Л. Кутюра

Алгебра логики

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Л11

Л. Кутюра
Л11 Алгебра логики / Л. Кутюра – М.: Книга по Требованию, 2020. – 133 с.

ISBN 978-5-458-63989-7

ISBN 978-5-458-63989-7

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

щихъ ему взглядовъ на трудный и неразработанный еще вопросъ о чисто формальномъ обоснованіи логики предложеній. Во второмъ приложеніи я предлагаю болѣе полныя доказательства нѣсколькихъ начальныхъ предложеній. Пополненіе дальнѣйшихъ доказательствъ можетъ быть сдѣлано подобнымъ же образомъ.

Считаю пріятнымъ долгомъ выразить здѣсь В. А. Циммерману и С. О. Шатуновскому искреннюю благодарность за чтеніе корректурныхъ листовъ, и послѣднему, сверхъ того, за составленіе приложенія, которое для многихъ читателей сдѣлаетъ содержаніе книги болѣе понятнымъ.

31. III. 1909.
Одесса.

L. COUTURAT

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Алгебра логики.

1. Введеніе.

Основаніе алгебрѣ логики положилъ Джорджъ Буль (George Bool, 1815—1864), развилъ же и усовершенствовалъ ее Эрнстъ Шрёдеръ (Ernst Schröder 1841—1902). Основные законы этого исчисленія были изобрѣтены съ цѣлью дать выраженіе основныхъ началъ разсужденія, „законовъ мышленія"; но съ чисто формальной точки зрѣнія, которая свойственна математикѣ, можно разсматривать это исчисленіе, какъ алгебру, основанную на нѣкоторыхъ произвольно установленныхъ началахъ. Отвѣчаетъ ли это исчисленіе,—и, если отвѣчаетъ, то въ какой мѣрѣ, — дѣйствительнымъ операціямъ мышленія и можетъ ли оно служить, такъ сказать, переводомъ разсужденія или же замѣнять его—это вопросъ философскій, котораго мы не будемъ здѣсь разсматривать. Формальное значеніе этого исчисленія и интересъ его для математика нисколько не зависитъ отъ интерпретацій, какія ему даются, и отъ приложеній его къ задачамъ логики. Мы будемъ, во всякомъ случаѣ, излагать его какъ алгебру, а не какъ логику.

2. Двѣ интерпретаціи логическаго исчисленія.

Здѣсь представляется особенно интересное обстоятельство: эта алгебра допускаетъ въ самой логикѣ двѣ различныхъ, почти параллельныхъ интерпретаціи, въ зависимости отъ того, выражаютъ ли буквы понятія, или предложенія. Можно, конечно, вмѣстѣ съ Булемъ и Шрёдеромъ, свести эти двѣ интерпретаціи къ одной, разсматривая съ одной стороны понятія, съ другой стороны—предложенія, какъ вещи, отвѣчающія ансамблямъ или классамъ: понятіемъ опредѣляется ансамбль предметовъ, къ которымъ оно относится (въ логикѣ называютъ его объемомъ понятія); предложеніемъ опредѣляется ансамбль случаевъ, или моментовъ времени, для которыхъ оно вѣрно (его также, по аналогіи, можно назвать объемомъ послѣдняго), и тогда исчисленіе понятій и исчисленіе предложеній сводятся къ одному исчисленію классовъ, или, какъ говорилъ Лейбницъ,—къ теоріи цѣлаго и части, содержащаго и содержимаго.

Однако, въ дѣйствительности, исчисленіе понятій и исчисленіе предложеній представляютъ, какъ увидимъ, нѣкоторыя различія, препятствующія ихъ отождествленію съ формальной точки зрѣнія и, слѣдовательно, препятствующія сведенію ихъ къ одному „исчисленію классовъ“. Въ дѣйствительности получается три различныхъ исчисленія или, въ той части, гдѣ они совпадаютъ, три различныхъ интерпретаціи одного исчисленія. Какъ бы тамъ ни было, читатель не долженъ забывать, что логическое значеніе и дедуктивная связь формулъ нисколько не зависятъ отъ интерпретацій; чтобы облегчить для него это необходимое отвлеченіе, мы позаботились снабдить всѣ интерпретаціонныя фразы знаками „И. П.“ (интерпретація съ помощью понятій) и „И. Пр.“ (интерпретація съ помощью предложеній). Эти интерпретаціи будутъ служить лишь для того, чтобы сдѣлать формулы понятными, сообщить имъ бóльшую ясность и очевидность, но онѣ не будутъ служить ни въ какомъ случаѣ для доказательства; и можно эти интерпретаціи отбросить безъ вреда для логической строгости системы.

Съ цѣлью не предустанавливать никакой интерпретаціи, мы скажемъ, что буквы выражаютъ *термины*:

эти термины могутъ быть, смотря по обстоятельствамъ, понятіями или предложеніями.

3. Отношеніе включенія.

Алгебра логики, какъ всякая дедуктивная теорія, можетъ быть обоснована при помощи различныхъ системъ началъ [1]); мы выберемъ ту изъ нихъ, которая наиболѣе приближается къ изложенію Шрёдера и къ обычной логической интерпретаціи.

Основное отношеніе, разсматриваемое въ этомъ исчисленіи, есть отношеніе двоичное (о двухъ терминахъ), называемое *включеніемъ* (для классовъ), *подчиненіемъ* (для понятій), или *выводомъ* (для предложеній). Мы выбираемъ первое изъ этихъ названій, какъ безразличное по отношенію къ двумъ логическимъ интерпретаціямъ; мы будемъ выражать это отношеніе знакомъ $<$, потому что оно обладаетъ свойствами, формально аналогичными свойствамъ математическаго отношенія $<$ (меньше), или, точнѣе, отношенія $\leqq$, между прочимъ,— отсутствіемъ свойства симметричности. Въ виду этой аналогіи Шрёдеръ изображалъ это отношеніе знакомъ $\overline{\in}$, котораго мы не будемъ употреблять, въ виду того, что онъ является составнымъ, между тѣмъ какъ отношеніе включенія есть отношеніе простое.

Въ системѣ началъ, которую мы избираемъ, это отношеніе принимается, какъ понятіе простое и, слѣдовательно, *не опредѣляемое.* Слѣдующія разъясненія, не преслѣдуя цѣлей опредѣленія, предназначены лишь для того, чтобы указать смыслъ разсматриваемаго отношенія въ каждой изъ двухъ интерпретацій.

И. П.: Отношеніе $a < b$, гдѣ a и b означаютъ понятія, выражаетъ, что понятіе a подчинено понятію b, т. е. представляетъ одинъ изъ видовъ по отношенію къ роду b. Съ точки зрѣнія объема оно означаетъ, что классъ a

[1]) См. *Huntington,* Sets of independent postulates for the Algebra of Logic, ap. Transactions of the American Mathematical Society t. V. 1904, 288—309.

содержится въ классѣ b, или составляетъ часть его; или, короче, что „всякое a есть b“. Съ точки зрѣнія содержанія оно означаетъ, что понятіе b содержится въ понятіи a, или составляетъ часть его, и что, слѣдовательно, изъ признаковъ a вытекаютъ признаки b. Примѣръ: „каждый человѣкъ смертенъ“; „человѣкъ заключаетъ въ себѣ смертный“; „кто говоритъ—человѣкъ, говоритъ—смертный“; или просто: „человѣкъ, значитъ—смертный“.

И. Пр. : Отношеніе $a < b$, гдѣ a и b означаютъ предложенія, выражаетъ, что предложеніе a заключаетъ или имѣетъ своимъ слѣдствіемъ предложеніе b. Это выражаютъ часто условнымъ сужденіемъ: „если вѣрно a, то вѣрно b“, или „изъ a слѣдуетъ b“; или, проще: „a, слѣдовательно b“. Отсюда видимъ, что въ обѣихъ интерпретаціяхъ отношеніе $<$ можно перевести, приблизительно, словомъ *слѣдовательно*.

Примѣчаніе. При всякой интерпретаціи терминовъ a и b отношеніе „$a < b$“ представляетъ предложеніе. Поэтому, если члены отношенія $<$, въ свою очередь, представляютъ (оба или одинъ изъ нихъ) подобныя отношенія, то разсматриваемое отношеніе можетъ быть понимаемо лишь въ смыслѣ интерпретаціи предложеній, т. е. можетъ означать лишь выводъ.

Называютъ предложеніе *первичнымъ*, если оно представляетъ отношеніе, котораго члены суть простые термины (буквы); *вторичнымъ*,—если члены суть первичныя предложенія, и т. д.

Отсюда видно, что интерпретація съ помощью предложеній болѣе однородна, чѣмъ интерпретація съ помощью понятій, потому что она одна позволяетъ давать связкѣ $<$ одинъ и тотъ же смыслъ въ предложеніяхъ первичныхъ и вторичныхъ.

4. Опредѣленіе равенства.

Существуетъ еще другая связка, которую можно опредѣлить съ помощью первой: это связка $=$ (равняется). По опредѣленію имѣемъ

$$a = b$$

всякій разъ, когда вмѣстѣ

$$a < b, \quad b < a,$$

и только въ такомъ случаѣ; иначе говоря, отношеніе „$a = b$“ равносильно двумъ совмѣстнымъ отношеніямъ „$a < b$,“ „$b < a$“.

Смыслъ связки = въ двухъ интерпретаціяхъ устанавливается ея формальнымъ опредѣленіемъ:

И. П. : $a = b$ означаетъ, что „всякое a есть b и всякое b есть a“; иначе говоря, что классы a и b совпадаютъ, тождественны [1]).

И. Пр. : $a = b$ означаетъ, что изъ a слѣдуетъ b и изъ b слѣдуетъ a; иначе говоря, что предложенія a и b эквивалентны, т. е. вмѣстѣ вѣрны или вмѣстѣ ложны [2]).

Примѣчаніе. Отношеніе равенства симметрично въ силу самого опредѣленія: $a = b$ равносильно $b = a$. Но отношеніе включенія несимметрично: $a < b$ не равносильно $b < a$ и не содержитъ его. Можно условиться разсматривать запись $a > b$, какъ равносильную $b < a$; но мы предпочитаемъ, для большей ясности, сохранить за связкой одинъ и тотъ же смыслъ во всѣхъ случаяхъ. Только на словахъ мы можемъ включеніе „$a < b$“ передавать то какъ „a содержится въ b“, то какъ „b содержитъ a“.

Чтобы не предустанавливать никакой интерпретаціи, мы назовемъ первый членъ этого отношенія *предыдущимъ*, а второй *послѣдующимъ*.

И. П. : Предыдущій есть *подлежащее*, а послѣдующій—*сказуемое* общаго утвердительнаго предложенія.

И. Пр. : Предыдущій есть *посылка*, или *причина*, а послѣдующій — *слѣдствіе*. Когда выводъ передается,

---

[1]) Это не значитъ, что понятія a и b имѣютъ тотъ же смыслъ. Примѣры: „треугольникъ“ и „трехсторонникъ“, „равноугольный треугольникъ“ и „равносторонній треугольникъ“.

[2]) Это не значитъ, что они имѣютъ тотъ же смыслъ. Примѣръ: „треугольникъ ABC имѣетъ двѣ равныхъ стороны“ и „треугольникъ ABC имѣетъ два равныхъ угла“.

какъ *гипотетическое* (или условное) сужденіе, то предыдущій называется *гипотезой* (или *условіемъ*), а послѣдующій *тезисомъ*.

Когда намъ нужно будетъ доказать равенство, мы будемъ чаще всего разлагать его на два взаимно-обратныхъ включенія, которыя будемъ доказывать отдѣльно. Иногда дѣлаютъ такое разложеніе равенства и въ тѣхъ случаяхъ, когда оно является даннымъ (*посылкой*).

Если части равенства суть предложенія, оно разлагается на два вывода; если одинъ изъ нихъ представляетъ *теорему*, то другой будетъ *обратной теоремой*. Такимъ образомъ, всякій разъ, когда теорема имѣетъ обратную, она даетъ мѣсто логическому равенству. Простая теорема даетъ мѣсто выводу, предыдущій котораго есть гипотеза, а послѣдующій—тезисъ теоремы.

Часто называютъ гипотезу *достаточнымъ условіемъ* для тезиса, а тезисъ *необходимымъ условіемъ* для гипотезы: дѣйствительно, достаточно, чтобы гипотеза была вѣрна, для того, чтобы былъ вѣренъ тезисъ; вмѣстѣ съ тѣмъ необходимо, чтобы тезисъ былъ вѣренъ, если вѣрна гипотеза. Когда теорема имѣетъ обратную, то говорятъ, что гипотеза ея есть условіе, необходимое и достаточное для тезиса: это значитъ, что гипотеза служитъ вмѣстѣ и причиной и слѣдствіемъ тезиса.

5. Принципъ тождества.

Первый принципъ, или аксіома, алгебры логики это *принципъ тождества*, который выражаютъ такъ:

$$a < a \tag{I}$$

при всякомъ a.

И. П. : „Всякое a есть a“, т. е. всякій классъ заключается въ самомъ себѣ.

И. Пр. : „изъ a слѣдуетъ a“, т. е. изъ каждаго предложенія слѣдуетъ это самое предложеніе. Такова первоначальная формула принципа тождества; изъ нея можно вывести, съ помощью опредѣленія равенства, другую формулу, которую часто, совершенно напрасно, принимаютъ за выраженіе принципа тождества: при всякомъ *a*

$$a = a.$$

Дѣйствительно, изъ того, что

$$a < a,\ a < a,$$

слѣдуетъ непосредственно, что

$$a = a.$$

И. П. : Классъ *a* тождественъ самъ съ собою.

И. Пр. : Предложеніе *a* эквивалентно себѣ самому.

6. Принципъ силлогизма.

Второй принципъ алгебры логики—это *принципъ силлогизма*, который выражается такъ

$$\text{(II)} \qquad (a < b)\ (b < c) < (a < c).$$

И. П. : „Если всякое *a* есть *b*, и всякое *b* есть *c*, то всякое *a* есть *c*". Это принципъ *категорическаго силлогизма.*

И. Пр. : „Если изъ *a* слѣдуетъ *b*, и изъ *b* слѣдуетъ *c*, то изъ *a* слѣдуетъ *c*". Это принципъ *гипотетическаго силлогизма.*

Мы видимъ, что въ вышеприведенной формулѣ главная связка всегда имѣетъ смыслъ вывода, потому что формула эта представляетъ предложеніе вторичное.

Въ силу опредѣленія равенства, изъ принципа силлогизма вытекаютъ слѣдующія формулы [1]):

$$(a < b)\ (b = c) < (a < c),$$
$$(a = b)\ (b < c) < (a < c),$$
$$(a = b)\ (b = c) < (a = c).$$

Заключеніе представляетъ равенство лишь въ томъ случаѣ, когда обѣ посылки суть равенства.

---

[1]) Строго говоря, эти формулы предполагаютъ законы умноженія, которые будутъ установлены ниже; но мы нашли нужнымъ привести ихъ здѣсь, для сближенія ихъ съ принципомъ силлогизма, изъ котораго онѣ получаются.

Предыдущія формулы можно обобщить такъ:

$$(a < b)\ (b < c)\ (c < d) < (a < d),$$
$$(a = b)\ (b = c)\ (c = d) < (a = d).$$

Это двѣ главныя формы *сорита;* можно еще придумать много другихъ комбинацій. Заключеніе въ формѣ равенства получается лишь въ томъ случаѣ, когда всѣ посылки суть равенства; это замѣчаніе имѣетъ важное практическое значеніе. Въ ряду выводовъ должно обращать особое вниманіе на то, дѣлается ли переходъ отъ одного предложенія къ другому на основаніи эквивалентности, или только вывода. Эквивалентность крайнихъ предложеній имѣетъ мѣсто лишь въ случаѣ, когда всѣ промежуточные переходы сдѣланы на основаніи эквивалентности; въ случаѣ же противоположномъ, если въ цѣпи заключеній есть хоть одинъ простой выводъ, отношеніе крайнихъ предложеній представляетъ также лишь простой выводъ.

7. Умноженіе и сложеніе.

Въ алгебрѣ логики разсматриваются три дѣйствія: логическое умноженіе, логическое сложеніе и отрицаніе. Первыя два суть дѣйствія двоичныя, т. е. соединенія *двухъ* терминовъ, дающія въ результатѣ третій терминъ (отличный отъ каждаго изъ нихъ или нѣтъ). Существованіе логическаго *произведенія* и логической *суммы* двухъ терминовъ должно быть предметомъ двухъ постулатовъ, потому что для существованія вещи не достаточно ея опредѣленія. Вотъ какъ можно формулировать эти два постулата.

III. Для каждыхъ двухъ терминовъ a и b существуетъ такой терминъ p, что

$$p < a,\ p < b,$$

и что для всякаго термина x, для котораго

$$x < a,\ x < b,$$

будетъ также

$$x < p.$$