Ф.М. Шустеф

Сборник олимпиадных задач по математике

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 621.39
ББК 32
Ф11

Ф.М. Шустеф
Ф11 Сборник олимпиадных задач по математике / Ф.М. Шустеф – М.: Книга по Требованию, 2021. – 83 с.

ISBN 978-5-458-31650-7

В сборнике содержится 290 задач, предлагавшихся на Белорусских республиканских олимпиадах учащихся VII—X классов в 1950 — 1959 гг.Помещенные в нем задачи охватывают теоретический материал VII—XI классов, ко многим из них даны ответы и решения или указания. Данный сборник явится пособием для учителей в подготовке учащихся к математическим олимпиадам. Он может быть использован также учащимися VII—XI классов. Использование сборника учителями математики в кружках, при подготовке учащихся к олимпиадам поможет повысить математическую культуру учащихся.

ISBN 978-5-458-31650-7

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

VII КЛАСС

АРИФМЕТИКА

1. Не производя указанных умножений, установить, правильной или неправильной дробью является число $\frac{244 \cdot 395 - 151}{244 + 395 \cdot 243}$. (57/58 — I — 7)[1]

2. Доказать, что если даны три каких-либо целых числа, из которых ни одно не делится на 3, то или сумма всех этих чисел, или сумма двух каких-либо из них должна делиться на 3. (51/52 — I — 7)

3. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найти все такие числа. (57/58 — II — 7)

4. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от единицы до ста включительно? (58/59 — II — 7)

5. Все натуральные числа выписаны подряд, начиная от единицы. Определить, какая цифра стоит на 34788-м месте. (57/58 — II — 7)

6. Для нумерации страниц энциклопедического словаря потребовалось 6869 цифр. Сколько страниц было в этом словаре? (51/52 — II — 7)

7. Найти наименьшее число, которое при делении на 2, 3, 4, 5, 6 дает в остатке 1, а на 7 делится без остатка. (50/51 — I — 8)

---

[1] В скобках указаны год проведения олимпиады, тур и класс, для которого данная задача предлагалась.

8. Число 7 возведено в седьмую степень. Полученное число снова возведено в седьмую степень и т. д. Возведение повторено 1000 раз. Определить, какой цифрой оканчивается полученное число. (52/53 — I — 8)

9. Допуская, что стрелки часов движутся с постоянной скоростью, узнать, через сколько минут после того, как часы показывали 3 часа, минутная стрелка догонит часовую. (55/56 — II — 7, 54/55 — II — 7)

10. В ящике лежат 70 шаров: 20 красных, 20 зеленых, 20 желтых, остальные черные и белые. Шары отличаются друг от друга только цветом. В темноте выбираем шары. Какое наименьшее число шаров необходимо взять, чтобы среди них было не меньше 10 шаров одного цвета? (56/57 — I — 8)

11. Отец поручил сыну измерить длину двора шагами. Дело было зимой, и на снегу остались следы ног сына. Желая его проверить, отец измерил длину двора своими шагами, начав с того же места и идя в том же направлении. В некоторых местах его следы совпали со следами сына. Всего следов на снегу, считая совпадающие следы отца и сына за один, по линии обмера оказалось 61. Чему равна длина двора, если шаг отца равен 0,72 метра, а шаг сына 0,54 метра? (51/52 — I — 7)

12. Инженер, работающий за городом, ежедневно приезжает поездом на одну станцию в одно и то же время. В это же время за ним приезжает машина, и он попадает вовремя на завод. Однажды инженер приехал на станцию на 55 минут раньше и, не дожидаясь машины, пошел пешком на завод. Встретив на пути свою машину, он сел в нее и приехал на завод на 10 минут раньше обычного. Во сколько раз скорость пешехода меньше скорости машины? (55/56 — II — 8)

13. Цены снижены на 20%. На сколько процентов больше можно купить товаров на ту же заработную плату? (53/54 — I — 7)

14. Морская вода содержит 5% соли (по весу). Сколько килограммов пресной воды нужно прибавить к 40 *кг* морской воды, чтобы содержание соли в смеси составляло 2%? (58/59 — II — 7)

15. Мать старше дочери в 2,5 раза, а 6 лет назад мать была в 4 раза старше дочери. Сколько лет матери и сколько лет дочери?

16. Нам обоим вместе 63 года. Сейчас мне вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас. Сколько лет мне и сколько лет вам? (54/55 — I — 7)

17. Сестре втрое больше лет, чем было тогда, когда брат был в ее возрасте. Когда сестре будет столько, сколько теперь брату, то им обоим вместе будет 96 лет. Сколько лет сестре и сколько лет брату? (58/59 — I — 7)

ГЕОМЕТРИЯ

1. Треугольники

18. По углам A и C при основании треугольника ABC определить угол между высотой и биссектрисой угла при вершине, противоположной основанию.
(52/53 — I — 7, 56/57 — II — 7)

19. К биссектрисе CE треугольника ABC проведен перпендикуляр CD, который встречает продолжение стороны AB в точке D. Доказать, что угол EDC равен полуразности углов A и B и равен углу между биссектрисой CE и высотой CK. (58/59 — I — 7)

20. Доказать, что медиана, проведенная из вершины острого угла прямоугольного или тупоугольного треугольника, делит угол на неравные части. (51/52 — I — 7)

21. В треугольнике ABC высота h_a составляет половину отрезка биссектрисы внешнего угла треугольника при вершине A, проведенной до точки пересечения с продолжением противоположной стороны. Найти разность углов C и B. (53/54 — I — 8)

22. Доказать, что в треугольнике медиана большей стороны меньше медианы меньшей стороны.
(56/57 — II — 7)

23. В прямоугольном или тупоугольном треугольнике один из острых углов разделен на несколько равных частей. Доказать, что прямые, делящие угол, разделяют противоположную сторону на части, возрастающие при удалении от вершины прямого или тупого угла.
(51/52 — II — 7)

2. Задачи на построение

24. Дан угол и точка вне его. Провести через эту точку прямую, отсекающую от угла треугольник данного периметра. (51/52 — I — 9)

25. Можно ли проведением одной прямой разбить разносторонний треугольник на два равных треугольника? (51/52 — I — 7)

26. Построить точку пересечения двух прямых, если она лежит по другую сторону планки, препятствующей продолжению данных прямых. (51/52 — II — 7)

27. Построить биссектрису угла, вершина которого находится вне чертежа. (51/52 — I — 8)

28. Построить прямую, равноудаленную от трех данных точек. (51/52 — I — 7)

29. Построить треугольник по основанию a, медиане m_a и высоте h_a. (58/59 — I — 7)

30. Построить прямоугольный треугольник по катету a и разности b между гипотенузой и другим катетом. (52/53 — I — 7)

31. Построить треугольник по основанию b, высоте h_b и медиане m_a, проведенной к боковой стороне. (57/58 — I — 7, 55/56 — II — 7)

32. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, зная сумму гипотенузы и опущенной на нее высоты. (56/57 — I — 7)

33. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и медиане m_b, проведенной из вершины острого угла. (53/54 — I — 7)

3. Параллелограмм

34. Дан параллелограмм и прямая, параллельная одной из его диагоналей. Доказать, что продолжения параллельных сторон отсекают на этой прямой равные отрезки. (57/58 — I — 7)

35. В параллелограмме проведены биссектрисы внутренних углов до взаимного пересечения. Доказать, что четырехугольник, образованный этими биссектрисами, есть параллелограмм. (55/56 — II — 7)

36. Середины сторон прямоугольника последовательно соединены прямыми. Середины полученного четырехугольника также соединены прямыми. Во сколько раз периметр последнего четырехугольника меньше периметра внешнего прямоугольника? (55/56 — I — 7)

37. Доказать, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма в пересечении образуют прямоугольник,

диагонали которого равны разности смежных сторон параллелограмма. (53/54 — I — 7)

38. Если в параллелограмме биссектрисы углов между его диагоналями продолжить до пересечения со сторонами и точки пересечения последовательно соединить отрезками, то получится ромб. Доказать. (56/57 — I — 7)

39. Доказать, что если середины сторон прямоугольника последовательно соединить отрезками прямых, то получится ромб. (58/59 — I — 7)

40. Доказать, что во всяком четырехугольнике середины сторон являются вершинами некоторого параллелограмма. (52/53 — I — 7)

41. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что, соединив отрезками прямых центры построенных квадратов, получим квадрат.
(54/55 — I — 8, 54/55 — II — 7, 56/57 — I — 10)

42. Построить ромб по высоте h и диагонали d. (55/56 — I — 7)

4. Трапеция

43. Основания трапеции a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины ее диагоналей. (55/56 — I — 7)

44. Доказать, что всякий отрезок, соединяющий какую-нибудь точку нижнего основания трапеции с произвольной точкой верхнего основания, делится средней линией трапеции пополам. (58/59 — II — 7)

45. Построить трапецию по одному основанию, двум диагоналям и средней линии. (58/59 — II — 7)

5. Окружность

46. Построить окружность данного радиуса R, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой. (56/57 — II — 7)

47. Если при пересечении сторон четырехугольника с окружностью образуются четыре равные хорды, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны. Доказать. (56/57 — I — 8)

48. Сколько кругов одинакового радиуса можно расположить вокруг одного круга того же радиуса так, чтобы каждый из них касался этого круга и двух соседних? (51/52 — II — 7)

49. Доказать, что хорды двух касательных кругов, соединяющие концы двух секущих, проходящих через точку касания, параллельны между собой. (52/53 — I — 8)

50. На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята точка M. Доказать, что наибольший из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух остальных. (54/55 — II — 7, 55/56 — I — 9)

51. Доказать, что касательные к окружности, проведенные через вершины прямоугольника, вписанного в эту окружность, образуют ромб. (57/58 — II — 7)

АЛГЕБРА

1. Делимость чисел

52. Доказать, что квадрат нечетного числа при делении на 8 всегда дает в остатке 1. (58/59 — II — 7)

53. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая — с пятой, третья — с шестой. Доказать, что это число делится на 7, 11, 13. (53/54 — I — 7)

54. Доказать, что $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48 при нечетных значениях n. (57/58 — II — 10)

2. Доказательство тождеств

55. Доказать, что выражение $2a^2 + 2b^2$ можно представить в виде суммы двух квадратов.
(56/57 — I — 7, 57/58 — I — 7)

56. Доказать, что произведение трех последовательных целых чисел, сложенное со вторым из них, равно кубу второго числа. (58/59 — I — 7)

57. Доказать тождество:

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = (b+c)\cdot(c+a)\cdot(a+b).$$
(58/59 — I — 7)

58. Пусть $x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{b-c}{b+c}$, $z = \frac{c-a}{c+a}$.
Доказать, что $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$.
(56/57 — II — 7)

59. Доказать, что если $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)} = \frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$, где $x \neq y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, то $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.
(58/59 — II — 7)

3. Решение уравнений и систем уравнений

60. Найти условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения $ax = b - c$, для того чтобы: 1) уравнение имело положительный корень, 2) уравнение имело отрицательный корень, 3) уравнение имело корень, равный 0. (54/55 — I — 7)

61. Решить уравнение $(x + a)^2 = (x - b)^2$. Каково решение этого уравнения при $a = +2$, $b = -2$ и можно ли в этом случае пользоваться общей формулой, получаемой при решении данного уравнения? (51/52 — I — 7)

62. Решить уравнение $\frac{6b + 7a}{6b} - \frac{3ay}{2b^2} = 1 - \frac{ay}{b^2 - ab}$.
(54/55 — II — 7, 55/56 — I — 7)

63. При каких значениях m уравнение $m^2x = m(x + 2) - 2$ имеет единственное решение? (50/51 — I — 7/8)

64. Решить уравнение:

$$\frac{c + 3z}{4c^2 + 6cd} - \frac{c - 2z}{9d^2 - 6cd} = \frac{2c + z}{4c^2 - 9d^2}.$$ (55/56 — II — 7)

65. Решить неравенство $x - \frac{x - 1}{2} > \frac{x - 3}{4} - \frac{x - 2}{3}$ и дать графическое истолкование решению. (56/57 — II — 7)

Решить системы уравнений:

66.
$$\begin{cases} x + y + z = 1, & (a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a) \\ ax + by + cz = d, & \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. & \end{cases}$$ (55/56 — II — 7)

67.
$$\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0, & (a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a) \\ b^3 + b^2x + by + z = 0, & \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0. & \end{cases}$$ (54/55 — II — 7)

4. Задачи на составление уравнений

68. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести через два знака влево, т. е. поместить в начале записи числа, то новое число будет на единицу больше утроенного первоначального числа. Найти это число. (51/52 — II — 7)

69. Найти четырехзначное число, являющееся точным квадратом, у которого цифра тысяч одинакова с цифрой десятков, а цифра сотен на 1 больше цифры единиц.
(52/53 — I — 7)

70. Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места слева на последнее место справа, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число. (56/57 — I — 7)

71. 37 *кг* олова теряют в воде 5 *кг* своего веса, 23 *кг* свинца теряют 2 *кг*. Слиток обоих металлов в 120 *кг* теряет в воде 14 *кг*. Сколько в слитке олова и сколько свинца? (53/54 — I — 7)

72. Турист, идущий из деревни на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 *км*, рассчитал, что он опоздает на поезд на 40 минут, если будет двигаться с той же скоростью, поэтому остальной путь он проходил со скоростью 4 *км* в час и прибыл на станцию за 45 минут до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции? (54/55 — II — 7)

73. Два курьера вышли одновременно из A в B и из B в A. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 12 километрах от B, второй раз в 6 километрах от A через 6 часов после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорость обоих курьеров. (57/58 — I — 9)

VIII КЛАСС

ГЕОМЕТРИЯ

1. Линии в треугольнике

74. Доказать, что во всяком треугольнике сумма трех медиан меньше периметра и больше полупериметра этого треугольника. (58/59 — II — 8)

75. Доказать, что сумма расстояний всякой точки основания равнобедренного треугольника от его боковых сторон равна высоте, опущенной на боковую сторону. Как должна быть сформулирована теорема для точек на продолжениях основания? (58/59 — I — 8)

76. Из точки A, лежащей вне данной полуокружности, по одну с ней сторону от диаметра, опустить на этот диаметр перпендикуляр, пользуясь только линейкой (не используя ее как угольник). Положение центра полуокружности не указано. (58/59 — II — 8)

77. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины. (56/57 — I — 8)

2. Геометрические места

78. Найти геометрическое место середин хорд, проведенных из одной точки A окружности O. (51/52 — I — 8)

79. Построить окружность, равноудаленную от четырех точек. Всегда ли построение возможно? (50/51 — I — 7/8)

80. Провести данным радиусом r окружность, касающуюся данной окружности радиуса R ($R < r$) и данной прямой, лежащей вне данной окружности. Сколько решений может иметь задача? (50/51 — I — 7/8)

81. Построить треугольник ABC по сторонам AB и AC зная, что $3\angle B = \angle C$. (56/57 — I — 8)

82. Построить треугольник ABC, зная положение одной из его вершин B, середины противоположной стороны D и точки O пересечения высот. (53/54 — I — 8)

3. Деление отрезка в данном отношении

83. Вписать в равносторонний треугольник другой равносторонний треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны к сторонам данного. (58/59 — I — 8)

84. Дана окружность и на ней две точки A и B. Найти на этой окружности такую точку C, чтобы расстояния ее от A и B находились в данном отношении $m:n$.
(51/52 — I — 8)

85. Вписать в данный круг треугольник, если даны основание a и отношение двух других сторон ($m:n = 5:3$).
(56/57 — I — 8)

86. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится в точке A пополам.
(57/58 — I — 9)

87. Трапецию пересечь прямой, параллельной основаниям, так, чтобы отрезок, заключенный между боковыми сторонами, делился диагоналями на три равные части.
(51/52 — II — 9)

4. Подобие фигур и метод подобия

88. Два круга радиусов r и R внешне касаются. Расстояние от точки касания до их общей касательной равно d. Доказать, что $\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{2}{d}$. (55/56 — I — 8)

89. Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений непараллельных сторон трапеции, делит основания трапеции на равные части. (55/56 — I — 8)

90. В данную окружность вписать треугольник, подобный данному. (52/53 — I — 8, 55/56 — II — 8, 57/58 — I — 8)

91. В данную окружность вписать трапецию, зная высоту h и разность a оснований трапеции. (51/52 — II — 8)

92. Данный треугольник пересечь прямой, параллельной основанию, так, чтобы отрезок MN этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, был виден из данной точки P основания под прямым углом. (57/58 — II — 8)

93. Доказать справедливость формулы $R=\frac{abc}{4S}$, где a, b, c — стороны любого треугольника, S — его площадь и R — радиус круга, описанного около этого треугольника. (53/54 — I — 8, 57/58 — II — 10)

94. В треугольнике ABC отрезком прямой соединены основания двух его высот AD и BE. Доказать, что образовавшийся при этом треугольник CDE подобен данному. (57/58 — II — 8)

95. Дан угол и внутри него точка M. Найти на одной стороне угла точку, равноудаленную от данной точки M и другой стороны угла. (55/56 — I — 8)

96. Вписать квадрат в данный круговой сектор так, чтобы одна из его сторон лежала на одном из радиусов, ограничивающих сектор. (54/55 — I — 8)

97. Через данную вне круга точку провести такую секущую, которая разделилась бы окружностью в данном отношении $m:n$. (51/52 — II — 8)

98. Построить треугольник по двум углам и расстоянию между центрами описанной и вписанной окружностей. (54/55 — II — 8)