

**Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Е. А.  
Гребеников, Демин В.Г., Рябов Ю.А.**

**Справочное руководство по  
небесной механике и  
астродинамике**

**Учебная литература**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 37-053.2  
ББК 74.27я7  
А13

A13 **Абалакин В.К.**  
Справочное руководство по небесной механике и астродинамике: Учебная литература / Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Е. А. Гребеников, Демин В.Г., Рябов Ю.А. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 864 с.

**ISBN 978-5-458-27685-6**

Описание: Настоящее издание является справочным руководством по классической и прикладной небесной механике. Оно существенно отличается от первого издания, увидевшего свет в 1971 году. В данном издании введена новая часть (часть IX), посвященная движению небесных тел около центра масс. Другие разделы небесной механики, охватывающие теорию невозмущенного и возмущенного движений небесных тел, аналитические, численные и качественные методы, значительно расширены и дополнены. В новом изложении представлена часть VI, посвященная теории движения искусственных спутников Земли и теории гравитационного поля Земли, теория движения Луны и качественная небесная механика, составляющая содержание части X. Из предисловия: После выхода в свет первого издания «Справочного руководства» интерес к небесной механике и астродинамике не только не уменьшился, а, наоборот, увеличился и, стало быть, необходимость в подобной справочной литературе возросла. По этой причине первое издание быстро разошлось. Мы отдавали себе отчет в том, что в первом издании не все вопросы небесной механики и астродинамики были достаточно подробно изложены, а некоторые вовсе не излагались. В связи с этим возникла необходимость в переработке и дополнении многих разделов справочника. Во второе издание добавлена новая часть, девятая, Движение естественных и искусственных небесных тел относительно центра масс, написанная В. Г. Деминым. Существенной переработке подверглись все части «Справочного руководства», за исключением первых трех. В части IV добавлена новая глава, посвященная применению методов осреднения в небесной механике. Добавлены теоремы о канонических уравнениях и преобразованиях, уравнения в переменных Лагранжа, приведено более полное (с точностью до четвертых степеней малых величин) разложение в форме Ле-верье возмущающей функции, разложение возмущающей функции, пригодное для любых наклонов. Полностью переработано изложение теории движения Луны (глава 10), добавлены новые данные об эфемериках больших планет на следующее десятилетие.

**ISBN 978-5-458-27685-6**

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



*Часть II***ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ (АКСЕНОВ Е. П.)**

<i>Глава 1. Общая теория невозмущенного кеплеровского движения . . . . .</i>	211
§ 1.01. Постановка задачи. Различные формы дифференциальных уравнений движения . . . . .	211
§ 1.02. Первые интегралы уравнений невозмущенного кеплеровского движения . . . . .	214
§ 1.03. Типы невозмущенного кеплеровского движения . . . . .	216
§ 1.04. Элементы орбиты . . . . .	218
§ 1.05. Формулы, связывающие постоянные интегрирования и элементы орбиты . . . . .	220
<i>Глава 2. Основные формулы невозмущенного кеплеровского движения . . . . .</i>	221
§ 2.01. Эллиптическое движение . . . . .	221
§ 2.02. Круговое движение . . . . .	224
§ 2.03. Гиперболическое движение . . . . .	225
§ 2.04. Параболическое движение . . . . .	227
§ 2.05. Прямоугольное движение . . . . .	229
§ 2.06. Вычисление эфемерид планет и комет . . . . .	230
<i>Глава 3. Разложение координат невозмущенного кеплеровского движения в ряды . . . . .</i>	231
§ 3.01. Разложение функций эксцентрической аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии . . . . .	231
§ 3.02. Разложение функций истинной аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии . . . . .	234
§ 3.03. Первые члены рядов по кратным средней аномалии для некоторых функций . . . . .	235
§ 3.04. Формула Лагранжа . . . . .	236
§ 3.05. Ряды по степеням эксцентриситета . . . . .	237
§ 3.06. Тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии . . . . .	239
§ 3.07. Ряды по кратным истинной аномалии . . . . .	241
§ 3.08. Разложения координат невозмущенного кеплеровского движения в ряды по степеням времени . . . . .	242
§ 3.09. Степенные ряды в случае эллиптического движения . . . . .	244
Литература к части II . . . . .	245

*Часть III***МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УЛУЧШЕНИЯ ОРБИТ (РЯБОВ Ю. А.)**

<i>Глава 1. Вычисление координат невозмущенного кеплеровского движения по элементам орбиты . . . . .</i>	247
§ 1.01. Вычисление орбитальных координат в случае эллиптической или гиперболической орбит . . . . .	247
§ 1.02. Вычисление орбитальных координат в случае параболической орбиты . . . . .	248
§ 1.03. Вычисление орбитальных координат в случае орбит, эксцентриситет которых близок к единице . . . . .	248
§ 1.04. Вычисление гелиоцентрических прямоугольных эклиптических и экваториальных координат . . . . .	249

<i>Г л а в а 2. Определение орбит</i>	250
§ 2.01. Определение гелиоцентрических положений по трем геоцентрическим наблюдениям в случае эллиптической или гиперболической орбит	250
§ 2.02. Особые случаи, встречающиеся при вычислении гелиоцентрических координат	254
§ 2.03. Определение гелиоцентрических положений по четырем геоцентрическим наблюдениям в случае эллиптической или гиперболической орбит	255
§ 2.04. Определение гелиоцентрических положений по трем геоцентрическим наблюдениям в случае параболической орбиты	257
§ 2.05. Вычисление элементов эллиптической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям	260
§ 2.06. Определение элементов гиперболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям	262
§ 2.07. Определение элементов параболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям	263
§ 2.08. Уравнения Ламберта и Эйлера	264
§ 2.09. Определение элементов эллиптической или гиперболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям с помощью уравнения Ламберта	265
§ 2.10. Определение элементов круговой орбиты по двум наблюдениям	268
§ 2.11. Вычисление элементов гелиоцентрической орбиты по положению и скорости в начальный момент	270
<i>Г л а в а 3. Улучшение первоначальной орбиты</i>	273
§ 3.01. Дифференциальное исправление орбит. Постановка задачи	273
§ 3.02. Выражения для производных от координат по элементам (или по функциям элементов)	275
§ 3.03. Условные уравнения, составляемые по наблюдениям долготы и широты небесного тела	281
<i>Г л а в а 4. Определение и улучшение элементов орбит искусственных спутников Земли</i>	283
§ 4.01. Определение элементов орбит ИСЗ по положению и скорости в момент выхода на орбиту	283
§ 4.02. Определение предварительных элементов орбиты ИСЗ по наблюдениям	285
§ 4.03. Улучшение орбит ИСЗ	287
Литература к части III	287
<i>Ч а с т ь IV</i>	
<b>ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ (ГРЕБЕНИКОВ Е. А., РЯБОВ Ю. А.)</b>	
<i>Г л а в а 1. Дифференциальные уравнения движения задачи <i>n</i> тел в координатах</i>	288
§ 1.01. Уравнения абсолютного движения	288
§ 1.02. Уравнение Лагранжа — Якоби	290
§ 1.03. Уравнения движения в барицентрических прямоугольных координатах	291
§ 1.04. Уравнения движения в координатах Якоби	292
§ 1.05. Уравнения относительного движения в прямоугольных координатах	293
§ 1.06. Уравнения движения в идеальных прямоугольных координатах Ганзена	295

§ 1.07. Уравнения абсолютного движения в цилиндрических координатах . . . . .	297
§ 1.08. Уравнения относительного движения в цилиндрических координатах . . . . .	299
§ 1.09. Уравнения абсолютного движения в сферических координатах . . . . .	301
§ 1.10. Уравнения относительного движения в сферических координатах . . . . .	302
§ 1.11. Уравнения движения в полярных координатах Ганзена . . . . .	305
§ 1.12. Уравнения Клеро — Лапласа . . . . .	306
§ 1.13. Общее правило составления канонических уравнений . . . . .	307
§ 1.14. Первая каноническая форма уравнений абсолютного движения . . . . .	309
§ 1.15. Вторая каноническая форма уравнений абсолютного движения . . . . .	310
§ 1.16. Третья каноническая форма уравнений абсолютного движения . . . . .	312
§ 1.17. Первая каноническая форма уравнений относительного движения . . . . .	313
§ 1.18. Вторая каноническая форма уравнений относительного движения . . . . .	314
§ 1.19. Третья каноническая форма уравнений относительного движения . . . . .	316
§ 1.20. Уравнение Гамильтона — Якоби. Метод Гамильтона — Якоби . . . . .	318
§ 1.21. Уравнения движения системы в векторной форме . . . . .	319
<i>Г л а в а 2. Дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения небесных тел . . . . .</i>	321
§ 2.01. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера . . . . .	321
§ 2.02. Силовая функция системы тел . . . . .	323
§ 2.03. Разложение силовой функции двух тел . . . . .	324
§ 2.04. Уравнения поступательно-вращательного движения системы тел в абсолютной прямоугольной системе координат . . . . .	326
§ 2.05. Уравнения поступательно-вращательного движения системы тел в относительной прямоугольной системе координат . . . . .	328
§ 2.06. Каноническая форма уравнений поступательно-вращательного движения системы тел . . . . .	330
<i>Г л а в а 3. Дифференциальные уравнения возмущенного движения тела для различных систем оскулирующих элементов . . . . .</i>	332
§ 3.01. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных . . . . .	332
§ 3.02. Уравнения Ньютона для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай) . . . . .	334
§ 3.03. Уравнения Ньютона для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов . . . . .	336
§ 3.04. Уравнения Лагранжа для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай) . . . . .	337
§ 3.05. Уравнения Лагранжа для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов . . . . .	338
§ 3.06. Уравнения возмущенного движения для канонических элементов Якоби . . . . .	339
§ 3.07. Уравнения возмущенного движения для канонических элементов Делоне . . . . .	340
§ 3.08. Две системы канонических элементов Пуанкаре . . . . .	340
§ 3.09. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа для случая малых эксцентриситетов . . . . .	342
§ 3.10. Уравнения в переменных Лагранжа для случая малых наклонов . . . . .	343
§ 3.11. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа (общий случай) . . . . .	344
§ 3.12. Связь между прямоугольными координатами движущейся точки и различными системами канонических элементов . . . . .	345

<i>Г л а в а 4. Дифференциальные уравнения возмущенного движения задачи п тел для различных систем оскулирующих элементов . . . . .</i>	347
§ 4.01. Уравнения Ньютона для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай) . . . . .	347
§ 4.02. Уравнения Ньютона для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов . . . . .	349
§ 4.03. Уравнения Лагранжа для кеплеровских оскулирующих элементов (общий случай) . . . . .	350
§ 4.04. Уравнения Лагранжа для эллиптических кеплеровских оскулирующих элементов . . . . .	350
§ 4.05. Уравнения возмущенного движения в канонических элементах Якоби . . . . .	351
§ 4.06. Уравнения возмущенного движения в канонических элементах Делоне . . . . .	353
§ 4.07. Две системы канонических элементов Пуанкаре . . . . .	353
§ 4.08. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа для случая малых эксцентриситетов . . . . .	355
§ 4.09. Уравнения в переменных Лагранжа для случая малых наклонов . . . . .	356
§ 4.10. Уравнения возмущенного движения в переменных Лагранжа (общий случай) . . . . .	357
<i>Г л а в а 5. Специальные функции . . . . .</i>	359
§ 5.01. Эллиптические интегралы и эллиптические функции . . . . .	359
§ 5.02. Гипергеометрический ряд и гипергеометрическая функция . . . . .	366
§ 5.03. Полиномы Лежандра. Функции Лежандра . . . . .	368
§ 5.04. Присоединенные функции Лежандра . . . . .	371
§ 5.05. Сферические функции . . . . .	373
§ 5.06. Цилиндрические функции. Функции Бесселя . . . . .	375
§ 5.07. Функции Ламе . . . . .	379
§ 5.08. Полиномы Гегенбауэра. Коэффициенты Лапласа . . . . .	380
§ 5.09. Числа Коши . . . . .	384
<i>Г л а в а 6. Разложение возмущающей функции . . . . .</i>	385
§ 6.01. Разложение возмущающей функции в задаче о движении двух планет (случай круговых орбит) . . . . .	385
§ 6.02. Разложение возмущающей функции в задаче о движении двух планет (случай малых эксцентриситетов и взаимного наклона) . . . . .	390
§ 6.03. Разложение возмущающей функции в случае произвольного взаимного наклона . . . . .	400
§ 6.04. Вековая часть возмущающей функции в двухпланетной задаче . . . . .	402
§ 6.05. Численные методы разложения возмущающей функции . . . . .	404
§ 6.06. Полуаналитический метод Брауэра — Клеменса разложения возмущающей функции . . . . .	405
<i>Г л а в а 7. Аналитические методы вычисления возмущений координат . . . . .</i>	408
§ 7.01. Метод Хилла . . . . .	408
§ 7.02. Метод Ганзена . . . . .	412
§ 7.03. Метод Брауэра . . . . .	415
§ 7.04. Метод Лапласа — Ньюкома . . . . .	419
<i>Г л а в а 8. Аналитические методы вычисления возмущений элементов . . . . .</i>	421
§ 8.01. Общий вид возмущений элементов. Порядок, степень, ранг и класс возмущений . . . . .	421
§ 8.02. Метод Гаусса вычисления вековых возмущений первого порядка . . . . .	422

§ 8.03. Метод Лагранжа определения вековых возмущений в двухпланетной задаче . . . . .	424
§ 8.04. Основы метода Делоне . . . . .	426
§ 8.05. Связь между возмущениями координат и возмущениями элементов . . . . .	430
<b>Г л а в а 9. Методы теории возмущений, основанные на схемах осреднения</b> . . . . .	432
§ 9.01. Основные схемы осреднения возмущающей функции в двухпланетной задаче . . . . .	432
§ 9.02. Уравнения осредненных схем ограниченной круговой задачи трех тел, определяющие промежуточную орбиту (нулевое приближение). Их первые интегралы . . . . .	436
§ 9.03. Разложение возмущающей функции для схем осреднения . . . . .	440
§ 9.04. Основы метода теории возмущений . . . . .	442
<b>Г л а в а 10. Теория движения Луны</b> . . . . .	443
§ 10.01. Уравнения основной проблемы в теории движения Луны . . . . .	444
§ 10.02. Разложение возмущающей функции в основной проблеме теории движения Луны . . . . .	445
§ 10.03. Решение Делоне основной проблемы в теории движения Луны . . . . .	447
§ 10.04. Основные этапы построения теории Хилла — Брауна движения Луны . . . . .	458
§ 10.05. Промежуточная орбита в теории Хилла — Брауна . . . . .	462
§ 10.06. Общее решение уравнений основной проблемы в теории Хилла — Брауна . . . . .	465
§ 10.07. Переход к сферическим координатам . . . . .	467
§ 10.08. Численные значения постоянных интегрирования и параметров в теории Хилла — Брауна . . . . .	468
§ 10.09. Окончательные выражения для долготы $V$ , широты $\beta$ и синуса параллакса $\sin p_L$ , соответствующие решению основной проблемы . . . . .	470
§ 10.10. Возмущения Луны, обусловленные притяжением планет, фигурами Земли и Луны . . . . .	477
§ 10.11. Уточнение теории движения Луны Хилла — Брауна . . . . .	481
<b>Г л а в а 11. Теория движения больших планет</b> . . . . .	484
§ 11.01. Внутренние планеты . . . . .	487
§ 11.02. Внешние планеты . . . . .	493
§ 11.03. Полиномиальное представление оскулирующих элементов орбит внешних планет . . . . .	498
§ 11.04. Полиномиальное представление прямоугольных гелиоцентрических координат Юпитера и Сатурна . . . . .	501
§ 11.05. Тригонометрическая теория вековых возмущений орбит больших планет . . . . .	504
<b>Г л а в а 12. Движение малых тел Солнечной системы</b> . . . . .	508
§ 12.01. Невозмущенное движение спутников . . . . .	509
§ 12.02. Возмущения оскулирующих элементов орбит спутников, вызываемые сжатием планеты . . . . .	510
§ 12.03. Возмущения в движении спутников, вызываемые притяжением Солнца . . . . .	513
§ 12.04. Общие сведения о характере движения малых планет . . . . .	513
§ 12.05. Возмущенное движение малых планет . . . . .	514
§ 12.06. Общие сведения о движении комет . . . . .	517
§ 12.07. Возмущенное движение комет . . . . .	518
<b>Л и т е р а т у р а к ч а с т i V</b> . . . . .	519

*Часть V***ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ (ГРЕБЕНИКОВ Б. А.)**

<i>Г л а в а 1. Неограниченная задача трех тел . . . . .</i>	524
§ 1.01. Равномерные движения трех тел . . . . .	524
§ 1.02. Лагранжевы решения. Точки либрации . . . . .	527
<i>Г л а в а 2. Ограниченнная круговая задача трех тел . . . . .</i>	533
§ 2.01. Дифференциальные уравнения движения. Интеграл Якоби . . . . .	533
§ 2.02. Поверхность нулевой относительной скорости . . . . .	534
§ 2.03. Лагранжевы решения ограниченной круговой задачи трех тел. Точки либрации . . . . .	535
§ 2.04. Различные гравитационные сферы . . . . .	536
§ 2.05. Периодические решения ограниченной круговой задачи трех тел . . . . .	539
§ 2.06. Критерий Тиссерана . . . . .	542
§ 2.07. Уравнения ограниченной круговой задачи в эллипсоидальных переменных . . . . .	542
§ 2.08. Уравнение Гамильтона — Якоби в эллипсоидальных переменных . . . . .	546
§ 2.09. Понижение порядка системы уравнений плоской ограниченной круговой задачи трех тел . . . . .	547
<i>Г л а в а 3. Другие ограниченные задачи трех тел . . . . .</i>	548
§ 3.01. Общий случай ограниченной задачи трех тел . . . . .	548
§ 3.02. Задача двух неподвижных центров . . . . .	549
§ 3.03. Задача Хилла . . . . .	551
Литература к части V . . . . .	552

*Часть VI***ДВИЖЕНИЕ****ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ (АКСЕНОВ Е. П.)**

<i>Г л а в а 1. Гравитационное поле Земли. Дифференциальные уравнения движения искусственного спутника . . . . .</i>	555
§ 1.01. Потенциал притяжения Земли . . . . .	555
§ 1.02. Стандартная Земля . . . . .	559
§ 1.03. Дифференциальные уравнения движения спутника . . . . .	562
§ 1.04. Элементы орбиты ИСЗ. Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов . . . . .	563
<i>Г л а в а 2. Возмущения, вызываемые второй зональной гармоникой геопотенциала . . . . .</i>	565
§ 2.01. Возмущения от второй зональной гармоники как функции средней аномалии . . . . .	565
§ 2.02. Возмущения от второй зональной гармоники как функции истинной аномалии . . . . .	570
§ 2.03. Случай орбит с малыми эксцентриситетами . . . . .	573

<i>Г л а в а 3. Теория промежуточных орбит ИСЗ . . . . .</i>	577
§ 3.01. Задачи Штерна, Гарфинкеля и Акснеса . . . . .	577
§ 3.02. Задача Баррака, Винти и Кислика . . . . .	581
§ 3.03. Обобщенная задача двух неподвижных центров . . . . .	584
§ 3.04. Промежуточная орбита, основанная на обобщенной задаче двух неподвижных центров . . . . .	588
§ 3.05. Дифференциальные уравнения для элементов промежуточной орбиты . . . . .	591
<i>Г л а в а 4. Возмущения гравитационной природы . . . . .</i>	593
§ 4.01. Возмущения от зональных гармоник высших порядков . . . . .	593
§ 4.02. Возмущения от зональной гармоники произвольного порядка . . . . .	597
§ 4.03. Возмущения от тессеральных и секториальных гармоник . . . . .	601
§ 4.04. Лунно-солнечные возмущения . . . . .	603
§ 4.05. Определение постоянных интегрирования . . . . .	607
§ 4.06. Вычисление возмущенных координат спутника . . . . .	608
<i>Г л а в а 5. Возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы и световым давлением . . . . .</i>	609
§ 5.01. Плотность атмосферы . . . . .	609
§ 5.02. Стандартная атмосфера . . . . .	612
§ 5.03. Сила сопротивления атмосферы . . . . .	612
§ 5.04. Основные возмущения от сопротивления атмосферы . . . . .	613
§ 5.05. Продолжительность жизни спутника . . . . .	614
§ 5.06. Эволюция орбиты на больших промежутках времени . . . . .	616
§ 5.07. Сила светового давления . . . . .	617
§ 5.08. Возмущения от светового давления (без учета тени) . . . . .	618
§ 5.09. Возмущения от светового давления (с учетом тени) . . . . .	620
§ 5.10. Теневая функция . . . . .	622
<i>Г л а в а 6. Другие возмущения в движении ИСЗ . . . . .</i>	625
§ 6.01. Возмущения, вызываемые прецесссией и нутацией экваториальной плоскости Земли . . . . .	625
§ 6.02. Возмущения, вызываемые приливной деформацией Земли . . . . .	628
§ 6.03. Релятивистские эффекты. Влияние электромагнитных сил и притяжения атмосферы . . . . .	630
Литература к части VI . . . . .	632
<i>Ч а с т ь VII</i>	
<b>ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ (РЯБОВ Ю. А.)</b>	
<i>Г л а в а 1. Интерполирование и приближение функций . . . . .</i>	635
§ 1.01. Таблица разностей функции . . . . .	635
§ 1.02. Интерполяционные формулы . . . . .	637
§ 1.03. Остаточные члены интерполяционных формул . . . . .	639
§ 1.04. Обратное интерполирование . . . . .	642
§ 1.05. Интерполирование функции двух переменных . . . . .	643
§ 1.06. Приближение функций с помощью сплайнов . . . . .	644
§ 1.07. Среднеквадратичные приближения функций . . . . .	645
§ 1.08. Сглаживание табличных значений функции . . . . .	647
§ 1.09. Равномерные приближения . . . . .	648

§ 1.10. Аппроксимация периодических функций с известным периодом тригонометрическими полиномами по методу наименьших квадратов . . . . .	649
§ 1.11. Аппроксимация условно-периодических функций с известными частотами полиномом Фурье по методу наименьших квадратов . . . . .	650
§ 1.12. Определение неизвестных частот периодической или условно-периодической функции по совокупности табличных данных . . . . .	651
§ 1.13. Выделение «вековой части» функции по совокупности табличных значений . . . . .	653
<b>Г л а в а 2. Численное дифференцирование и интегрирование . . . . .</b>	<b>655</b>
§ 2.01. Численное дифференцирование с помощью интерполяционных формул . . . . .	655
§ 2.02. Другие формулы численного дифференцирования . . . . .	657
§ 2.03. Численное интегрирование функции по таблице ее значений с постоянным шагом . . . . .	658
§ 2.04. Квадратурные формулы Гаусса . . . . .	660
§ 2.05. Численное интегрирование сильно осциллирующих функций . . . . .	663
§ 2.06. Правило Рунге практической оценки погрешности квадратурных формул . . . . .	664
§ 2.07. Квадратурные формулы для несобственных интегралов . . . . .	665
<b>Г л а в а 3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .</b>	<b>667</b>
§ 3.01. Метод Рунге — Кутта . . . . .	668
§ 3.02. Метод Адамса . . . . .	670
§ 3.03. Метод Коузла . . . . .	672
§ 3.04. Метод Штермера (для уравнений второго порядка) . . . . .	673
§ 3.05. Метод Коузла (1-й вариант) . . . . .	674
§ 3.06. Метод Коузла (2-й вариант) . . . . .	675
§ 3.07. Накопление погрешностей при численном интегрировании . . . . .	676
§ 3.08. Метод Энке численного интегрирования уравнений возмущенного движения . . . . .	676
§ 3.09. Общая постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Случай линейной краевой задачи . . . . .	678
§ 3.10. Метод стрельбы при нахождении решения линейной двухточечной краевой задачи . . . . .	679
§ 3.11. Краевая задача для квазилинейной системы с линейными краевыми условиями . . . . .	682
§ 3.12. Краевая задача для системы, близкой к нелинейной невозмущенной системе . . . . .	683
§ 3.13. Применение метода градиентного спуска для решения нелинейной краевой задачи общего вида . . . . .	684
§ 3.14. Разностный метод решений краевых задач . . . . .	687
<b>Г л а в а 4. Метод наименьших квадратов решения алгебраических и трансцендентных уравнений . . . . .</b>	<b>689</b>
§ 4.01. Постановка задачи . . . . .	689
§ 4.02. Линейные и равноточные условные уравнения . . . . .	690
§ 4.03. Вероятностные оценки погрешности решения . . . . .	691
§ 4.04. Неравноточные условные уравнения . . . . .	691
§ 4.05. Линеаризация условных уравнений общего вида . . . . .	692
<b>Литература к части VII . . . . .</b>	<b>693</b>

*Часть VIII***ОПТИМАЛЬНЫЕ  
И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ АСТРОДИНАМИКИ (ГРЕБЕНИКОВ Е. А.)**

<i>Глава 1. Сведения из вариационного исчисления и математической теории оптимальных процессов . . . . .</i>	694
§ 1.01. Понятие функционала . . . . .	696
§ 1.02. Задача Лагранжа. Множители Лагранжа. Уравнения Эйлера . . . . .	698
§ 1.03. Первая формулировка задачи Майера . . . . .	699
§ 1.04. Вторая формулировка задачи Майера . . . . .	699
§ 1.05. Изопериметрическая задача . . . . .	700
§ 1.06. Задача Больца . . . . .	700
§ 1.07. Третья формулировка задачи Майера. Обобщение теоремы Лагранжа. Характеристические уравнения (обобщенные уравнения Эйлера — Лагранжа) . . . . .	701
§ 1.08. Свойство множителей Лагранжа на ломанных экстремалах. Условие Вейерштрасса — Эрдмана . . . . .	703
§ 1.09. Принцип максимума Понтрягина . . . . .	704
§ 1.10. Принцип оптимальности Беллмана . . . . .	706
<i>Глава 2. Основные уравнения динамики тел переменной массы . . . . .</i>	707
§ 2.01. Основное уравнение динамики точки переменной массы (уравнение Мещерского) . . . . .	707
§ 2.02. Обобщенное уравнение Мещерского . . . . .	708
§ 2.03. Уравнения движения тела переменной массы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода) . . . . .	709
§ 2.04. Канонические уравнения движения тела переменной массы . . . . .	709
<i>Глава 3. Некоторые оптимальные задачи динамики полета в околосолнечном пространстве . . . . .</i>	711
§ 3.01. Уравнения движения ракеты. Формула Циолковского . . . . .	711
§ 3.02. Разворнутая форма характеристических уравнений для задачи о движении ракеты . . . . .	714
§ 3.03. Определение базис-вектора и $p$ -траектории. Определение функций переключения . . . . .	715
§ 3.04. Определение импульсной тяги. Точки соединения на оптимальных траекториях . . . . .	717
§ 3.05. Максимизация высоты вертикального подъема ракеты в однородном поле тяжести . . . . .	717
§ 3.06. Максимизация горизонтальной дальности полета ракеты в однородном поле тяжести при заданной программе расхода топлива . . . . .	720
§ 3.07. Общая вариационная задача для движения ракеты в однородном поле тяжести . . . . .	722
§ 3.08. Общая вариационная задача для движения ракеты в однородном поле тяжести при наличии аэродинамического сопротивления . . . . .	723
§ 3.09. Определение оптимальной программы тяги при вертикальном подъеме ракеты в неоднородном поле тяготения в сопротивляющейся атмосфере . . . . .	725
§ 3.10. Задача о максимизации полной энергии космического аппарата . . . . .	726
§ 3.11. Задача о минимизации характеристической скорости маневра . . . . .	728

<i>Г л а в а 4. Межорбитальные перелеты . . . . .</i>	729
§ 4.01. Простейшая краевая задача . . . . .	729
§ 4.02. Уравнение для базиса-вектора на участке нулевой тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения . . . . .	730
§ 4.03. Уравнение для базиса-вектора на участке промежуточной тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения . . . . .	732
§ 4.04. Уравнение для базиса-вектора на участке максимальной тяги при движении ракеты в ньютоновском поле тяготения . . . . .	733
§ 4.05. Метод $p$ -траекторий. Структура оптимальной траектории . . . . .	733
§ 4.06. Связь между величиной импульса и элементами эллиптической орбиты . . . . .	734
§ 4.07. Оптимальный $n$ -импульсный переход между двумя заданными компланарными эллиптическими орбитами . . . . .	735
§ 4.08. Оптимальный переход между двумя компланарными круговыми орбитами . . . . .	737
§ 4.09. Оптимальный переход между двумя соосными орбитами . . . . .	738
§ 4.10. Другие траектории перелета в случае компланарных орбит планет старта и назначения . . . . .	738
§ 4.11. Траектории полета вблизи нескольких планет . . . . .	740
§ 4.12. Начальный этап (запуск и вход) межпланетной траектории . . . . .	743
§ 4.13. Полеты к Луне . . . . .	744
<i>Литература к части VIII . . . . .</i>	748
<i>Ч а с т ь IX</i>	
<b>ДВИЖЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ИСКУССТВЕННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС (ДЕМИН В. Г.)</b>	
<i>Г л а в а 1. Дифференциальные уравнения движения небесных тел относительно центра масс . . . . .</i>	751
§ 1.01. Вращение Земли относительно центра масс . . . . .	751
§ 1.02. Канонические уравнения вращательного движения небесных тел . . . . .	754
§ 1.03. Астродинамические дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника относительно центра масс . . . . .	759
§ 1.04. Моменты сил, действующих на спутник . . . . .	762
§ 1.05. Движение спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском поле . . . . .	764
§ 1.06. Задача о поступательно-вращательном движении двух гравитирующих динамически симметричных тел . . . . .	768
§ 1.07. Вращение Луны . . . . .	770
§ 1.08. Дифференциальные уравнения движения деформируемого небесного тела . . . . .	771
§ 1.09. Теория фигур небесных тел . . . . .	772
<i>Г л а в а 2. Устойчивость и стабилизация вращательного движения искусственных небесных тел . . . . .</i>	777
§ 2.01. Устойчивость движения спутников в гравитационном поле сил . . . . .	777
§ 2.02. Устойчивость движения спутников под действием моментов сил различной природы . . . . .	781
§ 2.03. Стабилизация движения спутников и космических аппаратов .	784
<i>Литература к части IX . . . . .</i>	786