее длину радіуса; а какъ опредѣлить это отношеніе, объ этомъ будетъ сказано въ послѣдствіи.

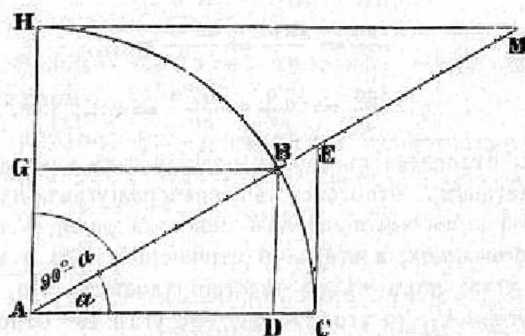
Замѣтимъ, что иногда самыя тригонометрическія линіи, т. е. синусы, косинусы и т. под. наз. *тригонометрическими величинами дуги*, а отношенія ихъ къ радіусу — *тригонометрическими величинами угла*, или *натуральными синусами, косинусами* и т. д. Мы однако не будемъ различать этихъ названій; а говоря синусъ, косинусъ.... будемъ всегда понимать ихъ, какъ отношеніе этихъ линій къ радіусу, принимаемому за единицу, или какъ длины ихъ при радіусѣ, равномъ единицѣ, называя ихъ безразлично sn , cs угла или дуги, такъ какъ уголъ измѣряется дугою.

Такимъ образомъ видимъ, что при радіусѣ, равномъ единицѣ, величина угла находится въ зависимости отъ величины его тригонометрическихъ линій, и мы можемъ поэтому вводить въ вычисленіе углы, употребляя такую же единицу, какъ и для прямыхъ линій; а эту именно цѣль мы и имѣли въ виду.

§ 4. Уравненія $y = \text{sn}x$, $z = \text{tg}x$ опредѣляютъ sn , tg ... дуги x ; на оборотъ, если хотятъ выразить дугу по sn , tg ..., то пишутъ $x = \text{arcsn}y$ ($x = \text{arcus sinus}y$), $x = \text{arctg}z$, т. е. x есть дуга, которой синусъ равенъ y или которой тангенсъ есть z .

§ 5. Разсмотримъ теперь взаимное отношеніе тригонометрическихъ величинъ одной и той же дуги. Изъ прямоугольнаго треуг.

чер. 6.



ABD (чер. 6) имѣемъ: $BD^2 + AD^2 = AB^2$, или $\text{sn}^2\alpha + \text{cs}^2\alpha = 1$ (1), полагая $r = 1$. Изъ подобія треуг. ABD и AEC имѣемъ

$$\frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD}, \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AD}, \quad \text{или} \quad \frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{sna}} = \frac{1}{\operatorname{csa}}, \quad \frac{\operatorname{sca}}{1} = \frac{1}{\operatorname{csa}}, \quad \text{откуда}$$

$$\operatorname{tga} = \frac{\operatorname{sna}}{\operatorname{csa}} \dots\dots (2)$$

$$\operatorname{sca} = \frac{1}{\operatorname{csa}} \dots\dots (3).$$

Изъ треуго. АЕС имѣемъ $AE^2 = AC^2 + CE^2$, или $\operatorname{sc}^2 a = 1 + \operatorname{tg}^2 a \dots\dots (4)$.

По чертежу видно, что $DC = AC - AD$, или $\operatorname{sn} a = 1 - \operatorname{csa} \dots\dots (5)$.

Изъ подобія треуго. АМН и АВГ находимъ: $\frac{MH}{BG} = \frac{AH}{AG}, \quad \frac{AM}{AH} = \frac{AB}{AG}$,

или $\frac{\operatorname{ctga}}{\operatorname{csa}} = \frac{1}{\operatorname{sna}}, \quad \frac{\operatorname{csc} a}{1} = \frac{1}{\operatorname{sna}}$, откуда

$$\operatorname{ctga} = \frac{\operatorname{csa}}{\operatorname{sna}} \dots\dots (6)$$

$$\operatorname{csc} a = \frac{1}{\operatorname{sna}} \dots\dots (7).$$

Изъ треуго. АМН: $AM^2 = AH^2 + HM^2$, или $\operatorname{csc}^2 a = 1 + \operatorname{ctg}^2 a \dots\dots (8)$

$HG = AH - AG$, или $\operatorname{cs} a = 1 - \operatorname{sna} \dots\dots (9)$.

Перемноживъ ур. (2) и (6), найдемъ $\operatorname{tga} \operatorname{ctga} = \frac{\operatorname{sna} \operatorname{csa}}{\operatorname{csa} \operatorname{sna}} = 1$, откуда

$$\operatorname{ctga} = \frac{1}{\operatorname{tga}} \dots\dots (10).$$

§ 6. Предыдущія 10 урав. показываютъ зависимость между тригонометрическими величинами одной и той же дуги; помощью этихъ урав. можно черезъ одну какую нибудь тригонометрическую величину опредѣлить всѣ прочія. Такъ напр. слѣдующія выраженія опредѣляютъ всѣ тригонометрическія величины по синусу:

$$\operatorname{csa} = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 a}, \quad \operatorname{tga} = \frac{\operatorname{sna}}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 a}},$$

$$\operatorname{ctga} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 a}}{\operatorname{sna}}, \quad \operatorname{sca} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 a}},$$

$$\operatorname{csc} a = \frac{1}{\operatorname{sna}}, \quad \operatorname{sn} a = 1 - \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 a},$$

$$\operatorname{cs} a = 1 - \operatorname{sna}.$$

§ 7. Для упражненія учащихся предлагаемъ задачи:

1. Полагая $\operatorname{tg} x = m$, опредѣлить всѣ тригонометрическія величины дуги x чрезъ m .

Отв. $\operatorname{sn} x = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$; $\operatorname{cs} x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ и т. д.

2. Вычислить тригонометрическія величины дуги x , если $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$.

Отв. $\operatorname{sc} x = \frac{5}{4}$ и т. д.

3. Определить $\operatorname{sn} x$ изъ урав. $\operatorname{sn} x \operatorname{cs} x = m$.

Реш. Подставивъ вмѣсто $\operatorname{cs} x$ его выраженіе чрезъ $\operatorname{sn} x$ и возведя въ квадратъ, получимъ урав. 4-й степ., рѣшеніе котораго приводится къ рѣшенію квад. урав., и $\operatorname{sn} x = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-4m^2}}{2}}$.

4. Полагая $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$, определить всѣ тригонометрическія величины дуги x чрезъ m .

Отв. $\operatorname{sn} x = \sqrt{\frac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2m}}$.

5. Определить $\operatorname{cs} x$ изъ урав. $a \operatorname{cs} x + b \operatorname{sn} x = c$.

Отв. $\operatorname{cs} x = \frac{ac \pm b \sqrt{b^2 - c^2 + a^2}}{b^2 + a^2}$.

6. Определить $\operatorname{tg} x$ изъ урав. $\operatorname{cs} x \operatorname{sn} x - \operatorname{sn} x = m$ и $\operatorname{sc} x - \operatorname{cs} x = n$.

Отв. $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{n}{m}}$.

7. Выразить всѣ тригонометрическія величины чрезъ синусъ версусъ.

Отв. $\operatorname{sn} x = \sqrt{\operatorname{sn} v x (2 - \operatorname{sn} v x)}$.

8. Определить $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cs} x$ изъ урав. $\operatorname{sn} x = m \operatorname{sn} z$, и $\operatorname{tg} x = n \operatorname{tg} z$.

Отв. $\operatorname{sn} x = \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2 - 1}}$, $\operatorname{cs} x = \frac{n}{m} \sqrt{\frac{m^2 - 1}{n^2 - 1}}$.

9. Найти, чему равно $a \operatorname{cs} x + b \operatorname{sn} x$, если $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$.

Отв. $\sqrt{a^2 + b^2}$.

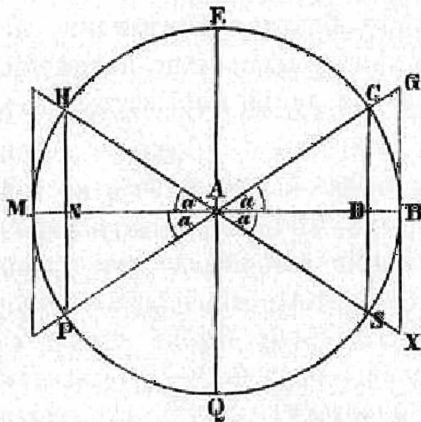
10. Исключить x изъ урав. $\operatorname{cs} x \operatorname{sn} x - \operatorname{sn} x = m$ и $\operatorname{sc} x - \operatorname{cs} x = n$.

Реш. Приводя данныя урав. къ виду $\operatorname{sn}^2 x + m \operatorname{sn} x - 1 = 0$ и $\operatorname{sn}^4 x + n^2 \operatorname{sn}^2 x - n^2 = 0$, определимъ изъ перваго $\operatorname{sn} x$,

и, возведя въ квадратъ, приравняемъ величинѣ $sn^2\alpha$, выведенной изъ втораго уравненія; освободивъ полученныя выраженія, посредствомъ послѣдовательнаго возвышенія въ квадратъ, отъ радикаловъ, получимъ условное уравненіе $1 = m^2 n^2 (m^2 + n^2 + 3)$.

III. Измѣненіе тригонометрическихъ величинъ при измѣненіи дуги отъ 0° до 360° и далѣе.

§ 8. Возьмемъ окружность, описанную радіусомъ, равнымъ единицѣ, и, принявъ какую нибудь ея точку В (чер. 7) за начало дугъ, проведемъ чрезъ В діаметръ, построимъ произвольный уголъ $CAB = \alpha$ и проведемъ его синусъ и тангенсъ; $CD = sn\alpha$, $AD = cs\alpha$, $BG = tg\alpha$. Если уголъ α

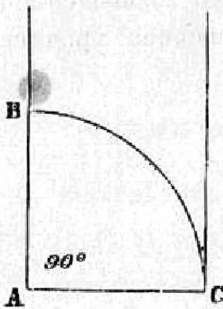


будемъ уменьшать, приближая точку С къ В, то синусъ и тангенсъ его будутъ уменьшаться, а косинусъ увеличиваться; наконецъ, когда уголъ α и дуга СВ обратятся въ нуль, точка С совпадетъ съ В, и слѣдовательно линія CD и GB также обратятся въ нуль, а линія AD обратится въ АВ. И такъ

$$sn0^\circ = 0, cs0^\circ = 1, tg0^\circ = 0.$$

Обратно, при увеличеніи угла α его sn и tg увеличиваются, а cs уменьшается, такъ что когда α обратится въ прямой уголъ, то линія CD сольется съ радіусомъ АЕ, который, будучи перпен-

дикуляромъ къ АВ, и будетъ въ прямомъ угла; косинусъ обратится въ нуль, такъ какъ косинусъ есть, какъ извѣстно, разстояніе между вершиной угла и концомъ $\sin$, а въ данномъ случаѣ эти двѣ точки совпадаютъ. По этому



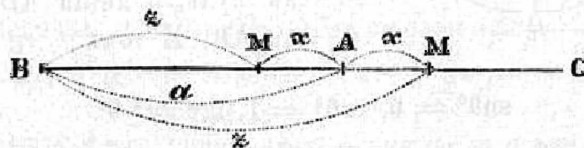
$$\sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0, \tan 90^\circ = \frac{1}{0} = \infty.$$

И дѣйствительно тангенсъ есть отрѣзокъ касательной, заключающійся между началомъ дуги и продолженнымъ радиусомъ; но въ случаѣ прямого угла тангенсъ параллеленъ радиусу АВ (чер. 8), какъ двѣ прямыя, перпендикулярныя къ третьей, и слѣдовательно не можетъ съ нимъ пересѣчься.

Положимъ, что дуга будетъ еще увеличиваться, такъ что точка Е перейдетъ въ Н; если уг. НАМ = α , то ВАН = $180^\circ - \alpha$. Проведемъ синусъ этой дуги; для этого должно изъ конца ея Н опустить перпендикуляръ НН на продолженіе радиуса; онъ будетъ $\sin(180^\circ - \alpha)$, а $АН = \cos(180^\circ - \alpha)$; по чертежу видно, что $НН = \sin \alpha$, $АН = \cos \alpha$, слѣд. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. При этомъ представляется вопросъ: какимъ образомъ отличить уголъ α отъ угла $180^\circ - \alpha$, острый уголъ отъ тупаго, служащаго ему дополненіемъ до двухъ прямыхъ, если $\sin$ и $\cos$ ихъ одинаковы? Для этого должно обратить вниманіе не только на величину $\sin$ и $\cos$, но и на геометрическое положеніе этихъ линий. Геометрическое положеніе линий выражается ихъ знаками.

Возьмемъ какую нибудь прямую линію ВС (чер. 9) и на ней двѣ точки А и В, разстояніе которыхъ АВ пусть будетъ равно α ; положимъ, что извѣстно разстояніе x точки А отъ какой

чер. 9.



нибудь точки М линіи ВС, и мы хотимъ найти разстояніе В отъ той же точки М. Если означить это разстояніе черезъ x , то