Горт В.

Дифференциальные уравнения

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
Г67

Горт В.
Г67 Дифференциальные уравнения / Горт В. – М.: Книга по Требованию, 2021. – 480 с.

ISBN 978-5-458-27537-8

Предлагаемая вниманию русского читателя книга Горта представляет собою богатое собрание задач, решаемых с помощью дифференциальных уравнений. Задачи эти в большинстве случаев технического характера, часть их взята из физики и других наук о природе. Кроме решения уравнений путём интегрирования в этой книге много внимания уделено приближённому вычислению графическим методом, а также применению механизмов для интегрирования. Книги безусловно ценна богатством материала, содержащегося в ней. Естественно однако, что в пределах одного тома полный охват всего этого материала невозможен.

ISBN 978-5-458-27537-8

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Часть вторая.

Дифференциальные уравнения с частными производными.

Часть третья.

Основы вариационного исчисления.

Часть четвертая

Введение в теорию линейных интегральных уравнений.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предлагаемая вниманию русского читателя книга Горта представляет собою богатое собрание задач, решаемых с помощью дифференциальных уравнений. Задачи эти в большинстве случаев технического характера, часть их взята из физики и других наук о природе. Кроме решения уравнений путем интегрирования в этой книге много внимания уделено приближенному вычислению графическим методом, а также применению механизмов для интегрирования. Книга безусловно ценна богатством материала, содержащегося в ней. Естественно однако, что в пределах одного тома полный охват всего этого материала невозможен.

Автор сознательно пренебрегал во многих случаях чисто теоретической стороной дела. Так, он не рассматривает сходимости получаемых рядов. Точно так же он оставляет в стороне вопрос о законности тех или иных операций, которые он по ходу решения задачи должен применить. За всем этим он рекомендует обращаться к соответственным учебникам теоретического характера.

В оправдание занимаемой им позиции автор приводит слова Н. Буркхарда, утверждающего, что техническую математику нужно рассматривать как один из отделов естествознания. Более тонкие теоретические рассуждения можно при этом опускать, надеясь на то, что ошибка, получившаяся благодаря нестрогости рассуждения, будет замечена при сличении вывода с действительностью.

В основном такая точка зрения правильна.

Точная математическая теория не лишняя — она существенно важна для полной проверки полученных результатов. Особенно важна она в таких вопросах, где проверка опытом затруднительна. Но она не столь важна при нахождении правильных результатов. История науки, начиная от Ньютона до Фурье и других математиков XIX столетия, полна примерами того, как весьма нестрогими методами люди приходили к совершенно верным результатам. Особенно часто это было в прикладных частях математики: действительность — надежный руководитель.

По поводу русского издания нужно отметить следующее.

Перевод не всегда в точности совпадает с оригиналом, но в основном довольно близок. Несколько сокращен отдел приближенного интегрирования уравнений. Хотя этот отдел и весьма существенен, но предлагаемые автором способы не всегда хороши. Кроме того на русском языке имеется по этому вопросу прекрасная книга академика А. Н. Крылова, а в ближайшем будущем издаются книги, специально посвященные этому вопросу.

При переводе исправлено значительное количество промахов автора, иногда неожиданно грубых. Чтобы не быть голословными, приведем два примера: на стр. 83 автор, говоря о дифференциальных уравнениях 2-го порядка, утверждает, что общий интеграл любого такого уравнения составляется из двух частных интегралов путем умножения на произвольные постоянные и сложения. В конце § 33 он считает правильным равенство:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^n} \cdot \frac{d^n y}{dt^n}$$

при $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — некоторая, вообще говоря, не линейная функция от t.

Несмотря на многие недостатки, свойственные книге в оригинале, она содержит столь большой и интересный материал, что должна принести пользу обширному кругу людей, соприкасающемуся с техникой и математикой.

Перевод выполнен частью мной, частью преподавателями Ленинградского гидротехнического института И. Н. Либерманом и А. С. Ушаковым.

Р. Кузьмин.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

I. ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Общие положения о координатах и функциях. Существуют учебники дифференциального и интегрального исчислений, а также и дифференциальных уравнений, в которых не встречается никаких чертежей. Это возможно потому, что геометрические представления для построения названных дисциплин не абсолютно необходимы.

Однако несомненно, что употребление геометрических представлений чрезвычайно облегчает понимание нашей задачи.

Последующие предварительные замечания должны служить пояснениями этих представлений.

I. В прямоугольной системе координат существуют следующие направления (рис. 1):

$O+X$	соответствует	положительному направлению оси	x-ов,
$O-X$	„	отрицательному	x-ов,
$O+Y$	„	положительному	y-ов,
$O-Y$	„	отрицательному	y-ов,

а также квадранты I, II, III, IV.

Знаки координат какой-нибудь точки в соответствующем квадранте таковы:

I	квадрант:	$+\,+$
II	„	$-\,+$
III	„	$-\,-$
IV	„	$+\,-$

Стрелка 1 — 2 обозначает положительный смысл вращения или положительное направление вращения в плоскости xy.

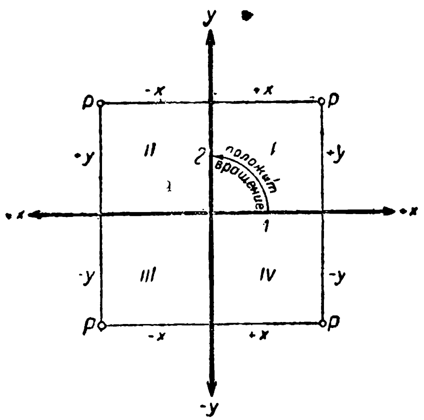

Рис. 1.

II. Уравнение

$$y=f(x) \qquad (1)$$

читается: ордината y есть функция абсциссы x или, короче: y равна функции x.

Величины x и y называются переменными: x независимой, y зависимой переменной. *

* Смысл этих названий можно представить себе так: если точка M движется по кривой, то ее координаты x и y постепенно изменяются. При этом, придавая x любые, например, равномерно возрастающие значения x, мы можем по ним вычислить соответствующие значения y.

Независимая переменная называется также **аргументом** функции.

Функция $y=f(x)$ изображается в плоскости xy кривой CC (рис. 2). Говорят также: кривая $y=f(x)$. С другой стороны, каждая графически заданная линия CC определяет функцию y от x, которую можно также определить аналитически.

Следующие точки кривой или значения функции являются отличительными:

$f(0)$ — то значение функции $f(x)$, которое она принимает, если ее аргумент принимает значение $x=0$.

Оно графически определяется точкой пересечения кривой с осью y-ов.

Если сверх того решение уравнения

$$f(x)=0 \tag{2}$$

относительно x дает одно или несколько значений $x=x_1, x_2, \ldots$, то эти значения называются **нулями функции**. Графически они дают точки пересечения кривой с осью x-ов.

Значения x, при которых значение функции становится бесконечным, называются **полюсами функции** (рис. 3).*

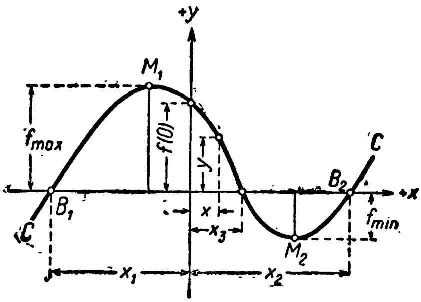

Рис. 2.

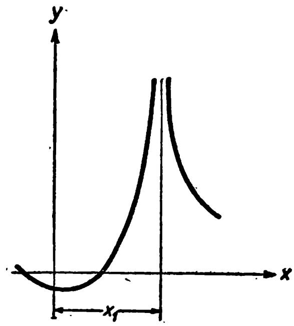

Рис. 3.

Соответственные кривые имеют в полюсах асимптоту, которая параллельна оси y-ов.

Точки M_1 и M_2, в которых кривая имеет горизонтальные касательные, называются **экстремальными точками**. Соответствующие им значения функции называются **экстремальными**. Существуют два различных вида экстрем: maxima и minima, об отличительных признаках которых будет сказано ниже.

III. Функции $f(x)$ разделяются на: a) алгебраические и b) трансцендентные.

a) Первые есть такие функции, которые могут быть получены путем применения четырех действий и извлечения корня из переменных величин x. **

Они разбиваются на несколько подразделений:

1. Рациональные целые функции, например

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3. \tag{3}$$

* Эта терминология не совсем общепринята. Так например, в теории функций комплексного переменного слово „полюс функции" имеет несколько иное значение.

** При этом подразумевается, что эти действия применяются конечное число раз.

2. Рациональные дробные функции, например

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3}. \tag{4}$$

3. Иррациональные функции, например

$$\sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2}, \tag{5}$$

или

$$a_0 + a_1x^{\frac{1}{m}} + b_1x^{\frac{1}{m+1}}, \tag{6}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt[m]{b_0 + b_1x + b_2x^2}}. \tag{7}$$

b) К трансцендентным функциям принадлежат, как их простейшие представители: логарифмические $\lg x$, показательные e^x, тригонометрические прямые $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, и обратные: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, а также гиперболические $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{ctgh} x$.

К ним присоединяется еще бесконечное множество дальнейших видов. Общий отличительный признак трансцендентных функций может быть дан только отрицательный: все функции, которые не являются рациональными или иррациональными, трансцендентны. *

IV. Особым видом изображения функции $f(x)$ является бесконечная сумма и бесконечное произведение.

Первая пишется в форме:

$$y = \sum_n a_n f_n(x), \tag{8}$$

последнее пишется таким образом:

$$y = \prod_n a_n f_n(x), \tag{9}$$

при этом для коэффициентов a_n и для функций $f_n(x)$ должен быть указан закон их образования.

Оба вида представлений, как сумма, так и произведение, являются важными вспомогательными средствами для численного вычисления функций, особенно трансцендентных.

V. a) Переменная y может быть задана как функция от переменного x уравнением:

$$f(x, y) = 0. \tag{10}$$

Такое уравнение определяет y как функцию от x даже и в том случае, если оно неразрешимо относительно y обычными способами.

---

* Другая отличительная особенность трансцендентных функций заключается в том, что вычисление их значений приходится находить из таблиц, в то время как для алгебраических существуют сравнительно удобные правила. Например, значения $\sin 35^0$, $\lg 7{,}2^{1,37}$ и т. д. находим с помощью логарифмических таблиц, а $\sqrt{140}$, 23^3 и т. д. находятся непосредственным вычислением.

Этот способ задания функции называется **неявным** способом определения y как функции от x.

b) Существует еще один способ выражения функциональной зависимости величин y и x — параметрический. Он состоит в том, что обе переменные x и y выражаются через третью вспомогательную переменную t, называемую параметром:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t). \tag{11}$$

Если исключить t из этих уравнений, то получится непосредственная зависимость между x и y. Во многих случаях оказывается удобнее, однако, изучать зависимость между x и y из уравнений (11), не производя исключения переменной t.

§ 2. Графическое суммирование функции $y = a$.

На рис. 4 прямая A проведена на расстоянии $+a$ от оси абсцисс. Ее уравнение имеет вид:

$$y = a. \tag{1}$$

Проведем вертикальную прямую с абсциссой x. Она, вместе с осью ординат, образует между осью абсцисс и прямой A площадь F в виде прямоугольника. Выражая эту площадь через x, находим:

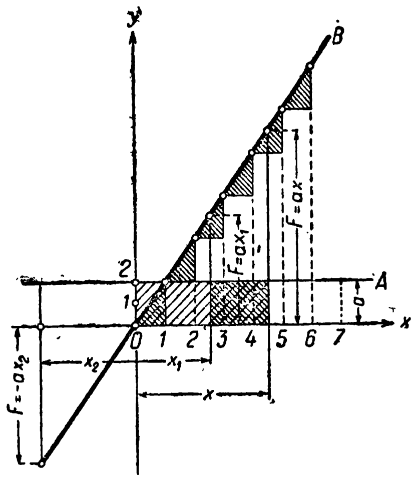

Рис. 4.

$$F = ax. \tag{2}$$

Эта площадь обращается в нуль при $x = 0$ и возрастает до бесконечности одновременно с x. Каждому значению переменной x соответствует определенное значение площади F. Таким образом площадь прямоугольника F есть функция от x. Эта функция графически изображается прямой $y = ax$, проведенной таким образом, что при каждом значении x ордината прямой измеряется тем же числом (в линейных мерах), что и площадь прямоугольника F, отрезаемого этой ординатой (при этом F естественно измеряется в квадратных мерах).

Линию $y = ax$ построим по точкам. При

$$x = 0, \ \frac{1}{2}, \ 1, \ 2, \ 3,$$

соответствующие значения F, а следовательно и y, оказываются такими:

$$y = 0, \ \frac{a}{2}, \ a, \ 2a, \ 3a,$$

Нанося эти значения, получаем прямую OB. Последовательные значения тех ординат этой прямой, абсциссы которых возрастают на единицу, можно получать одну за другой, прибавляя величину a, т. е. ординату прямой $y=a$. Таким образом ординаты прямой OB получаются графическим сложением ординат данной прямой $y=a$. Прямую OB можно назвать графиком площади для данной прямой. Зная прямую OB, можем легко получить площадь какого нибудь прямоугольника, ограниченного Ox, данной прямой и двумя вертикалями с абсциссами x и x_1:

$$F_x - F_{x_1} = ax - ax_1 = a(x - x_1). \tag{3}$$

Таким образом искомая площадь получается вычитанием двух ординат графика площади: из ординаты с абсциссой x вычитается ордината с абсциссой x_1.

Изложенное справедливо также и для прямоугольников, расположенных над отрицательной осью Ox. При этом следует считать только, что площадь, расположенная налево от оси OY между прямой $y=a$ и Ox до

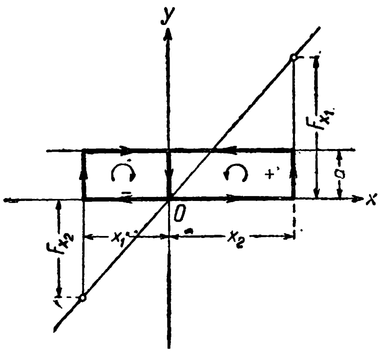

Рис. 5.

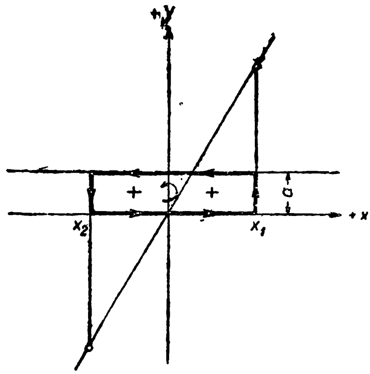

Рис. 6.

вертикали с отрицательной абсциссой $-x_2$, сама отрицательна и равна $-ax_2$.

С этим связано то обстоятельство, что получаются различные направления обхода, если обходят периметр, начиная от O, и идут сначала по отрезку абсцисс. Периметр прямоугольника над $+x_1$ вследствие этого будет описываться в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, величина прямоугольника над $-x_2$ — по направлению часовой стрелки. Мы считаем, что прямоугольники первого рода положительны, а второго рода — отрицательны (рис. 5).

Отсюда вытекает, что сложение ординат, расположенных слева от оси Oy, дает отрицательные величины. Тогда вышеупомянутые формулы могут быть непосредственно перенесены и на новый случай. Это даст площадь прямоугольника между ординатами с абциссами x_1 и x_2:

$$F_{x_1 - x_2} = F_{x_1} - F_{x_2} = ax_1 - (-ax_2) = a(x_1 + x_2). \tag{4}$$

Получается таким образом положительная величина, что не противоречит вышеизложенному, ибо в вышенаписанной формуле (4) площадь прямоугольника, при обходе от точки с абсциссой $x = -x_2$ и идя вперед в направлении оси Ox, будет положительной (рис. 6).

В предыдущем графическое сложение ординат прямой $y = a$ имело исходным пунктом начало координат. Но можно начать и с любой другой точки. Площадь прямоугольника F изменится от этого на некоторую постоянную b, равную величине F при $x = 0$, и будет выражаться формулой:

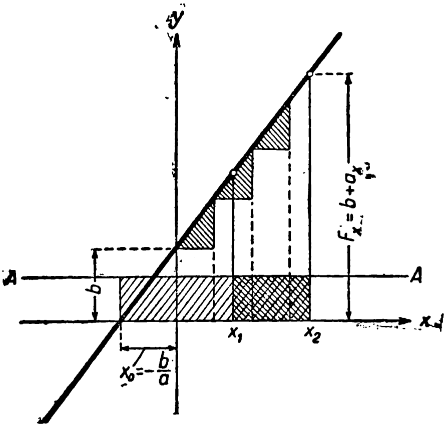

Рис. 7.

$$F = b + ax. \tag{5}$$

Исходной точкой при этом будет та, где $F = 0$, т. е. абсцисса начала отсчета x_0 будет равна $-\frac{b}{a}$.

Найденное раньше правило вычисления площадей прямоугольников остается очевидно в силе:

$$F_x - F_{x_1} = (b + ax) - (b + ax_1) = a(x - x_1). \tag{6}$$

§ 3. Графическое суммирование функции $y = a + bx$. Как новый пример, рассмотрим дальнейшую задачу — определим площадь трапеции, ограниченной прямой AA, осью абсцисс и двумя ординатами y и y_1. Возьмем (рис. 8) на оси абсцисс несколько точек, расположенных на равных между собою расстояниях, например равных единице. Затем наносим среднюю высоту трапеции 01 на ординате 1; сумму средних высот трапеций между 01 и 12— на ординате 2 и т. д. Трапеции между точками O и C_{-2} должны считаться отрицательными, трапеции между C_{-2} и $-\infty$ опять положительными, как это следует из вышеустановленных положений о смысле направления вращения.

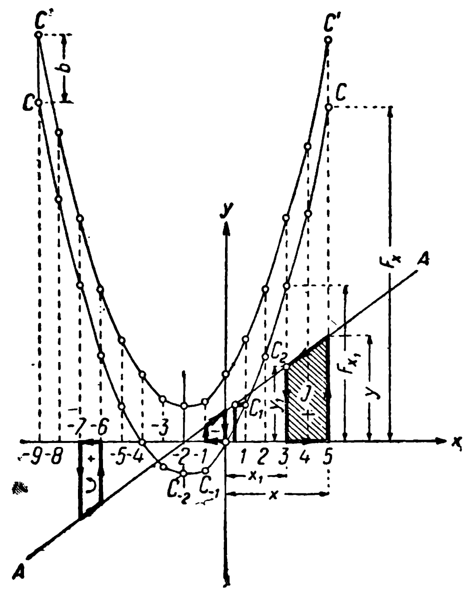

Рис. 8.

Средняя высота трапеции 0—1 откладывается на ординате —1 в направлении отрицательных y-ов; сумма средних высот трапеции 0—1 и треугольника—1—2—по ординате—2. Площадь последующего треугольника—2—3 считается положительной и должна быть отложена в положи-