

К.Ф. Лебединцев

**Учение о простейших
функциях, их графиках и
теория пределов**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
К11

К11 **К.Ф. Лебединцев**
Учение о простейших функциях, их графиках и теория пределов / К.Ф. Лебединцев – М.: Книга по Требованию, 2015. – 143 с.

ISBN 978-5-458-27263-6

ISBN 978-5-458-27263-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2015

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2015

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОТДѢЛЪ I. Ученіе о простѣйшихъ функціяхъ и ихъ графическомъ изображеніи.

Глава I. Основныя понятія, относящіяся къ ученію о функціяхъ.

§ 1. Понятіе о количествахъ постоянныхъ и переменныхъ, о независимыхъ переменныхъ и функціяхъ.—Пусть имѣемъ задачу: опредѣлить площадь прямоугольника, основаніе котораго равно a единицамъ длины, а высота равна b такимъ же единицамъ.

Искомая площадь $x = a \cdot b$.

Пусть теперь длина основанія имѣетъ опредѣленное значеніе: $a = 3$; а длинѣ высоты будемъ приписывать различныя произвольныя значенія: $b = 2, 5, 10, \dots$

Посмотримъ, каково будетъ каждый разъ значеніе площади нашего прямоугольника x .

Если $b = 2$, то $x = 3 \cdot 2 = 6$

" $b = 5$, " $x = 3 \cdot 5 = 15$

" $b = 10$, " $x = 3 \cdot 10 = 30$

.

Теперь видимъ, что при данныхъ условіяхъ количество a (длина основанія) имѣло одно и то же значеніе, количества же b и x (длина высоты и площадь прямоугольника)—различныя значенія. Чтобы выразить это обстоятельство, назовемъ количество a **постояннымъ**, количества же b и x —**переменными**.

Но значенія b , по условію, были совершенно произвольны, значенія же площади x , какъ видно изъ таблицы, измѣнялись сообразно тому, какое мы выбирали значеніе для b , и вычислялись по опредѣленному закону, а именно:

числовую величину b нужно было умножить на 3 (т. е. на длину основанія).

Выражая кратко эти обстоятельства, назовемъ количество b (длину высоты) **независимымъ перемѣннымъ**, количество же x (площадь прямоугольника) — **функцией** этого независимаго перемѣннаго b ; а тотъ законъ, по которому определяется значеніе x , когда извѣстно значеніе b , назовемъ **функциональной зависимостью** *) между x и b .

Измѣнимъ теперь условія вопроса. Дадимъ длинѣ высоты постоянное значеніе: $b = 10$, а длинѣ основанія будемъ приписывать произвольныя значенія: $a = 2^{1/2}$, 6, 15, ... Найдемъ для каждаго случая значеніе площади x .

$$\text{Если } a = 2^{1/2}, \text{ то } x = 2^{1/2} \cdot 10 = 25$$

$$\text{„ } a = 6, \text{ „ } x = 6 \cdot 10 = 60$$

$$\text{„ } a = 15, \text{ „ } x = 15 \cdot 10 = 150$$

Теперь видимъ, что при данныхъ условіяхъ постояннымъ является количество b (длина высоты), количества же a и x будутъ перемѣнными, причемъ значенія a совершенно произвольны, и потому оно будетъ независимымъ перемѣннымъ, значенія же x измѣняются сообразно тому, какое мы выбрали значеніе для a (и вычисляются по опредѣленному закону, именно: значеніе a нужно умножить на 10), т. е. въ данномъ случаѣ площадь x есть функція a (длины основанія).

Наконецъ, рассмотримъ такія условія вопроса. Будемъ придавать какъ длинѣ основанія, такъ и длинѣ высоты произвольныя значенія, и посмотримъ, какія значенія будутъ получать площадь x .

$$\text{Пусть } a = 2, b = 5; \text{ тогда } x = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\text{„ } a = 6, b = 5; \text{ „ } x = 6 \cdot 5 = 30$$

$$\text{„ } a = 6, b = 3^{1/2}; \text{ „ } x = 6 \cdot 3^{1/2} = 21$$

$$\text{„ } a = 24, b = 3^{1/2}; \text{ „ } x = 24 \cdot 3^{1/2} = 84$$

Въ данномъ случаѣ длина основанія a и длина высоты b являются независимыми перемѣнными. значенія же площади x измѣняются сообразно тому, какія мы выбираемъ значенія для a и b ; въ силу этого, количество x называется функціей двухъ независимыхъ перемѣнныхъ a и b .

*) Иначе — **количественной зависимостью**, или просто — **зависимостью**.

На основаніи всего вышеизложеннаго установимъ такіа опредѣленія:

Постояннымъ количествомъ будемъ называть такое, которое въ условіяхъ даннаго вопроса имѣетъ только одно значеніе.

Переменнымъ количествомъ будемъ называть такое, которое въ условіяхъ даннаго вопроса можетъ имѣть болѣе одного значенія (обыкновенно—сколько угодно значеній).

Если притомъ значенія переменнаго количества могутъ быть измѣняемы произвольно, то будемъ называть его **независимымъ переменнымъ**.

Если же значенія какого-либо переменнаго количества измѣняются соотвѣтственно тому, какія мы выбрали значенія для другого или нѣсколькихъ другихъ переменныхъ, то первое количество называется **функцией** второго или всѣхъ прочихъ переменныхъ.

Тотъ законъ, по которому опредѣляются значенія функций, если извѣстны значенія ея независимыхъ переменныхъ (и который обыкновенно выражается формулой, содержащей всѣ эти количества), называется **функциональной зависимостью** между данными количествами.

Нетрудно видѣть, что всякое равенство, получаемое нами при рѣшеніи какой-либо общей задачи по правиламъ алгебры, выражаетъ ту или иную функциональную зависимость между значеніями данныхъ и искомыхъ величинъ, или, какъ короче говорить, между величинами, входящими въ данную задачу.

Возьмемъ, напр., такую задачу.

Продано n фунтовъ товара на сумму m руб. Сколько рублей стоитъ одинъ фунтъ товара?

Обозначимъ искомую стоимость, выраженную въ рубляхъ, черезъ z ; тогда найдемъ $z = \frac{m}{n}$. Дадимъ теперь количеству n постоянное значеніе, напр., $n = 10$, а количеству m будемъ давать различныя произвольныя значенія: $m = 5, 20, 42, 1\frac{1}{2} \dots$. Тогда искомая величина z будетъ получать также различныя между собою значенія, вычисляемыя по формулѣ $z = \frac{m}{n}$.

$$\text{При } m = 5, z = 5 : 10 = 0,5$$

$$, \quad m = 20, z = 20 : 10 = 2$$

При $m = 42$, $z = 42 : 10 = 4.2$

„ $m = 1\frac{1}{2}$, $z = 1\frac{1}{2} : 10 = 0,15$

.

Очевидно, при данныхъ условіяхъ число фунтовъ товара (n) есть количество постоянное, стоимость всего товара (m)—перемѣнное и притомъ независимое, а стоимость одного фунта (z)—функція этого независимаго переменнаго; самая же формула $z = \frac{m}{n}$ выражаетъ функціональную зависимость между входящими въ задачу величинами, а именно: стоимость одного фунта равна частному отъ дѣленія стоимости всего товара на нѣкоторое постоянное число, выражающее количество проданнаго товара.

Замѣтимъ, что зависимость эта относится къ числу извѣстныхъ намъ еще изъ ариѳметики, такъ какъ можно показать, что при данныхъ условіяхъ (т. е., если количество товара есть величина постоянная) стоимость одного фунта товара и стоимость всего товара пропорціональны. Въ самомъ дѣлѣ, если стоимость всего товара (m) получить какія-либо опредѣленныя значенія m_1 и m_2 , то стоимость одного фунта товара (z) получить такія значенія z_1 и z_2 , которыя опредѣляются условіями $z_1 = \frac{m_1}{n}$ и $z_2 = \frac{m_2}{n}$; раздѣ-

ливъ эти равенства другъ на друга, найдемъ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{m_1}{m_2}$, т. е.

величины z и m пропорціональны.

Измѣнимъ теперь условія вопроса.

Пусть m (стоимость товара) имѣетъ постоянное значеніе, напр., $m = 25$; количество же n (число фунтовъ товара) пусть получаетъ различныя произвольныя значенія: $n = 10, 6\frac{1}{4}, 100, 50 \dots$. Тогда искомая величина z будетъ получать слѣдующія значенія:

При $n = 10$, $z = 25 : 10 = 2,5$

„ $n = 6\frac{1}{4}$, $z = 25 : 6\frac{1}{4} = 4$

„ $n = 100$, $z = 25 : 100 = 0,25$

„ $n = 50$, $z = 25 : 50 = 0,5$

.

Такимъ образомъ, въ данномъ случаѣ m есть постоянное, n —перемѣнное независимое, а z —его функція; формула же $z = \frac{m}{n}$ выражаетъ слѣдующую функціональную зависи-

мость между входящими въ задачу величинами: стоимость одного фунта товара равна частному отъ дѣленія нѣкотораго постояннаго числа, выражающаго стоимость всего товара, на число фунтовъ этого товара.

Эта зависимость также принадлежитъ къ числу извѣстныхъ намъ раньше, такъ какъ при данныхъ условіяхъ (т. е., если стоимость всего товара есть величина постоянная) стоимость одного фунта товара и число фунтовъ его обратно пропорціональны. Въ самомъ дѣлѣ, если количество товара n получить какія-либо опредѣленные значенія n_1 и n_2 , то стоимость одного фунта товара (z) получить такія значенія z_1 и z_2 , которыя опредѣляются условіями: $z_1 = \frac{m}{n_1}$, $z_2 = \frac{m}{n_2}$; раздѣливъ эти равенства почленно, найдемъ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1}$, т. е. величины z и n обратно пропорціональны.

Возьмемъ еще такую общую задачу:

Сторона квадрата равна а арш.; какъ велика его площадь?

Обозначивъ искомую площадь, выраженную въ квадратныхъ аршинахъ, черезъ x , найдемъ $x = a^2$.

Пусть теперь a получаетъ различныя значенія, напр., $a = 1, 4^{1/2}, 1/8, 100, \dots$. Тогда количество x также будетъ принимать различныя значенія, опредѣляемые по формулѣ $x = a^2$:

$$\begin{array}{ll} \text{При } a = 1, & x = 1^2 = 1 \\ \text{„ } a = 4^{1/2}, & x = (4^{1/2})^2 = 20^{1/4} \\ \text{„ } a = 1/8, & x = (1/8)^2 = 1/64 \\ \text{„ } a = 100, & x = 100^2 = 10000 \\ \text{.} & \end{array}$$

Въ данномъ случаѣ, очевидно, длина стороны квадрата (a) есть независимое переменное, а площадь квадрата (x)—его функція; зависимость же между ними такова: площадь квадрата равна квадрату его стороны*).

Замѣтимъ еще, что если какое-либо количество является функціей другого, то, въ свою очередь, и второе мо-

*) Какъ извѣстно, такъ говорятъ сокращенно вмѣсто слѣдующихъ словъ: число, выражающее площадь квадрата въ квадратныхъ единицахъ, равно квадрату числа, выражающаго длину его стороны въ одноименныхъ линейныхъ единицахъ.

жетъ быть разсматриваемо, какъ функція перваго; такъ, площадь квадрата x , какъ мы только что видѣли, есть функція его стороны a , и функціональная зависимость между ними выражена формулой $x = a^2$; если же мы площадь x примемъ за независимое переменное, то длина стороны его a будетъ получать также различныя значенія, вычисляемые по формулѣ $a = \sqrt{x}$, т. е. въ этомъ случаѣ сторона квадрата является функціей его площади.

Въ предыдущихъ примѣрахъ функціональная зависимость между данными количествами была выражена въ видѣ формулы. Но это не всегда такъ бываетъ.

Такъ, напр., пусть намъ дана слѣдующая записъ наблюдений надъ температурой воздуха:

6 час. утра	12°
7 " "	12,5°
8 " "	14°
9 " "	14,5°
10 " "	15,5°
11 " "	17°
12 час. дня	18°

Мы можемъ сказать, что въ данномъ случаѣ температура есть функція времени, такъ какъ съ измѣненіемъ времени измѣняется соотвѣтственно и температура; но мы не знаемъ, по какому именно закону она измѣняется, и поэтому не можемъ знать точно, какова была температура, положимъ, въ 9³/₄ час., или какова она будетъ въ 2 часа дня.

§ 2. Раздѣленіе функцій.—Если количественная зависимость между функціей и ея независимымъ переменнымъ можетъ быть представлена алгебраическимъ выраженіемъ, цѣлымъ относительно даннаго независимаго переменнаго, то такая функція называется **цѣлой**. Такъ, напр., упомянутыя выше функціи $y = ax$, $x = a^2$, $z = \frac{m}{n}$ (при постоянномъ n)—

были цѣлыми; функція же $z = \frac{m}{n}$ при переменномъ n —дробной функціей, и т. д.

Если притомъ вышеупомянутое алгебраическое выраженіе, представляющее зависимость между данными величинами, есть одночленъ или многочленъ первой, второй, третьей... степени относительно даннаго независимаго пе-

ремѣннаго, то данная функція называется функціей перваго, второго, третьяго... порядка.

Такъ, напр., функція $y = ax$ при постоянномъ a и переменномъ x есть функція перваго порядка, функціи же $y = x^2$, или $y = ax^2 + bx$ —будутъ функціями второго порядка отъ x .

Мы будемъ разсматривать пока только функціи перваго порядка и одного независимаго переменнаго. Подобная функція можетъ быть представлена въ общемъ видѣ формулой

$$y = ax + b,$$

гдѣ a и b обозначаютъ какія-либо постоянныя количества, x —независимое переменное, а y —его функцію.

Глава II. Функціи перваго порядка отъ одного независимаго переменнаго и ихъ графическое изображеніе.

§ 3. Простѣйшія функціи перваго порядка (вида $y = ax$) и ихъ наглядное изображеніе съ помощью чертежа.

Возьмемъ задачу: *По шоссе движется пешеходъ такъ, что въ каждую секунду проходитъ $1\frac{1}{2}$ саж. Въ настоящій моментъ онъ находится у телеграфнаго столба. На сколько саженъ впереди столба будетъ онъ черезъ x секундъ?*

Очевидно, искомый отвѣтъ $y = 1\frac{1}{2}x$ (саж.); если будемъ придавать времени x различныя значенія, то и разстояніе y будетъ соотвѣтственно измѣняться:

Если $x = 1$,	то $y = 1\frac{1}{2}$,
" $x = 2$,	" $y = 1$,
" $x = 3$,	" $y = 1\frac{1}{2}$
" $x = 4$,	" $y = 2$,
" $x = 5$,	" $y = 2\frac{1}{2}$
" $x = 6$,	" $y = 3$

Такимъ образомъ y будетъ функціей отъ x , притомъ функціей перваго порядка.

Обратимъ теперь вниманіе на нѣкоторыя свойства нашей функціи.

Разсматривая значенія x и соотвѣтствующія значенія y , видимъ во 1-хъ, что каждое значеніе y вдвое меньше соотвѣтствующаго значенія x , т. е. величины y и x пропорціональны; во 2-хъ, замѣчаемъ, что съ возрастаніемъ x возрастаетъ и y , и притомъ равномѣр-

но: при увеличеніи x на одинаковыя числа (напр., на 1) величина y получает также одинаковыя прибавки (возрастает на $\frac{1}{2}$).

Всѣ эти обстоятельства и вообще весь ходъ измѣненій функции можно изобразить наглядно при помощи чертежа.

Возьмемъ пару взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ OX и OY (онѣ наз. **осями**); отложимъ на горизонтальной прямой OX (черт. 1) отъ точки O отрѣзокъ OA , равный какой-либо единицѣ длины, напр., 1 сантиметру, и пусть этотъ отрѣзокъ изображаетъ промежутокъ времени въ 1 секунду; тогда промежутки времени въ 2, 3, 4, . . . сек. будутъ изображены отрѣзками OB , OC , OD , соответственно равными 2, 3, 4, см.

Затѣмъ изъ точки A возставимъ къ оси OX перпендикуляръ AK , равный $\frac{1}{2}$ центим.; этотъ перпендикуляръ пусть изобразитъ разстояніе ($\frac{1}{2}$ саж.), на которое пѣшеходъ ушелъ впередъ отъ столба черезъ 1 секунду. Подобнымъ же образомъ проведемъ перпендикуляры BL , CM , DN ,, соответственно равные 1, $1\frac{1}{2}$, 2, см.; эти перпендикуляры изобразятъ разстоянія пѣшехода отъ столба черезъ 2, 3, 4, сек.

Нетрудно замѣтить, что концы всѣхъ этихъ перпендикуляровъ лежатъ на одной прямой линіи. Въ этомъ можно убѣдиться на опытѣ, если приложить линейку къ точкамъ K , L , M , N , . . .; но легко доказать, что такъ и должно быть: если соединимъ, напр., точки K и L съ точкой O (черт. 2), то увидимъ, что въ прямоугольныхъ треугольникахъ AOK и BOL катеты соответственно пропорціональны:

$$\frac{AK}{OA} = \frac{BL}{OB} \left(= \frac{1}{2} \right),$$

слѣд., треугольники эти подобны и уголъ AOK равенъ углу BOL , а потому прямая OK и OL совпадаютъ. Точно такъ же, если мы выберемъ произвольное (положительное) значеніе x и построимъ указаннымъ способомъ перпендикуляръ, изображающій соответствующее значеніе y , то конецъ этого перпендикуляра будетъ лежать на той же прямой. Въ самомъ дѣлѣ, пусть x_1 обозначаетъ произвольное значеніе времени x ; соответствующее значеніе y будетъ равно $\frac{1}{2}x_1$; отложимъ по горизонтальной оси отрѣзокъ $OE = x_1$ см. (черт. 2) и возставимъ изъ его конца перпендикуляръ $EF = \frac{1}{2}x_1$ см.; то-

гда найдемъ, что въ треугольникѣ EOF отношеніе катетовъ $\frac{EF}{OE} = \frac{1}{2}$, слѣд. онъ подобенъ треугольнику AOK , а потому уголъ EOF равенъ углу AOK , и прямая OF совпадаетъ съ прямой OK .

Возьмемъ теперь на прямой OF произвольную точку P (черт. 2) и опустимъ изъ нея перпендикуляръ PQ на ось OX . Очевидно $\triangle POQ$ подобенъ $\triangle$ -ку AOK (такъ какъ у этихъ прямоугольныхъ треугольниковъ есть общій острый уголъ O); слѣд. отношеніе $\frac{QP}{OQ} = \frac{1}{2}$, или $QP = \frac{1}{2} OQ$. Пусть отръзокъ OQ имѣетъ длину x_2 см.; тогда онъ изображаетъ намъ промежутокъ времени въ x_2 секундъ, а перпендикуляръ QP , равный по предыдущему $\frac{1}{2} x_2$ см., изобразить соотвѣтствующее разстояніе пѣшехода отъ столба ($y_2 = \frac{1}{2} x_2$ саж.). Такимъ образомъ любая точка прямой OP изображаетъ намъ (своимъ разстояніемъ отъ оси OX) нѣкоторое значеніе функціи y (соотвѣтствующее тому значенію переменнаго x , которое можетъ быть изображено разстояніемъ той же точки отъ оси OY ; напр. на черт. 2 имѣемъ $PH = OQ = x_2$ см.).

Прямая OP наз. **графиней** данной функціи $y = \frac{1}{2} x$; она даетъ, какъ мы видѣли, наглядное изображеніе измѣненій функціи, и на ней мы можемъ прослѣдить всѣ тѣ особенности измѣненій данной функціи, которыя были отмѣчены нами раньше. Очевидно, напр., (черт. 3), что перпендикуляры, изображающіе значенія y , пропорціональны отръзкамъ, изображающимъ соотвѣтственныя значенія x (такъ какъ $\triangle$ -ки AOK , BOL и т. д. подобны); ясно также, что съ возрастаніемъ отръзковъ, изображающихъ x , возрастаетъ и длина перпендикуляровъ, изображающихъ y , и притомъ это возрастаніе идетъ равномѣрно (при передвиженіи вправо по горизонтальной оси на 1 см. длина перпендикуляра увеличивается каждый разъ на $\frac{1}{2}$ см.—см. черт. 3).

Точка O (мѣсто пересѣченія осей) изображаетъ, очевидно, первоначальное положеніе пѣшехода у столба; она соотвѣтствуетъ значенію времени x , равному 0, а въ этомъ случаѣ и пройденное разстояніе y также $= 0$.

До сихъ поръ мы брали только положительныя значенія x и y . Но мы можемъ разсматривать и отрицательныя значенія этихъ величинъ, и дать графическое изображеніе функціи и для этого случая.

Пусть $x = -1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots$

Тогда $y = -1/2, -1, -1\frac{1}{2}, -2, -2\frac{1}{2}, -3, \dots$

Это показывает, что за 1, 2, 3, ... сек. до начального момента пѣшеходъ находился позади столба въ $1/2, 1, 1\frac{1}{2}, \dots$ саж. На чертежѣ мы будемъ изображать промежутки времени, выражаемые отрицательными числами (т. е. считаемые до начальнаго момента), — отрѣзками, откладываемыми влѣво отъ точки O по оси OX ; а соответствующія этимъ промежуткамъ времени разстоянія (отрицательныя) будемъ изображать перпендикулярами, составляемыми внизъ. Получимъ рядъ точекъ $K_1, L_1, M_1, N_1, \dots$ (черт. 4), и теперь, повторяя всѣ прежнія разсужденія, можемъ доказать, что всѣ эти точки также лежатъ на одной прямой ON_1 , которая составляетъ продолженіе прежней графики OP .

Легко видѣть, что измѣненія функции и при отрицательныхъ значеніяхъ x и y будутъ имѣть тѣ же особенности, что и при положительныхъ значеніяхъ; и весь ходъ измѣненій, подобно предыдущему, можно прослѣдить на построенной нами графикѣ.

Предположимъ теперь, что въ предыдущей задачѣ скорость пѣшехода, не измѣняя своей величины, стала отрицательной, т. е. что пѣшеходъ движется въ сторону, противоположную сравнительно съ предыдущимъ. Тогда формула, выражающая разстояніе пѣшехода отъ столба, будетъ $y =$

$= -\frac{1}{2}x$. Изслѣдуемъ теперь измѣненія y , разсматривая его какъ функцию отъ x .

Пусть $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

Тогда $y = -1/2, -1, -1\frac{1}{2}, -2, -2\frac{1}{2}, -3, \dots$

Очевидно и здѣсь значенія y пропорціональны соответствующимъ значеніямъ x ; но съ возрастаніемъ независимаго переменнаго x функция его y убываетъ, и притомъ равномерно (при увеличеніи x на единицу значенія y убываютъ каждый разъ на $1/2$). То же самое обнаружимъ, если примемъ во вниманіе отрицательныя значенія x и соответствующія имъ значенія y :

$x = -1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots$

$y = 1/2, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, \dots$