Мальцев А.И.

Алгебраические системы

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М21

Мальцев А.И.

М21 Алгебраические системы / Мальцев А.И. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 390 с.

ISBN 978-5-458-32066-5

Ещё в 20-х годах нашего века стало обычным мнение, что алгебра - это наука о свойствах множеств, на которых определена та или иная система операций. Однако вплоть до конца сороковых годов подавляющая часть алгебраистов занималась изучением свойств лишь весьма ограниченного числа типов алгебраических структур. В основном это были группы, кольца и решётки (структуры). Первые общие работы по теории произвольных множеств и с произвольными операциями принадлежат Г. Биркгофу (1935 г.). В те же годы появилась важная работа А. Тарского, в который были заложены основные концепции теории множеств, снабжённых некоторой системой отношений, - такие множества называются ныне моделями. В отличие от теории алгебр, теория моделей использована богатый аппарат математической логики. Возможность плодотворного применения математической логики не только к изучению универсальных алгебр, но и к более классическим областям алгебры, например к теории групп, была обнаружена автором в 1936 г.В течение следующих 25 лет постепенно выяснилось, что обе теории - теория универсальных алгебр и теория моделей, - несмотря на некоторое различие в проблематике, столь тесно связаны, что имеет смысл говорить об одной дисциплине - теории алгебраических систем, предметом которой являются множества с определёнными на них последовательностями операций и отношений (алгебраические системы). Формальным аппаратом этой теории служат язык так называемого прикладного исчисления предикатов, а сама теория должны рассматриваться как пограничная между математической логики и алгеброй. Изложенную точку зрения автор пытался обосновать в своих обзорных докладах на всесоюзных математических съездах 1956 и 1961 гг.Содержание этой книги в общих чертах соответствует содержанию двух обзорных докладов автора, о которых говорилось выше.

ISBN 978-5-458-32066-5

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Еще в 20-х годах нашего века стало обычным мнение, что алгебра — это наука о свойствах множеств, на которых определена та или иная система операций. Однако вплоть до конца сороковых годов подавляющая часть алгебраистов занималась изучением свойств лишь весьма ограниченного числа типов алгебраических структур. В основном это были группы, кольца и решетки (структуры). Первые общие работы по теории произвольных множеств и с произвольными операциями принадлежат Г. Биркгофу (1935 г.). В те же годы появилась важная работа А. Тарского, в которой были заложены основные концепции теории множеств, снабженных некоторой системой отношений,— такие множества называются ныне моделями. В отличие от теории алгебр, теория моделей использовала богатый аппарат математической логики. Возможность плодотворного применения математической логики не только к изучению универсальных алгебр, но и к более классическим областям алгебры, например к теории групп, была обнаружена автором в 1936 г.

В течение следующих 25 лет постепенно выяснилось, что обе теории — теория универсальных алгебр и теория моделей,— несмотря на некоторое различие в проблематике, столь тесно связаны, что имеет смысл говорить об одной дисциплине — теории алгебраических систем, предметом которой являются множества с определенными на них последовательностями операций и отношений (алгебраические системы). Формальным аппаратом этой теории служит язык так называемого прикладного исчисления предикатов, а сама теория должна рассматриваться как пограничная между математической логикой и алгеброй.

Изложенную точку зрения автор пытался обосновать в своих обзорных докладах на всесоюзных математических съездах 1956 и 1961 гг.

Начиная с 1951 г. автор неоднократно читал специальные курсы лекций, посвященных изложению основных понятий и некоторых разделов теории алгебраических систем. В 1953/54 г. были составлены записки одного из таких курсов. Несколько десятков машинописных копий этих записок ходили по рукам в разных городах. Однако обработать их для печати своевременно не удалось. В 1964 г. автору пришлось снова читать курс теории алгебраических систем, и группа студентов и сотрудников НГУ предложила издать ротапринтным способом старые записки. Однако прошедшие 10 лет коренным образом изменили состояние теории и переработка упомянутых записок привела к созданию книги, которая и предлагается вниманию читателей.

Содержание этой книги в общих чертах соответствует содержанию двух обзорных докладов автора, о которых говорилось выше.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Отношения и отображения

1.1. Множества. Совокупность предметов или понятий, объединенных каким-нибудь общим свойством, называется *множеством*. Например, можно говорить о множестве символов в строке, множестве всех натуральных чисел, множестве лиц, являющихся в данный момент студентами университета, и т. п. Предметы, входящие в состав множества, называются его *элементами*. В дальнейшем множества будут, как правило, обозначаться прописными буквами, а элементы малыми буквами латинского или греческого алфавитов. Утверждение, что предмет a является элементом множества A, сокращенно записывается в виде $a \in A$. Запись $a \notin A$ или $a \overline{\in} A$ означает, что предмет a не есть элемент множества A.

Может случиться, что элементы некоторого множества сами являются множествами. Например, студенческие группы можно рассматривать как элементы множества всех групп университета, хотя каждая группа сама является множеством входящих в нее студентов.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если каждый предмет, являющийся элементом одного множества, является элементом и другого. Из этого определения следует, что для полного задания множества достаточно перечислить все его элементы. Поэтому там, где это удобно, для записи множества будут выписываться внутри фигурных скобок в произвольном порядке обозначения элементов множества. Например, выражение $\{4, 1, 3\}$ обозначает множество, состоящее из чисел 1, 4, 3. Множества $\{1, 3, 1, 5\}$ и $\{1, 3, 5\}$

следует рассматривать как равные, так как в первом случае элемент 1 только упомянут дважды при перечислении элементов множества, что не существенно для определения самого множества.

Часто приходится рассматривать множества, состоящие лишь из одного элемента. При этом множество $\{a\}$, состоящее из единственного предмета a, и сам этот предмет a считаются различными объектами. В частности, приходится различать элемент a, множество $\{a\}$, состоящее из единственного элемента a, множество $\{\{a\}\}$, единственным элементом которого является множество $\{a\}$, и т. д.

Наряду с множествами, имеющими элементы, рассматривают также *пустое* множество, не имеющее ни одного элемента. Все пустые множества по определению равны и обозначаются символом $\varnothing$. Отметим, что множество $\{\varnothing\}$ имеет своим элементом пустое множество $\varnothing$ и потому не пусто.

Множество A называется *подмножеством* или *частью* множества B, символически $A \subseteq B$, если каждый элемент A является элементом B. Например, множество четных натуральных чисел есть подмножество множества всех натуральных чисел.

Согласно этому определению произвольное множество A и пустое множество $\varnothing$ являются подмножествами множества A. Непустая часть множества A, отличная от A, называется *правильной частью* A. Запись $A \subset B$ означает, что A есть подмножество множества B, отличное от B.

Пустое множество имеет лишь одну часть $\varnothing$; множество $\{1\}$, состоящее из одного элемента 1, имеет 2 части: $\varnothing$ и $\{1\}$; множество $\{1, 2\}$, состоящее из двух элементов, имеет 4 части: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$. Легко убедиться, что множество, состоящее из конечного числа n элементов, имеет 2^n различных частей.

Очевидно, что для любых множеств A, B, C из $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ следует $A = B$, из $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ следует $A \subseteq C$, из $A \subset B$, $B \subseteq C$ следует $A \subset C$ и т. д.

Вместо слов *множество*, *подмножество* часто употребляются слова *совокупность*, *подсовокупность*, *система*, *подсистема*, *семейство* и т. п. Если $A \subseteq B$, то говорят, что B есть *надмножество* (*надсистема*) множества A.

Пусть P — некоторое свойство объектов, и пусть формула $P(x)$ означает, что объект x обладает свойством P. Тогда через $\{x \mid P(x)\}$ обозначается множество тех объектов x, которые обладают свойством P. Например, пусть N обозначает множество всех натуральных чисел 0, 1, 2, ... Тогда $\{x \mid x > 5,\ x \in N\}$ будет множеством натуральных чисел, больших числа 5, $\{x \mid 2 < x < 6,\ x \in N\}$ есть множество $\{3, 4, 5\}$, $\{x \mid x < 0,\ x \in N\} = \varnothing$.

Объединением или *суммой* множеств A, B, символически $A \cup B$, называется множество, получаемое объединением элементов A и B в одно множество. Таким образом, утверждение $a \in (A \cup B)$ означает, что $a \in A$ или $a \in B$. Например,

$$\{1, 2, 4\} \cup \{2, 3, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

В частности, для любого множества A имеем

$$A \cup A = A, \qquad \varnothing \cup A = A.$$

Выражения

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

обозначают объединение элементов множеств $A_1, \ldots, A_n$.

Пересечением или *общей частью* множеств A, B, символически $A \cap B$, называется множество, содержащее те и только те предметы, которые одновременно принадлежат множествам A и B. Если A и B общих элементов не имеют, то их пересечение пусто. Так,

$$\{1, 3\} \cap \{2, 4, 5\} = \varnothing,$$
$$\{1, 2, 5\} \cap \{1, 5, 6\} = \{1, 5\}.$$

В частности, для любого множества A имеем

$$A \cap A = A, \qquad \varnothing \cap A = \varnothing.$$

Выражения

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

обозначают общую часть системы множеств $A_1, \ldots, A_n$, т. е. совокупность тех предметов, которые являются элементами каждого из множеств $A_1, \ldots, A_n$.

Разностью множеств A, B, символически $A \setminus B$, называется совокупность тех элементов множества A, которые не входят в B. Например,

$$\{0, 1, 2, 3\} \setminus \{1, 3, 5\} = \{0, 2\}.$$

Отсюда следует, что для любых множеств A, B имеем

$$A \setminus A = \varnothing, \quad A \setminus \varnothing = A, \quad \varnothing \setminus A = \varnothing,$$
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Иногда операцию объединения множеств рассматривают как аналог операции сложения чисел, а операцию вычитания множеств как аналог вычитания чисел. Однако эта аналогия весьма не полная. Например, если $A \cup B = C$, то отсюда еще не следует, что $A = C \setminus B$. Действительно, полагая

$$A = \{0, 1, 4, 5\}, \quad B = \{1, 2, 3, 5\},$$

будем иметь

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \setminus B = \{0, 4\} \neq A.$$

Правильное заключение имеет следующий вид: если $A \cup B = C$, $A \cap B = \varnothing$, то $A = C \setminus B$.

Если $A \subseteq B$, то разность $B \setminus A$ называется *дополнением* множества A в множестве B и обозначается через $\text{доп}_B A$. В случае, когда множество B заранее известно, вместо $\text{доп}_B A$ кратко пишут A' и говорят просто о дополнении множества A. Так, если основным множеством B служит множество N всех натуральных чисел, то дополнением совокупности четных чисел является совокупность нечетных чисел, дополнением совокупности чисел, каждое из которых делится на какое-либо нечетное число, большее единицы, является совокупность степеней двойки 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...

Только что определенные операции объединения, пересечения множеств и взятия дополнения множества допускают очень наглядное графическое истолкование. В качестве основного множества берем совокупность точек плоскости. Пусть A — круг на этой плоскости (см. рис. 1), т. е. множество точек, лежащих внутри и на заданной окружности. Тогда A' будет множеством точек, лежащих вне упомянутой окружности (на рис. 1 — заштрихованная область).

Рассмотрим теперь два круга A, B. На рис. 2 изображено объединение множеств $A \cup B$ (заштрихованная область), а на рис. 3 изображено множество $A \cap B$ (дважды заштрихованная область). На рис. 4 заштрихованная область представляет разность $A \setminus B$ множеств A, B.

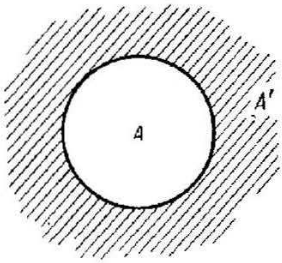

Рис. 1.

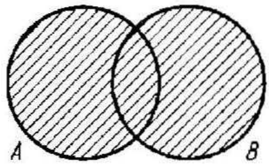

Рис. 2.

Арифметические действия сложения и умножения натуральных чисел суть операции, производимые над парами чисел, или, как говорят, бинарные операции. Теоретико-множественные операции объединения и пересечения могут

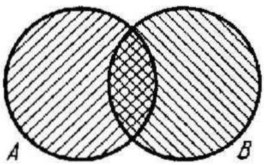

Рис. 3.

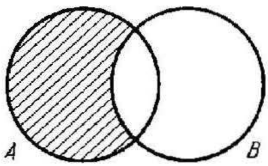

Рис. 4.

служить хорошим примером *бинарных* операций, производимых над множествами, т. е. над объектами еще более простой логической природы, чем натуральные числа. Операции возведения числа в квадрат и взятия дополнения множества суть операции, производимые над одним объектом. Такие операции называются *унарными*.

Фиксируем какое-нибудь множество U и обозначим через $\mathfrak{U}$ совокупность всех подмножеств множества U. Над элементами совокупности $\mathfrak{U}$ можно производить операции пересечения, объединения и взятия дополнения (в основном множестве U). Совокупность $\mathfrak{U}$ замкнута относительно перечисленных операций в том смысле, что, производя эти операции над элементами совокупности $\mathfrak{U}$, мы будем в результате получать элементы, принадлежащие $\mathfrak{U}$. Система, состоящая из совокупности $\mathfrak{U}$ и операций $\cup$, $\cap$, $'$, называется *алгеброй Буля* подмножеств множества U.

В арифметике действия сложения и умножения связаны известными законами ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности. Аналогичным законам и ряду других подчинены и операции объединения, пересечения и дополнения в алгебрах Буля. Мы выпишем здесь основные из этих законов, так как взятые в абстрактной форме (см. п. 5.2) они играют большую роль во многих разделах алгебры и логики:

Б1) $x \cup x = x$;

Б2) $x \cup y = y \cup x$;

Б3) $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$;

Б4) $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$;

Б5) $(x')' = x$;

Б6) $(x \cup y)' = x' \cap y'$;

Б7) $x \cup (y \cap y') = x$.

В истинности этих тождеств легко убедиться и путем простых рассуждений, и графически. Например, из рис. 5 непосредственно видно, что для любых множеств x, y, z левая и правая части тождества Б4 изображаются одной и той же заштрихованной частью плоскости.

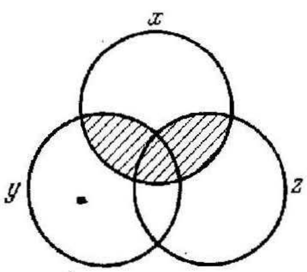

Рис. 5.

Равенства Б1, . . ., Б7 суть тождества. Поэтому, подставляя в них вместо x, y, z выражения x', y', z', получим снова тождества. Эти новые тождества можно преобразовать при помощи тождеств как старых, так и новых и т. д. В результате из тождеств Б1 — Б7 мы получим ряд тождеств, называемых *формальными следствиями* данных. Этот процесс выведения из данных тождеств новых во всех деталях будет проанализирован далее в п. 11.2 этой книги, а здесь мы покажем лишь, что из тождеств Б1 — Б7 чисто формально вытекают следующие тождества, в которых $x'' = (x')'$:

Б$_0$1) $x \cap x = x$;

Б$_0$2) $x \cap y = y \cap x$;

Б$_0$3) $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$;

Б$_0$4) $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$;

Б$_0$5) $x'' = x$;

Б$_0$6) $(x \cap y)' = x' \cup y'$;

Б$_0$7) $x \cap (y \cup y') = x$.

Все они получаются сходными приемами. Выведем из Б1 — Б7, например, лишь тождество Б$_0$6. Заменяя в Б6 x, y на x', y', получим $(x' \cup y')' = x'' \cap y''$. Это равенство ввиду тождества Б5 можно представить в форме $(x' \cup y')' = x \cap y$. Беря дополнения от обеих частей и применяя снова тождество Б5, получим требуемое соотношение Б$_0$6.

Тождества Б$_0$1 — Б$_0$7 с чисто внешней стороны получаются из тождеств Б1 — Б7 взаимной переменной ролей знаков $\cup$ и $\cap$ и потому называются *двойственными* этим тождествам.

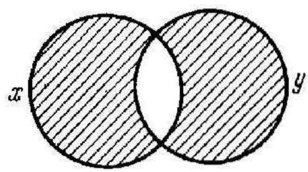

Рис. 6.

Наряду с операцией вычитания множеств иногда рассматривается операция *разностного сложения*, обозначаемая символом $\oplus$ и определяемая формулой

$$x \oplus y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x). \qquad (1)$$

Графически разностная сумма $x \oplus y$ изображена на рис. 6, откуда ясно видно, что

$$(x \oplus y) \oplus y = x.$$

Поэтому, если ввести новую операцию вычитания (разностного) $\ominus$ с помощью формулы

$$x \ominus y = x \oplus y,$$

то обе операции будут связаны друг с другом обычным арифметическим законом

$$x \oplus y = z \Leftrightarrow y = z \ominus x,$$

где знак $\Leftrightarrow$ употреблен как символ слова «равносильно». Вместе с тем легко проверить, что для операций $\oplus$, $\cap$ имеет место и обычный закон дистрибутивности

$$x \cap (y \oplus z) = (x \cap y) \oplus (x \cap z). \tag{2}$$

Система, состоящая из совокупности $\mathfrak{U}$ всех подмножеств некоторого множества U и операций $\oplus$, $\cap$, называется *кольцом Буля* подмножеств множества U. Помимо законов коммутативности и ассоциативности ($Б_0 2$ и $Б_0 3$) операции $\cap$, закона дистрибутивности (2), в кольце Буля выполнены также следующие тождества:

$$x \oplus x = \varnothing, \quad x \oplus \varnothing = x,$$
$$x \oplus y = y \oplus x,$$
$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z),$$

легко вытекающие из тождеств Б1 — Б7 и формулы (1), определяющей разностную сумму множеств.

Отметим еще, что в алгебре Буля отношение включения подмножеств $A \subseteq B$ равносильно каждому из равенств

$$A \cup B = B, \quad A \cap B = A.$$

Ясно также, что включение $A \subseteq B$ равносильно двойственному включению $B' \subseteq A'$.

Естественно было бы спросить себя, исчерпывают ли тождества Б1 — Б7 и их формальные следствия все вообще тождества, которые связывают операции $\cup$, $\cap$, $'$ на произвольной алгебре подмножеств? Ответ на этот вопрос положительный и будет дан ниже (см. пп. 5.2 и 7.1).

1.2. Отношения. *Декартовым произведением* множеств A и B, символически $A \times B$, называется совокупность всех пар вида (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Например, если $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 5\}$, то $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\}$. Далее,

$$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\},$$
$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$