

В. Я. Буняковский

**Основания математической теории
вероятностей**

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
В11

В11 **В. Я. Буняковский**
Основания математической теории вероятностей / В. Я. Буняковский – М.: Книга по Требованию, 2024. – 502 с.
ISBN 978-5-458-56989-7

ISBN 978-5-458-56989-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

предмету особеннымъ затрудненіямъ, доступна весьма немногимъ. Учёныя изслѣдованія другихъ знаменитыхъ геометровъ, преимущественно *Эйлера*, *Лагранжа* и *Поассона* также были мнѣ полезны. У послѣдняго я заимствовалъ изложеніе математической теоріи Судопроизводства. Относительно другихъ моихъ трудовъ, ограничусь ссылкой на нѣкоторыя критическія замѣчанія, помѣщенные въ моей книгѣ, а также на измѣненія при выводѣ многихъ формулъ и на перемѣны, которымъ я призналъ полезнымъ подвергнуть въ разныхъ случаяхъ общеупотребляемые аналитическіе приёмы. Преимущественно обращаю вниманіе на Главы VII и X. Читатель самъ замѣтитъ эти измѣненія при внимательномъ чтеніи многихъ статей въ моей книгѣ, и при сличеніи ихъ съ изложеніемъ въ другихъ, извѣстныхъ сочиненіяхъ. Болѣе обширныя изслѣдованія, собственно мнѣ принадлежащія, сопровождаются указаніями въ самомъ текстѣ. Сдѣлаю еще одно замѣчаніе. Такъ какъ до сихъ поръ у насъ не было никакого отдѣльнаго сочиненія, ни даже перевода объ Математической Теоріи Вѣроятностей, то мнѣ предстоялъ трудъ писать на Русскомъ языкѣ о предметѣ, для котораго мы не имѣли установленныхъ употребленіемъ оборотовъ и выраженій. Не смѣю надѣяться, чтобы я создалъ для Анализа Вѣроятностей языкъ, совершенно удовлетворительный по своей простотѣ и опредѣлительности; но, во всякомъ случаѣ, мнѣ пріятна та увѣренность, что я приложилъ всѣ старанія по возможности приблизиться къ этой цѣли.

Окончу изъясненіемъ желанія, чтобы предлагаемое сочиненіе послужило къ распространенію между моими соотечественниками здравыхъ понятій и полезныхъ практическихъ истинъ. И если даже нѣкоторые изъ моихъ читателей не будутъ имѣть достаточнаго математическаго образованія для того чтобы слѣдить за аналитическимъ изложеніемъ всѣхъ теорій, составляющихъ

предметъ Ученія о Вѣроятностяхъ, то и для нихъ внимательное чтеніе моей книги не останется безполезнымъ. Въ ней почерпнуть они разнообразныя, общепримѣнительныя результаты, которые покажутъ имъ, въ настоящемъ ихъ свѣтѣ, многіе занимательныя вопросы и истины, касающіеся нашей общественной жизни.



ПОДРОБНОЕ СОДЕРЖАНИЕ КНИГИ.

ВВЕДЕНИЕ.....	стр. 1.
ГЛАВА I. О законах вѣроятности вообще [отъ N° 1 до 16].....	стр. 5.
ОБЩІЯ ПРАВИЛА ДЛЯ ОПРЕДѢЛЕНІЯ ВѢРОЯТНОСТИ.....	стр. 3.
Опредѣленіе вѣроятности. Вычисленіе вѣроятности при неравновозможныхъ статочностяхъ. Примѣненіе къ игрѣ, называемой <i>орлянку</i> . Погрѣшность <i>Д'Аламберта</i> . Вѣроятности сложныхъ событій: 1 ^о когда составляющія простыя событія независимы между собою, и 2 ^о въ случаѣ взаимной ихъ зависимости. Отношеніе между вѣроятностями сложнаго, наблюдаемаго и будущаго событій. Относительная вѣроятность. Правило для ея опредѣленія	отъ N° 1 до 6.
ОБЩІЯ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНІЯ ВѢРОЯТНОСТИ ПРИ ПОВТОРЕНІИ И ПРИ КАКОМЪ НИ ЕСТЬ СОВОКУПЛЕНІИ СОБЫТІЙ.....	стр. 14.
Опредѣленіе вѣроятности повторенія одного событія, или извѣстнаго совокупленія двухъ событій при данномъ числѣ испытаній. Распространеніе найденныхъ правилъ на случай трехъ и вообще какого нм есть числа событій. Формулы служащія для опредѣленія вѣроятности, что одно или нѣсколько простыхъ событій повторятся не менѣе даннаго числа разъ при извѣстномъ числѣ испытаній	отъ N° 7 до 9.
ПРИЛОЖЕНІЕ ПРЕДЪИДУЩИХЪ ФОРМУЛЪ КЪ ЧИСЛЕННОМУ РѢШЕНІЮ НѢКОТОРЫХЪ ВОПРОСОВЪ.....	стр. 20.
Въ этой статьѣ рѣшены, для упражненія, семь простыхъ вопросовъ, изъ которыхъ послѣдній, предложенный <i>Паскалю</i> Кавалеромъ <i>Мере</i> , примѣчателенъ тѣмъ что принадлежитъ къ числу первоначальныхъ изслѣдованій въ Теоріи Вѣроятностей. Задача <i>Мере</i> предлагается въ слѣдующемъ видѣ:	
<i>Найти сколько разъ должно бросить доп кости при томъ условіи, чтобы оролтность вскрытія двѣнадцати очковъ, или, что всё равно, одновременнаго появленія нумера 6 на обѣихъ костяхъ, равнялась $\frac{1}{2}$.</i>	
Объясненіе погрѣшности Кавалера <i>Мере</i> при рѣшеніи этого вопроса.....	отъ N° 10 до 16.
ГЛАВА II. О законахъ вѣроятности при неопредѣленномъ повтореніи испытаній [отъ N° 17 до 30].....	стр. 25.
О СЛОЖНЫХЪ СОБЫТІЯХЪ, НАИБОЛѢЕ ВѢРОЯТНЫХЪ.....	стр. 28.
Объ навѣроятнѣйшемъ сложномъ событіи, составленномъ изъ кратнаго совокупленія двухъ простыхъ. Доказательство различныхъ свойствъ разложенія $(a+b)^m$, отъ которыхъ это опредѣленіе зависитъ. Примѣръ обнаруживающій, что абсолютныя вѣроят-	а

ности правдоподобнѣйшихъ событій уменьшаются съ увеличеніемъ числа испытаній. Напротивъ того, относительная вѣроятность правдоподобнѣйшаго событія къ какому ни есть другому, возрастаетъ съ числомъ испытаній. Распространеніе этихъ слѣдствій на общій случай.....отъ N^o 17 до 19.

ТЕОРЕМА ЯКОВА БЕРНУЛЛИ..... стр. 54.

Объясненіе примѣрами и изложеніе теоремы *Якова Бернулли*. Этотъ общій законъ, въ отношеніи къ двумъ событіямъ, можетъ быть выраженъ въ слѣдующемъ видѣ:

При неопредѣленномъ повтореніи испытаній, изъ которыхъ каждое приводитъ къ одному изъ двухъ простыхъ событій А или В, отношеніе между числами появленій этихъ событій непрерывно приближается къ отношенію ихъ простыхъ вероятностей, и, наконецъ, при надлежащемъ числѣ испытаній, разстоетъ отъ него какъ угодно мало..... N^o 20.

Формула *Стirlinga* для приблизительнаго вычисленія произведенія 1.2.3...х..... N^o 21.

Подробное доказательство теоремы *Якова Бернулли*. Различныя разложенія въ безконечные ряды интеграловъ $\int_0^t e^{-t^2} dt$ и $\int_t^\infty e^{-t^2} dt$, входящихъ въ выраженія вѣроятностей. Примѣчаніе объ употребленіи безконечныхъ рядовъ, сходящихся въ первыхъ своихъ членахъ, но расходящихся въ дальнѣйшихъ. Разборъ различныхъ слѣдствій, представляющихся при аналитическомъ доказательствѣ *Бернулли* предложенія.....отъ N^o 22 до 23.

Примененіе теоремы *Якова Бернулли* къ численнымъ примѣрамъ..... N^o 26.

Распространеніе ея на произвольное число событій..... N^o 27.

ИЗСЛѢДОВАНИЕ ОДНОГО ЧАСТНАГО СЛУЧАЯ, ВЪ КОТОРОМЪ СТАТОЧНОСТИ ИЗМѢНЯЮТСЯ ВО ВРЕМЯ ИСПЫТАНІЙ..... стр. 85.

Изъ сосуда, заключающаго *a* шаровъ бѣлыхъ и *b* черныхъ, вынимаютъ наудачу, въ нѣсколько пріемовъ, каждый разъ по одному шару, при чемъ извлекаемые шары откладываются въ сторону. Найти вѣроятности различныхъ сложныхъ событій, которыя могутъ произойти при данномъ числѣ выемовъ. Опредѣленіе правдоподобнѣйшаго событія въ этомъ случаѣ. Факторіальный символъ. Примененіе найденныхъ формулъ къ рѣшенію въ которыхъ численныхъ вопросовъ.....отъ N^o 28 до 30.

Глава III. О математическомъ ожиданіи [отъ N^o 31 до 40]..... стр. 62.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМЪ РАВЕНСТВѢ ИЛИ БЕЗОБИДНОСТИ ВСЯКАГО РОДА ИГОРЪ, И О МѢРѢ МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОЖИДАНІЯ..... стр. 62.

Понятіе о математическомъ равенствѣ игры. Математическое ожиданіе или математическая выгода. Аналитическое доказательство общаго условія безобидности или математическаго равенства игры..... N^o 51.

Изложеніе и объясненіе примѣромъ правила безобиднаго дѣлежа..... N^o 52.

Примененіе условія безобидности къ раздѣлу ставки въ игрѣ, которая можетъ длиться неопредѣленно..... N^o 53.

Распространеніе правила математическаго равенства игры на произвольное число событій, появленіе которыхъ доставляетъ извѣстные выигрыши одному изъ двухъ игроковъ..... N^o 54.

ПРИЛОЖЕНІЕ ПРЕДЪИДУЩИХЪ ПРАВИЛЪ КЪ РѢШЕНІЮ РАЗНЫХЪ ВОПРОСОВЪ, ОТНОСЯЩИХСЯ КЪ ИГРѢ ВЪ КОСТИ, КЪ ЛОТЕРЕЯМЪ, ЗАКЛАДАМЪ И КЪ БЕЗОБИДНОМУ РАЗДѢЛУ СТАВКИ МЕЖДУ ИГРОКАМИ ДО ОКОНЧАНІЯ ИГРЫ..... стр. 74.

Въ этой статьѣ предлагается рѣшеніе слѣдующихъ общихъ вопросовъ:

Дано извѣстное число *n* одинаковыхъ костей; каждый изъ нихъ имѣетъ *m* граней, на которыхъ написаны нумера 1, 2, 3... до *m*. Спрашивается, въ какомъ отношеніи долж-

ны быть ставки двух игроков A и B , играющих на слѣдующемъ условіи: всѣ кости бросаются разомъ; если сумма вскрывшихся номеровъ равна определенному числу $s+1$, то выигрываетъ всю ставку игрокъ A , а если эта сумма не равна $s+1$, то ставка принадлежитъ игроку B .

Приложеніе найденнаго рѣшенія къ игрѣ, пѣтветной подъ названіемъ *passé-dix*.....

№ 55.

Лотерей состоитъ изъ s различныхъ номеровъ, изъ числа которыхъ n выходитъ при каждомъ ея розыгрышѣ. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что изъ m выбранныхъ номеровъ выйдетъ, при первомъ розыгрышѣ лотереи, 1 номеръ въ какомъ ни есть, не определенномъ напередъ порядкѣ.

Рѣшеніе того же вопроса, когда мѣста номеровъ назначаются предварительно.

Лотерей состоитъ изъ s номеровъ; при каждомъ ея розыгрышѣ выходитъ по n номеровъ. Спрашивается, какъ велика вѣроятность p , что въ m розыгрышей лотереи, всѣ, эти s номеровъ выйдутъ.

Приложеніе предъидущихъ рѣшеній къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ, и преимущественно къ такъ называемой Французской лотерей.....

№ 56.

Изъ определенного числа m монетъ вынимаются нѣсколько на-удачу. Игрокъ A держитъ закладъ, что число вынутыхъ монетъ нечетное, а B , напротивъ того, что это число четное. Спрашивается, въ какомъ отношеніи должны быть ставки игроковъ A и B для безобидности заклада?

Изъ определенного числа $2m$ монетъ, m серебряныхъ и m золотыхъ, вынимаются нѣсколько на-удачу. Спрашивается, какъ велика вѣроятность p , что вынутъ четное число монетъ, будетъ столько серебряныхъ сколько и золотыхъ.....

№ 57.

Рѣшеніе слѣдующихъ за симъ вопросовъ, болѣе сложныхъ, основано на Исчисленіи Конечныхъ Разностей, и преимущественно на интегрированіи уравненій въ частныхъ разностяхъ. Изложеніе правила, служащаго для приведенія къ уравненіямъ подобнаго рода вопросовъ. Математическое выраженіе судьбы игрока.

Два игрока A и B , равноискусные, поставили въ игру по-росну; тотъ изъ нихъ, кто первый выиграетъ известное число, наприимръ n очкоу, беретъ всю ставку. Но, по какой либо причинѣ, они должны прекратить игру, когда она еще не кончена: первому игроку не достаетъ x очкоу до n , а второму x' очкоу. Спрашивается, какъ раздѣлить ставку между игроками?

Распространеніе рѣшенія этого самаго вопроса на случай трехъ и большаго числа игроковъ, искусства которыхъ предполагаются различными.....

№ 58

Определить судьбу игрока A , который держитъ закладъ, что известное событіе повторится не менѣе данного числа разъ при определенномъ числѣ испытаній.....

№ 59.

Два игрока A и B , соответственныхъ искусства которыхъ изобразимъ чрезъ p и $1-p$, играютъ: первый, а жетоновъ, а второй, B жетоновъ, и играютъ въ какую либо игру на слѣдующемъ условіи. когда A проигрываетъ партію, то даетъ одинъ жетонъ игроку B , который, въ свою очередь, въ случаѣ проигрыша партіи, даетъ жетонъ своему противнику A . Игра оканчивается тогда только, когда одинъ изъ игроковъ проигрываетъ всѣ свои жетоны. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что игрокъ A выиграетъ всѣ жетоны у игрока B , предполагая что число сыгранныхъ партій не можетъ превысить условленнаго напередъ числа n

№ 40.

ГЛАВА IV. О нравственномъ ожиданіи [отъ № 41 до 46]..... стр. 103.

Понятіе о выгодѣ, называемой нравственною. Невозможность точнаго опредѣленія нравственной выгоды.....

№ 41.

a*

- Мѣра нравственнаго ожиданія, предложенная Бюфономъ..... № 42.
- Другая ея мѣра, употребленная Данииломъ Бернулли, и допускаемая донынѣ почти всѣми математиками. Определеніе нравственной выгоды по формулѣ Бернулли въ томъ случаѣ, когда эта выгода зависитъ отъ нѣсколькихъ ожидаемыхъ событій. Приложение къ застрахованіямъ, и доказательство пользы Страховыхъ Учрежденій при извѣстныхъ условіяхъ..... № 43.
- Изложеніе болѣе общей гипотезы относительно мѣры нравственнаго ожиданія. Основываясь на этой гипотезѣ, доказываютъ съ строгостію: 1° Невыгоду всякихъ игоръ и закладовъ, математически равныхъ. 2° Невыгоду лотерей при совершенной ихъ безобидности. 3° Когда предстоитъ надобность подвергать имущество какому либо опасностямъ, то выгоднѣе раздроблять его на части, чѣмъ въ цѣлости подвергать одной случайности. Напротивъ того, разсматриваніе одного математическаго ожиданія, приводитъ къ заключенію о безразличіи подвергать одинаковымъ опасностямъ какое либо имущество по частямъ или въ цѣлости..... № 44.
- Задача Петербургскія; историческія замѣчанія о ней. Ея изложеніе:
- Два игрока А и В играютъ въ извѣстную игру орелъ или рѣшетка на слѣдующихъ условіяхъ: 1° игра продолжается до тѣхъ поръ, пока не вскрыется орелъ, и 2° игрокъ В платитъ 2 червонца игроку А, если орелъ вскрыется при первомъ бросаніи монеты, 4 червонца, если при второмъ, 8 червонцевъ, если при третьемъ, и такъ далѣе до n-го бросанія, удваивая платимую сумму при каждомъ бросаніи. Спрашивается, сколько игрокъ А, при вступленіи въ игру, обязанъ заплатить игроку В для обоюдной безобидности.
- Рѣшеніе этого вопроса, основанное на разсматриваніи математическаго ожиданія. Кажущееся противорѣчіе, представляемое этимъ рѣшеніемъ. Объясненіе парадокса Кондорсетома. Рѣшеніе Петербургской задачи, основанное на формулѣ Даниила Бернулли. Другое рѣшеніе, предложенное Ноассономъ..... № 43.
- Нѣкоторые мысли объ употребленіи ожиданія нравственнаго, вмѣсто математическаго. № 46.

Глава V. О вліяніи на результаты Исчисленія Вѣроятностей неравновозможныхъ статочностей, принимаемыхъ за равновозможныя, и изслѣдованіе особаго рода соединеній, приводящихъ къ разсматриванію безконечнаго числа статочностей [№ 47 и 48].....стр. 123.

Какимъ образомъ неравновозможныя статочности, принимаемыя за равновозможныя, измѣняютъ результаты Исчисленія Вѣроятностей. Приложение къ игрѣ орелъ или рѣшетка. Изъ предлагаемаго рѣшенія оказывается, что при двукратномъ бросаніи монеты, вскрытіе одной и той же стороны, не указывая напередъ которой именно, вѣроятнѣе чѣмъ вскрытіе двухъ равныхъ сторонъ. Распространеніе зтого результата на какія ни есть событія. Общая формула, выражающая вліяніе неравновозможныхъ статочностей. Изъ нея слѣдуетъ, что неизвѣстное неравенство, существующее въ статочностяхъ, предполагаемыхъ равными, всегда увеличиваетъ вѣроятность повторенія однихъ и тѣхъ же событій. Приложение общей формулы къ слѣдующему вопросу:

Два игрока А и В согласились сыграть 3 партіи; спрашивается, который изъ двухъ случаевъ будетъ вѣроятнѣйшій: 1° что одинъ игрокъ выиграетъ всѣ три партіи, или 2° что одну партію выиграетъ одинъ игрокъ, а двѣ остальные другой, не назначая напередъ который именно..... № 47.

О вѣроятностяхъ, вычисляемыхъ а priori при безконечномъ числѣ статочностей. Для примѣра предлагается рѣшеніе слѣдующаго вопроса:

Определенная или неопределенная плоскость раздѣлена системою равноотстоящихъ параллельныхъ линій; на эту плоскость бросаютъ, на-удачу, весьма тонкій цилиндръ, данной длины, не превосходящей общаго разстоянія между параллельными линіями. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что цилиндръ, падал на плоскость, встрѣтитъ одно изъ сл дѣленій.

Рѣшеніе этого вопроса приводитъ къ значенію вѣроятности, равному $\frac{4r}{a\pi}$, гдѣ $2r$ означаетъ длину цилиндра, a разстояніе между параллельными линіями, а π , отношеніе полуокружности къ радіусу. Бросивъ значительное число разъ цилиндръ, и сосчитавъ сколько разъ онъ падалъ на которое нибудь изъ дѣленій, можно, въ силу теоремы Якова Бернулли, вычислить по приближенію трансцендентное число π . Дѣйствительно, для этого стоитъ только раздѣлить число встрѣчъ цилиндра съ дѣленіями на полное число бросаній, и потомъ найденное отношеніе уравнивать дробь $\frac{4r}{a\pi}$. Такимъ образомъ составится уравненіе, опредѣляющее величину π .

Рѣшеніе предъидущаго вопроса въ томъ предположеніи, что плоскость раздѣлена второю системою параллельныхъ линій, перпендикулярныхъ къ первымъ, или, иначе, что разсматриваемая плоскость покрыта системою равныхъ, сопряженныхъ между собою прямоугольниковъ. Вѣроятность въ этомъ случаѣ опредѣляется формулою $\frac{4r(a+b-r)}{\pi ab}$, гдѣ r , a , π имѣютъ прежнія значенія, а b изображаетъ общее разстояніе между параллельными линіями второй системы.....

№ 48.

ГЛАВА VI. Рѣшеніе нѣкоторыхъ особенныхъ вопросовъ изъ Анализа Вѣроятностей [отъ № 49 до 51].....стр. 132.

Дано полное уравненіе второй степени $x^2+px+q=0$, въ которомъ коэффициенты p и q , предполагаемые цѣлыми, могутъ измѣняться между предѣлами $-m$ и $+m$; сверхъ того, по причинѣ простоты случая, допускается, что ни p ни q не обращается въ нуль. При такихъ условіяхъ спрашивается, какъ велика вѣроятность, что уравненіе, написанное на-удачу, имѣетъ корни вещественные.....

№ 49.

Дана определенной или неопределенной величины плоскость, покрывал системою сопряженныхъ между собою равностороннихъ треугольниковъ; на эту плоскость бросаютъ, на-удачу, весьма тонкій цилиндръ, известной длины. Определить вѣроятность, что цилиндръ упадетъ по крайней мѣрѣ на одну изъ сторонъ начерченныхъ на плоскости треугольниковъ.....

№ 50.

По данному положенію двухъ квадратовъ на обыкновенной шахматной доскѣ, определить вѣроятность, что ладья, стоящая на одномъ изъ двухъ квадратовъ, достигнетъ другаго въ x ходовъ.....

№ 51.

ГЛАВА VII. О законахъ вѣроятности при неопределенномъ числѣ ставокъ [отъ № 52 до 59].....стр. 148.

Общая повятія объ опредѣленіи вѣроятностей *a posteriori*. Численный примѣръ. Правла для опредѣленія вѣроятностей одной или нѣсколькихъ примѣтъ или предположеній:

Вѣроятность какого либо предположенія равняется вѣроятности наблюденнаго событія, вычисленной при томъ же предположеніи, и раздѣленной на сумму вѣроятностей этого самаго событія, относящуюся ко всемъ возможнымъ предположеніямъ.

Вѣроятность нѣсколькихъ предположеній, разсматриваемыхъ въ совокупности, равняется суммѣ вѣроятностей событій, относящейся къ этой совокупности предположеній, раздѣленной на сумму вѣроятностей событій при всѣхъ возможныхъ предположеніяхъ. № 32

Вѣроятность новаго событія выводится изъ наблюденныхъ явленій на основаніи слѣдующаго правила:

Для полученія вѣроятности новаго событія, простаго или сложнаго, должно предварительно разискать по наблюдаемымъ событіямъ все возможные предположенія или причины ихъ появленія, и опредѣлить вѣроятности этихъ причинъ; потомъ, каждую изъ найденныхъ вѣроятностей умножить на соответствующую вѣроятность ожидаемаго событія. Сумма всѣхъ подобныхъ произведеній изобразитъ вѣроятность новаго событія. № 33.

При полномъ числѣ $m+n$ наблюденій, явленіе *A* повторилось m разъ, а противоположное ему *B*, n разъ. Пусть будетъ x неизвѣстная вѣроятность простаго явленія *A*. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что ослѣдствіе x заключается между данными двумя предѣлами a и a' .

Общія формулы, служащія для опредѣленія: 1^о вѣроятности, что возможность простаго явленія заключается между нѣвѣстными предѣлами, когда дано наблюдаемое сложное событіе; 2^о вѣроятности будущаго событія по наблюдаемому. № 34 и 35.

Распространеніе теоремы Якова Бернулли на тотъ случай, когда вѣроятность опредѣляется только *a posteriori* № 36 и 37.

Общія формулы для опредѣленія вѣроятности въ томъ предположеніи, что наблюдаемое событіе зависитъ отъ простыхъ явленій двухъ или нѣсколькихъ различныхъ родовъ. № 38.

Поясненіе общихъ правилъ нѣкоторыми простыми примѣрами.

При полномъ числѣ $m+n$ наблюденій, событіе *A* повторилось m разъ, а противоположное ему *B*, n разъ, при чемъ замѣчено, что $m > n$. Спрашивается, какъ велика вѣроятность p , что событіе *A* правдоподобнѣе событія *B*.

Значеніе вѣроятности p въ томъ частномъ случаѣ, когда наблюденіе постоянно припадаетъ къ одному событію, напримѣръ *A*.

Нѣкоторые простые примѣры, относящіеся къ опредѣленію вѣроятностейъ будущихъ событій, зависящихъ отъ повторенія одного явленія.

Рѣшеніе слѣдующаго численнаго вопроса, представляющаго два рода простыхъ явленій:

Шесть послѣдовательныхъ испытаній привели къ трехъ-кратному появленію событія *A* и двукратному событія *B*; одно же изъ произведенныхъ испытаній не привело ни къ *A*, ни къ *B*. Спрашивается: 1^о какъ велика вѣроятность p , что возможности x и x' простыхъ явленій *A* и *B* соответственно заключаются между предѣлами $\frac{5}{3+2+1} \mp \omega = \frac{1}{2} \mp \omega$ и $\frac{2}{3+2+1} \mp \omega' = \frac{1}{3} \mp \omega'$, разумѣль подъ ω и ω' весьма малыя дроби; 2^о какъ велика вѣроятность P , что въ слѣдующія три новыя испытанія, явленія *A* и *B* случатся каждое по одному разу. № 39.

ГЛАВА VIII. О вѣроятностяхъ жизни человѣческой [отъ № 60 до 69]. стр. 173.

Составленіе таблицъ смертности. Графическое изображеніе хода смертности. Указательница смертности. Уравненія для лицъ смертности, предложенныя Ламбертомъ и Моавромъ. № 60.

Объясненіе употребленія таблицъ смертности при рѣшеніи разныхъ вопросовъ, относящихся къ вѣроятностямъ жизни человѣческой. Вѣроятная жизнь. Мѣра долготы. Средняя жизнь. Формулы для опредѣленія послѣдней. Численные результаты для различныхъ Государствъ и городовъ. Опредѣленіе числа жителей страны посредствомъ таблицы смертности, и распределеніе народонаселенія по возрастамъ. № 61.

Вліяніе разлічія половъ на смертность. Постоянный перевѣсъ рожденій младенцевъ мужескаго пола предъ женскимъ; численные результаты для нѣкоторыхъ Государствъ..	№ 62.
Нѣкоторыя замѣчанія о приращеніи народонаселенія.....	№ 63.
Опредѣленіе продолжительности средней жизни въ томъ предположеніи, что какая либо причина смертности уничтожена, или, по крайней мѣрѣ, ослаблена. Прививаніе оспы увеличиваетъ среднюю жизнь слѣшкомъ <i>тремя годами</i> . Формула <i>Лапласа</i> , служащая для вычисленія мѣры уменьшенія числа умирающихъ при уничтоженіи какой либо причины смертности.....	№ 64.
Замѣчанія, относящіяся къ движенію народонаселенія. <i>Мѣра умноженія или плодovitости. Мѣра смертности. Коэффициентъ приращенія.</i> Формулы для рѣшенія различныхъ вопросовъ о движеніи народонаселенія.	
1 ^о По данному коэффициенту приращенія q найти, черезъ сколько времени народонаселеніе P_0 увеличится въ извѣстномъ отношеніи, напримеръ какъ 1 къ 2.	
2 ^о По данному q и числу a протекшихъ лѣтъ, опредѣлить народонаселеніе P_n посредствомъ первоначальнаго P_0 .	
3 ^о По извѣстному народонаселенію въ двѣ опредѣлennыя эпохи, найти коэффициентъ приращенія q	№ 65.
Рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ о движеніи народонаселенія, основанное на показаніяхъ таблицъ смертности.	
ВОПРОСЪ I-ый. Положая предѣлъ человеческой жизни во 100 лѣтъ, опредѣлить какъ велико будетъ народонаселеніе по истеченіи 100 лѣтъ, считая отъ настоящей эпохи, и предполагая при томъ коэффициентъ приращенія и число годовыхъ рожденій извѣстными.	
ВОПРОСЪ II-ой. Зная число рожденій и число умершихъ по возрастамъ, а также коэффициентъ приращенія, опредѣлить законъ смертности.	
ВОПРОСЪ III-ій. Зная число рожденій N и число умершихъ M въ теченіи одного года, найти народонаселеніе P этого самаго года и коэффициентъ приращенія q , предполагая при томъ законъ смертности извѣстнымъ....	№ 66.
Опредѣленіе вѣроятной и средней продолжительности браковъ, или вообще какихъ ни есть товариществъ или обществъ. Вѣроятность существованія общества по истеченіи даннаго числа лѣтъ. При значительномъ числѣ товариществъ одного и того же рода, опредѣлить вѣроятнѣйшее число тѣхъ изъ этихъ товариществъ, которыя останутся нерасторгнутыми по прошествіи даннаго числа лѣтъ.....	№ 67.
Аналитическое опредѣленіе вѣроятности, что возможность рожденія младенцевъ мужескаго пола превышаетъ возможность женскихъ рожденій. Приложение общихъ формулъ къ рожденіямъ въ <i>С. Петербургѣ</i>	№ 68.
Опредѣленіе народонаселенія обширнаго Государства по числу годовыхъ рожденій и частнаго народосчисленія на разныхъ его пунктахъ. Вычисленіе вѣроятности, что погрѣшность этого опредѣленія заключается между данными предѣлами. Численное приложение къ народонаселенію Франціи.....	№ 69.
ГЛАВА IX. О пожизненныхъ доходахъ, вдовьихъ кассахъ, тонтиннахъ, сберегательныхъ кассахъ и о страховыхъ учрежденіяхъ вообще [отъ № 70 до 76].....	стр. 214.

Предметъ Главы. Формулы для приведенія къ настоящему времени какъ вкладовъ, такъ и выдачъ денежныхъ суммъ при различныхъ срокахъ. Общія замѣчанія объ со-

блюдения возможной безобидности въ условіяхъ между Обществомъ и лицами, вступающими съ нимъ въ различныя обязательства по какимъ либо оборотамъ.....

№ 70.

ВОПРОСЪ I-ый. *Человѣкъ, имѣющій m лѣтъ отъ роду, желаетъ получать пожизненную пенсію въ p рублей. Спрашивается, какой капиталъ онъ долженъ единовременно внести Обществу застрахованія жизни.*

Упрощенное рѣшеніе этого самаго вопроса въ томъ предположеніи, что промежутокъ отъ m -лѣтняго возраста до предѣла долгодѣтія раздѣленъ на періоды, и что въ продолженіи каждаго изъ сихъ послѣднихъ число ежегодно умирающихъ постоянно.....

№ 71.

ВОПРОСЪ II-ой. *Мужъ желаетъ по смерти своей оставить женѣ пожизненную годовую пенсію p . Отъ роду ему a лѣтъ, а женѣ b лѣтъ. Спрашивается: 1^о сколько мужъ долженъ внести Обществу застрахованія жизни ежегодно по день своей смерти; 2^о сколько онъ долженъ заплатить единовременно Обществу для обезпеченія женѣ указанной пенсіи p ; 3^о какъ великъ долженъ быть взносъ мужа, чтобы жена, по смерти его, получила определенную напередъ единовременную сумму.....*

№ 72.

Общая понятія объ оборотахъ, извѣстныхъ подъ названіемъ тонтины. Рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ, относящихся къ этому роду взаимныхъ застрахованій. По извѣстной пенсіи, опредѣлить первоначальный вкладъ тонтинёровъ, и на-оборотъ. Приблизительное опредѣленіе пенсій, приходящейся каждому тонтинёру по истеченіи одного года, двухъ, трехъ... лѣтъ. Рѣшеніе этой же задачи въ предположеніи, что Общество выдаетъ ежегодно не полную сумму, слѣдующую по расчёту вкладовъ, а только нѣкоторую ея часть, сообразуясь при томъ съ числомъ умершихъ тонтинёровъ

№ 73.

Понятіе объ *сохранныхъ или сберегательныхъ кассахъ* вообще. Рѣшеніе слѣдующаго вопроса:

N вкладчиковъ, одинаковаго возраста a , внесли единовременно каждый сумму S . Требуется узнать, на какую пожизненную пенсію s они имѣютъ право по истеченіи n лѣтъ?

Опредѣленіе пожизненной пенсіи s въ томъ предположеніи, что вкладчики, кромѣ единовременнаго вклада S , вносятъ въ послѣдующіе годы дополнительные суммы S_1, S_2, S_3

№ 74.

Объ застрахованіи имуществъ вообще. Страховая премія. Для математической безобидности застрахованія, страховая премія должна равняться цѣнѣ вещи, отдаваемой на страхъ, помноженной на *вѣроятность* ея утраты или порчи. На самомъ же дѣлѣ, величина страховой преміи всегда превосходитъ это произведеніе; при умѣренномъ изыткѣ, и когда кругъ дѣйствія Страховаго Общества довольно обширенъ, оно получитъ вѣрную выгоду, а застрахователь будетъ обезпеченъ со стороны правдиваго ожиданія, чѣмъ доказывается обоюдная польза подобнаго рода Учрежденій. Приложение математическаго анализа къ рѣшенію слѣдующаго вопроса:

Купецъ застраховываетъ m кораблей, каждый на сумму a , платя за страхъ корабля нѣкоторую премію b . Требуется опредѣлить обстоятельства подобнаго застрахованія: 1^о относительно Страховаго Общества и 2^о въ отношеніи къ лицу, отдающему корабль на страхъ.

Аналитическое рѣшеніе первой части вопроса. Численные примѣры. Аналитическое рѣшеніе второй части вопроса. Прииѣчанія объ Страховыхъ Учрежденіяхъ вообще, и о преимуществахъ Обществъ взаимнаго застрахованія

№ 75.

При малѣйшемъ перевѣсѣ математической выгоды на сторону Общества, оно, при общпрномъ кругѣ дѣйствія, должно ожидать, почти съ достовѣрностію, значительной для себя выгоды, возрастающей пропорціоально числу страховыхъ оборотовъ. Аналитическое доказательство этой истины.....

№ 76.