

Журнал "Природа"

№ 2, 1934

УДК 001
ББК 72
Ж92

Ж92 Журнал "Природа": № 2, 1934 / – М.: Книга по Требованию, 2023. – 83 с.

ISBN 978-5-458-65317-6

"Природа" — ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук, публикации которого посвящены естественно-научной тематике. Издается с января 1912 года. Издание журнала началось в Москве в январе 1912 года. Среди первых редакторов были крупнейшие естествоиспытатели: зоолог, профессор В. А. Вагнер, химик, академик АН СССР Л. В. Писаржевский, генетик Н. К. Кольцов, микробиолог, академик АН УССР Л. А. Тарасевич, геохимик, академик АН СССР А. Е. Ферсман

ISBN 978-5-458-65317-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

кает, что всякое нечетное число может быть разложено в сумму трех простых чисел. Таким образом, можно еще высказать такое общее утверждение: всякое целое число может быть разложено в сумму не более 3 простых чисел. До сих пор не только проблема Гольдбаха, но и это утверждение еще никем не доказано.

Мало того, в своей книге *Vorlesungen über Zahlentheorie*, изданной в 1927 г., один из виднейших современных авторитетов по теории чисел проф. Ландау (E. Landau) указывает, что недоступным для современного состояния науки является также доказательство предложения, менее трудного, чем только что указанное. Именно, еще в 1927 г. считалась неразрешимой следующая проблема: существует ли такое постоянное число r , чтобы любое целое число N могло быть разложено в сумму r простых чисел; другими словами, можно ли любое число N разложить в сумму ограниченного (не зависящего от N) числа простых чисел. И вот, в 1930 г. молодой московский математик Л. Г. Шнирельман в своей превосходной работе „Об аддитивных свойствах чисел“ впервые доказал возможность разложения любого числа N в сумму r простых чисел, где r постоянное число, не зависящее от N .

Правда, Л. Г. Шнирельман не указывает точно, чему равно это постоянное число r , тем не менее его работу, по словам Ландау, можно считать крупнейшим достижением современной теории чисел.

Доказательство Л. Г. Шнирельмана основывается на введенном им понятии плотности последовательности целых чисел. Если дана какая-нибудь возрастающая последовательность целых чисел $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots$, то, говорят, что эта последовательность имеет положительную плотность α , если для любого члена этой последовательности n_k отношение числа k членов последовательности, не превосходящих n_k , к самому числу n_k больше или равно α , т. е.

$$\frac{k}{n_k} \geq \alpha.$$

Любое целое число, как легко показать, может быть разложено в сумму ограниченного числа членов последовательности, если эта последовательность имеет положительную плотность α . Последовательность простых чисел, как известно, не имеет положительной плотности. Однако, если взять последовательность, состоящую из всевозможных сумм определенного числа простых чисел, то оказывается, что эта последовательность уже имеет положительную плотность. В этом заключается отправной путь доказательства Л. Г. Шнирельмана.

Мы могли бы увеличить число примеров подобного рода, когда формулировка задачи крайне проста и определена, и вместе с тем решение ее представляет непреодолимые трудности. Такой характер задач несомненно служил одной из причин того, что к теории чисел в течение ряда веков было приковано внимание величайших математиков. Трудно назвать хотя бы одного крупного математика, начиная с XVII в., который не работал бы над решением важнейших и интереснейших вопросов, на которые мы наталкиваемся в изобилии при рассмотрении ряда целых натуральных чисел. Так, вопрос о законах распределения простых чисел в ряду всех натуральных чисел был предметом глубоких исследований Ферма, Эйлера, Лагранжа, Лежандра, Гаусса, Дирихле, Чебышева, Риманна, де-Вале-Пуссена, Адамара и др.; и тем не менее, несмотря на изумительные результаты, полученные этими учеными, до сих пор этот вопрос нельзя считать исчерпанным.

Нужно сказать, что вопросы теории чисел привлекают к себе внимание не только математиков-специалистов. Некоторые вопросы настолько привлекательны, настолько волнуют своей кажущейся простотой и вместе с тем своей неприступностью, что над их разрешением работают широкие круги, не имеющие специальной математической подготовки. К сожалению, большинство этих людей не всегда отдают себе отчет в глубине рассматриваемых ими вопросов и в тех трудностях, с которыми решение их сопряжено. Примером этого может служить так называемая великая

теорема Ферма. Без преувеличения можно сказать, что над доказательством этой теоремы работают десятки тысяч людей, но простое рассмотрение, возникающих в связи с этим многочисленных „доказательств“ этой знаменитой теоремы, показывает, насколько несерьезно большинство из них подходит к решению этой труднейшей проблемы.

У читателя невольно возникает вопрос, представляются ли действительно указанные проблемы важными, если не сами по себе, то по крайней мере для дальнейшего развития математики. Прежде всего необходимо отметить, что любая теорема, любой вопрос из теории чисел представляет собою выражение тех закономерностей, которые в действительности имеют место в мире целых чисел. В этом смысле вопросы теории чисел имеют большой теоретико-познавательный интерес, поскольку они освещают известные законы природы, ибо изучение ряда натуральных чисел мы с полным правом можем считать задачей естествознания в широком смысле этого слова.

Но было бы совершенно неверно предполагать, что указанный круг проблем стоит совершенно изолированно от других вопросов математики, имеющих столь большое значение в многочисленных отраслях науки и практической деятельности.

Правда, многие вопросы теории чисел при их возникновении представляются совершенно оторванными не только от практических дисциплин, но и от других теоретических отделов самой математики. Но это представление вызывается исключительно тем, что существует только постановка вопроса, а не его решение. Опыт же развития науки показывает, что, если какая-либо математическая дисциплина возникает не из непосредственных практических потребностей, а в результате имманентного развития математики, находящегося безусловно в связи с общим развитием культуры, то на определенной стадии эта дисциплина всегда приобретает большое значение для самых разнообразных областей человеческого знания. В качестве примера таких дисциплин можно

переменного, абстрактную теорию групп, неевклидовы геометрии и др. Теорию чисел, в настоящее время, пока нельзя сравнить с только-что названными дисциплинами по количеству своих приложений, тем не менее наиболее разработанные отделы теории чисел, как, например, теория квадратичных форм, играют уже большую роль в других отделах математики и в естествознании.

Приведенные в начале этой статьи примеры нерешенных в теории чисел задач, может быть, создали у читателя впечатление, что этот отдел математики совершенно не разработан и состоит исключительно из проблем, перед которыми современная наука беспомощна. Такое впечатление ни в какой мере не соответствовало бы действительности. В этом мы убедимся из рассмотрения знаменитой проблемы Варинга, которую далеко еще нельзя считать исчерпанной в полной мере, но в связи с которой за последние десятилетия достигнуты блестящие результаты, причем некоторые из них относятся к наиболее выдающимся достижениям современной математики.

Одна из наиболее характерных особенностей теории чисел заключается в том, что многие ее законы очень легко обнаруживаются экспериментально, путем производства непосредственных вычислений над числами, в то время как математическое доказательство этих законов в общем виде вызывает большие трудности. Поэтому многие теоремы теории чисел были известны гораздо раньше, чем удалось найти их доказательство. И проблема Варинга является иллюстрацией того, насколько легко экспериментально открыть тот или иной арифметический закон и насколько трудно его доказать.

Простейший частный случай проблемы Варинга был известен уже математикам древней Греции. Есть основания предполагать, что Диофанту (IV в. до нашей эры) был известен следующий факт: всякое целое число либо представляет собою полный квадрат, либо есть сумма двух, трех или четырех квадратов. Это утверждение впервые доказанное Лагранжем в 1772 г. и носящее теперь название теоремы Лагранжа, мож-

но еще формулировать так: всякое целое число может быть представлено в виде суммы четырех или менее полных квадратов.

В 1770 г. профессор Кембриджского университета Варинг (E. Waring, 1736 — 1798) в своей книге *Meditationes algebraicae* высказал утверждение, напоминающее теорему Лагранжа, но относящееся не только к квадратам, а к кубам, биквадратам (четвертым степеням), пятым степеням, вообще к любым полным степеням с целым показателем. Именно, Варинг утверждает, что всякое целое число может быть представлено в виде суммы девяти или менее полных кубов, девятнадцати или менее биквадратов, и т. д. Вообще, для каждого целого показателя степени n можно найти вполне определенное целое число r так, чтобы любое целое число N можно было представить в виде суммы r или менее полных n -ых степеней. В этом и состоит проблема Варинга. Само собою разумеется, что Варинг доказать ее в такой общей форме не умел, но он ее проверил эмпирически, на частных примерах.

Для дальнейшего нам полезно будет формулировать проблему Варинга еще так: для данного целого числа n можно найти целое r , зависящее только от n , так, чтобы при любом целом N неопределенное уравнение

$$N = x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n \quad (2)$$

можно было удовлетворить целыми положительными или равными нулю числами $x_1, x_2, \dots, x_r$. Уравнение (2) мы будем называть уравнением Варинга.

Выше было отмечено, что частный случай проблемы Варинга был решен в 1772 г. Лагранжем. Следующий шаг в направлении доказательства утверждения Варинга был сделан Лиувиллем (*Liouville*), опубликовавшим в 1859 г. доказательство теоремы для случая $n=4$. Лиувиль доказал, что каждое целое число может быть представлено в виде суммы пятидесяти трех или менее полных биквадратов, т. е. для того, чтобы удовлетворить уравнению (2) при $n=4$, достаточно взять $r=53$.

Это доказательство, несколько видоизмененное после Лиувилля, основывается на тождестве

$$\begin{aligned} & 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 = \\ & = (x_1 + x_2)^4 + (x_1 - x_2)^4 + (x_1 + x_3)^4 + \\ & + (x_1 - x_3)^4 + (x_1 + x_4)^4 + (x_1 - x_4)^4 + \\ & + (x_2 + x_3)^4 + (x_2 - x_3)^4 + (x_2 + x_4)^4 + \\ & + (x_2 - x_4)^4 + (x_3 + x_4)^4 + (x_3 - x_4)^4 \quad (3) \end{aligned}$$

Так как по теореме Лагранжа каждое число можно представить в виде суммы не более 4 квадратов, то с помощью только что написанного тождества мы убеждаемся в том, что число, имеющее форму $6X^2$, можно разложить в сумму не более 12 биквадратов. Применяя опять теорему Лагранжа находим, что любое число, кратное шести, может быть представлено в виде суммы не более 4 слагаемых, каждое из которых имеет форму $6X^2$, следовательно, любое число, кратное шести, может быть представлено в виде суммы не более $12 \times 4 = 48$ биквадратов. Но любое целое число представляется в виде суммы двух слагаемых, из которых одно слагаемое есть кратное шести, а другое есть одно из чисел 0, 1, 3, 4, 5. Поэтому мы и приходим к заключению, что любое целое число разлагается в сумму не более $48 + 5 = 53$ биквадратов.

Целый ряд частных результатов в связи с проблемой Варинга был получен французским математиком Майе (*Maiet*). В 1895 г. им получено доказательство теоремы для кубов, причем им установлено, что в уравнении (2) достаточно взять $r \geq 21$. В 1896 г. он доказал теорему для пятых степеней и в 1908 г. для восьмых степеней. Другими математиками были найдены доказательства еще нескольких частных случаев, из которых особенно следует отметить результаты, полученные в 1909 г. Виферихом (*Wieferich*) и Ландау (*Landau*). Эти результаты относятся к разложению чисел в сумму кубов, при чем Виферих доказал, что для разложения любого числа достаточно взять 9 кубов. Так как числа 23 и 239 требуют для своего представления ровно 9 кубов,¹ то результат

¹ До сих пор неизвестно, являются ли числа 23 и 239 единственными числами, требующими для своего представления 9 кубов.

Вифериха является предельным по точности.

Казалось бы, что проблема Варинга для кубов таким образом всецело исчерпана.

Но вскоре после опубликования работы Вифериха было доказано Ландау, что лишь конечное число целых чисел требуют для своего представления 9 кубов, а остальные целые числа могут быть разложены в сумму не более 8 кубов. Таким образом, Ландау нашел, что любое целое число, большее некоторого постоянного числа, может быть разложено в сумму 8 или менее кубов. Значение этого результата Ландау далеко выходит за пределы частного случая, так как с помощью его мы приходим к одному важному понятию, связанному с проблемой Варинга.

Сейчас мы пришли к необходимости точно указать, какие именно результаты мы должны получить при решении проблемы Варинга. Заметим, что, если при данном значении n мы нашли такое значение r , при котором уравнение (2) разрешимо в целых x для любого целого N , большего единицы, то существует наименьшее значение r , обладающее этим свойством. Это наименьшее значение r зависит только от n , и мы его будем обозначать через $g(n)$. Мы видели, что $g(2)=4$, $g(3)=9$. Назовем теперь через $G(n)$ наименьшее значение r , при котором уравнение (2) разрешимо для всех N , больших некоторого постоянного числа N_0 , или, как мы будем говорить, для всех N , начиная с некоторого места. Из результата Ландау следует, что $G(3) \leq 8$, причем введение числа $G(n)$ вызвано этим результатом Ландау для $G(3)$, ибо он показал, что $G(n)$ вообще может быть меньше чем $g(n)$.

Обозначим, наконец, через $I(N, n, r)$ число всевозможных решений уравнения (2) в целых $x_1, x_2, \dots, x_r$. Это число называется еще иначе числом представлений, так как оно показывает, сколькими способами можно представить число N в виде суммы r слагаемых, из которых каждое есть полная n -я степень.

Полное решение проблемы Варинга 6 заключается в точном определении

$g(n)$ и $G(n)$ ¹ для каждого n и в определении величины $I(N, n, r)$ для данных значений N , n и r .

Случай $n=2$ можно считать исчерпанным так как из теоремы Лагранжа следует $g(2)=4$. Кроме того легко показать, что и $G(2)=4$, так как существует бесчисленное множество чисел, которые не могут быть представлены суммой трех кубов. Наконец, число представлений для этого случая было найдено Якоби еще в прошлом столетии, путем применения эллиптических функций.

Но уже в случае $n=3$ проблема Варинга до сих пор не может считаться исчерпанной, так как, хотя и известно значение $g(3)=9$, но неизвестно точное значение $G(3)$. Между тем число $G(3)$ следует признать более важным чем $g(3)$, ибо это последнее, как мы видели, имеет значение лишь для конечного числа целых чисел N . Для $G(3)$ известно лишь, что оно должно быть равно одному из чисел 4, 5, 6, 7, 8. В этом отношении большой интерес представляет следующая таблица,² составленная эмпирически

$N \backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1—	1 000	10 41	122	242	293	202	73	15	2
1 000—	2 000	2 27	113	283	358	194	23	—	—
9 000—	10 000	1 17	121	377	401	83	—	—	—
19 000—	20 000	1 12	100	400	426	61	—	—	—
29 000—	30 000	1 11	105	448	388	47	—	—	—
39 000—	40 000	1 13	117	457	384	28	—	—	—
999 000—	1 000 000	1	1	94	614	289	1	—	—

и показывающая, сколько чисел, содержащихся в некоторых промежутках (от 1 до 1000, от 1000 до 2000, и т. д.), представляются в виде суммы кубов при данном наименьшем значении r .

Из этой таблицы видно, что не исключена возможность, что $G(3)$ равно 5 или 4, между тем до сих пор не удалось доказать даже что $G(3) \leq 7$. За послед-

¹ Кроме чисел $G(n)$ и $g(n)$ в теории чисел рассматривается еще число $G_1(n)$ — наименьшее r , при котором уравнение (2) разрешимо „почти“ для всех N . Но мы считаем ненужным останавливаться на этом числе в данной статье.

² Эта таблица приводится в докладе G. H. Hardy, Some Famous Problems of the Theory of Numbers, Oxford, 1920.

ние десятилетия появились работы Баера (Baer, 1913), Поста (Post, 1920), Арндта (Arndt, 1925), в которых доказывается, что существует ряд классов целых чисел, для представления которых достаточно 7 кубов, но их результаты далеки от указанного выше результата $G(3) \leq 7$. По словам одного из выдающихся современных математиков Харди (G. H. Hardy), вопрос о том, чему в действительности равно $G(3)$, является глубочайшей тайной арифметики.

Прежде чем перейти к обзору общих результатов, полученных в связи с проблемой Варинга, приведем некоторые замечания, которые помогут нам лучше уяснить себе рассматриваемый вопрос. Тот факт, что любое целое число N можно представить в виде суммы полных n -ых степеней, можно считать совершенно очевидным и не требующим особого изучения. В самом деле, каждое число N представляется в виде суммы N единиц, а единицу можно рассматривать как полную n -ю степень. Совершенно элементарными средствами можно даже показать, что любое целое число N представляется в виде суммы полных n -ых степеней, причем число n -ых степеней гораздо меньше, чем N . С этой целью мы выбираем следующий путь.

Находим $\sqrt[n]{N}$ и берем ближайшее меньшее целое число к этому корню. Пусть это будет некоторое число x_1 . Тогда

$$\sqrt[n]{N} = x_1 + \alpha,$$

где α некоторая величина меньшая единицы и по формуле бинома Ньютона

$$N = x_1^n + nx_1^{n-1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}x_1^{n-2}\alpha^2 + \dots,$$

откуда

$$N - x_1^n = nx_1^{n-1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}x_1^{n-2}\alpha^2 + \dots$$

Так как $\alpha < 1$, то подставив в правой части этого равенства вместо x_1 большую величину $\sqrt[n]{N}$ и заменив α единицей, найдем

$$N - x_1^n < nN^{\frac{n-1}{n}} + \frac{n(n-1)}{1.2}N^{\frac{n-2}{n}} + \dots,$$

или

$$N - x_1^n < C_1 N^{\frac{n-1}{n}},$$

где C_1 некоторая величина, не зависящая от N . Если мы с числом стоящим в правой части последнего неравенства поступим так же, как поступали с самым N , т. е. извлечем корень n -й степени и ближайшее целое обозначим через x_2 , то аналогично найдем

$$N - x_1^n - x_2^n < C_2 N^{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2},$$

где C_2 не зависит от N . Продолжая эту операцию k раз, мы получим

$$N - x_1^n - x_2^n - \dots - x_k^n < C_k N^{\left(\frac{n-1}{n}\right)^k}, \quad (4)$$

где C_k не зависит от N , а $x_1, x_2, \dots, x_k$ целые числа.

Простой расчет показывает, что, если k принять равным некоторому постоянному числу D , умноженному на $\log \log N$, то правая часть неравенства (4) обратится в некоторое постоянное C . Итак, достаточно взять

$$r = k + C = D \log \log N + C \quad (5)$$

полных n -ых степеней, чтобы представить число N . Но этот результат ни в коем случае не дает нам решения проблемы Варинга, так как с возрастанием N величина $\log \log N$ растет бесконечно, и вместе с тем выражение (5) для r тоже бесконечно растет. Между тем сущность проблемы Варинга заключается как раз в том, чтобы доказать возможность разложения данного числа N в сумму ограниченного (не зависящего от N) числа n -ых степеней. Приведенные нами элементарные соображения, может быть, лишний раз иллюстрируют трудность рассматриваемой нами проблемы.

В 1909 г. Гильберту (D. Hilbert) впервые удалось принципиально доказать рассматриваемую нами проблему для любой степени. Результат, полученный Гильбертом, можно формулировать так: любое целое число N можно представить в виде суммы ограниченного (не зависящего от N) числа n -ых степеней. Таким образом, Гильберт доказывает, что для любого n число $g(n)$ конечно и зависит только от n , но при этом он не указывает числового значения для $g(n)$. Доказательство Гильберта яв-

ляется, как говорят математики, доказательством существования (Existenzbeweis), так как оно дает возможность убедиться в том, что $g(n)$ существует, но не показывает в то же время, как его вычислить. Тем не менее доказательство Гильберта, как первый общий результат по проблеме Варинга, можно отнести к наиболее крупным открытиям современной теории чисел.

Не имея возможности в настоящей статье подробно остановиться на доказательстве Гильберта, мы все же укажем основные его моменты. Прежде всего, Гильберт устанавливает тождество, напоминающее тождество (3), которым мы пользовались при доказательстве проблемы для случая $n=4$. Именно, для любого целого m и целых x_1, x_2, x_3, x_4 выражение $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^m$, умноженное на некоторое целое число M , зависящее от m , тождественно равно сумме ограниченного числа выражений вида

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)^{2m},$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 целые числа, зависящие только от m . Это тождество Гильбертом получено путем применения кратных интегралов в пространстве 25 измерений и позволило ему на основании теоремы Лагранжа получить доказательство проблемы Варинга для любой степени, показателем которой является число вида $n=2^k$. Затем Гильберт распространяет этот результат на случай любого n , и здесь метод его, хотя и свободный от применения средств анализа бесконечно малых, содержит в себе значительные арифметические трудности.

Метод Гильберта впоследствии был упрощен рядом авторов. В частности, шведскому математику Стридсбергу (Stridsberg) в 1911 г. удалось целиком освободить метод Гильберта от элементов анализа бесконечно малых и получить, таким образом, чисто арифметическое доказательство проблемы Варинга. Тем не менее это доказательство оставалось чрезвычайно сложным и оно оставалось попрежнему лишь доказательством существования. С помощью метода Гильберта нельзя получить значения для чисел $g(n)$ и $G(n)$ и тем бо-

лее нельзя найти выражения для числа представлений $I(N, n, r)$. Но доказательство Гильберта имеет еще и другой существенный недостаток. Проблема Варинга так же, как и проблема Гольдбаха, принадлежит к числу аддитивных проблем. Наука долгое время не была в состоянии найти общий метод для решения таких проблем. В этом отношении интересно отметить, что еще в известных лекциях Кронекера по теории чисел, изданных в 1901 г., указывается, что наиболее естественно было бы начать изучение целых чисел с вопроса о том, на какие слагаемые можно разложить данное число, но наука вынуждена пока обойти молчанием этот вопрос, в виду отсутствия каких бы то ни было методов к решению задач такого рода. Таким образом, еще в начале XX в. не были известны общие методы для решения аддитивных проблем. Впервые метод решения одной аддитивной проблемы был найден Гильбертом, но этот метод оказался пригодным лишь для решения одной проблемы Варинга. Таким образом, наука и после открытия Гильберта осталась без общего метода для решения аддитивных проблем.

Поэтому необходимо признать крупнейшим достижением теории чисел опубликование в 1919 г. доказательства проблемы Варинга двух английских математиков Харди (Hardy) и Литтлвуда (Littlewood). Их доказательство основано на применении аппарата теории функций комплексного переменного и может быть рассматриваемо, как общий метод для решения аддитивных проблем. В то же время эти ученые получили довольно приличные по точности значения для $G(n)$ и для числа представлений $I(N, n, r)$.

Основная идея их доказательства была указана еще Эйлером и заключается в следующем.

Бесконечный ряд

$$(x) = 1 + x^{1^n} + x^{2^n} + x^{3^n} + \dots,$$

члены которого зависят от переменной величины x , имеет вполне определенную сумму для каждого значения x , меньшего по абсолютной величине единицы, или, как говорят, ряд сходится при $|x| < 1$. Если возвысить этот ряд в степень r ,

то получим новый ряд, расположенный по степеням буквы x

$$1 + I_1 x + I_2 x^2 + I_3 x^3 + \dots + I_N x^N + \dots, \quad (6)$$

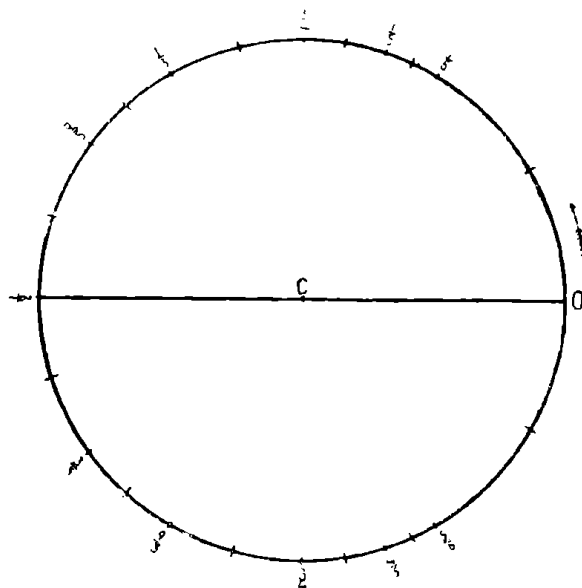
при чем коэффициент I_N при x^N в точности равен числу представлений N в виде суммы r n -ых степеней, то есть $I_N = I(N, n, r)$. Для решения проблемы Варинга нужно, таким образом, вычислить коэффициенты I_N ряда (6) и определить, при каких значениях r все эти коэффициенты отличны от нуля. До последнего времени не удавалось не только найти хотя бы приблизительную величину для I_N , но и не представлялось возможным даже установить тот факт, что все коэффициенты ряда (6) при определенных значениях r отличны от нуля.

Харди и Литлвуду удалось впервые найти приблизительную величину этих коэффициентов, причем они исходили из того факта, что по классической теореме Коши, относящейся к теории функций комплексного переменного, коэффициенты ряда (6) выражаются аналитически следующим образом

$$I_N = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(f(x))^r}{x^{N+1}} dx,$$

где интеграл берется вдоль контура круга с центром в начале координат и с радиусом меньшим единицы. Вся трудность вычисления этого интеграла заключается в том, что во всех точках окружности с центром в начале координат и с радиусом равным единице функция, стоящая под знаком интеграла, обращается в бесконечность, или, как говорят, все точки единичной окружности являются особыми точками для функции, стоящей под знаком интеграла. Харди и Литлвуд преодолевают эту трудность следующим образом. Они классифицируют особые точки, покрывающие всю окружность, путем деления ее на рациональные части. Это деление они проводят следующим образом (см. фиг. 1).

Горизонтальный диаметр пересекая окружность делит ее пополам. Поэтому, если условимся принять правую из точек пересечения за начало отсчета частей окружности и откладывать части



Фиг. 1.

окружности в направлении противоположном движению часовой стрелки, то левая из точек пересечения совпадает с концом первой половины окружности. Соответственно этому мы концы диаметра отмечаем числами 0 и $1/2$. После этого делим окружность, начиная от точки 0 на три равные части и отмечаем точки деления числами $1/3$ и $2/3$. Продолжая деление окружности на 4, 5, 6 и т. д. частей, мы получим ряд точек, отмеченных рациональными несократимыми дробями, при чем знаменатели дробей возрастают (на фиг. 1 мы ограничились дробями со знаменателями не превосходящими 6). Представим себе, что на окружности нанесены все правильные дроби со знаменателями не превосходящими $N^{1-\epsilon}$, где ϵ некоторое положительное число, меньшее $\frac{1}{n}$. Можно

разбить окружность на мелкие дуги так, чтобы каждая такая дуга содержала по одной из точек, соответствующих нанесенным дробям. Часть этих мелких дуг, содержащих дроби с знаменателями, не превосходящими N^ϵ , называют большими дугами (major arcs), а остальные дуги называются малыми дугами (minor arcs).

Пользуясь чрезвычайно важным в теории чисел неравенством Вейля (Weyl), Харди и Литлвуд доказывают, что при

интегрировании вдоль окружности, можно малые дуги выбросить, ограничиваясь только интегрированием вдоль больших дуг. Ошибка, допускаемая при этом, сравнительно со всей величиной искомого коэффициента I_N , незначительна, если r больше некоторого числа r_0 , зависящего только от n .

После этого доказывается, что при интегрировании вдоль больших дуг функцию, стоящую под знаком интеграла, можно заменить другой, более подходящей, так называемой аналитической функцией, и при этом опять допускаем сравнительно небольшую ошибку. Наконец, небольшую ошибку мы допустим, если интегрирование вдоль каждой большой дуги заменить интегрированием вдоль всей окружности. Заменяя, таким образом, один интеграл суммой более простых интегралов, мы получаем возможность получить приближенное значение для I_N .

Выражение для I_N , получаемое при этом, можно записать так:

$$I_N = K S_N N^{\frac{r}{n}-1} + O\left(N^{\frac{r}{n}-1-\sigma}\right), \quad (7)$$

где K положительная величина, зависящая только от n и r и выражающаяся с помощью так называемой функции Γ (гамма-функции), S_N — так называемый особенный ряд (singular series), сумма которого зависит от N , но не превосходит некоторой постоянной величины, σ постоянная положительная величина, а второй член правой части (7) выражает ту ошибку, которую мы допускаем при вычислении I_N ; буквой O отмечается тот факт, что ошибка меньше

$N^{\frac{r}{n}-1-\sigma}$, умноженного на некоторую положительную или отрицательную постоянную, не зависящую от N .

Если бы в первом члене (мы его будем называть главным членом в отличие от второго члена, называемого остаточным членом) правой части формулы (7) не было множителя S_N , то решение проблемы получилось бы непосредственно. В самом деле, начиная с некоторого значения N , величина главного члена становится больше величины

остаточного члена, так как в главный член N входит в более высокой степени. Мы получаем, таким образом, для всех коэффициентов I_N , начиная с некоторого места, положительное значение, что и доказывает проблему Варинга. Но, так как главный член содержит S_N , то мы такого заключения сделать не можем ибо эта величина может оказаться равной нулю.

Поэтому Харди и Литлвуд после получения формулы (7) вынуждены дополнительно провести чрезвычайно трудные исследования особенных рядов S_N , и им удалось доказать, что для всех значений r , больших некоторого определенного числа r_0 , сумма особенного ряда S_N не может быть меньше положительной постоянной величины. Этим окончательно решается вопрос. Нужно отметить, что исследование особенных рядов занимает значительную часть доказательства Харди и Литлвуда. Впрочем, Ландау в 1930 г. получил очень краткое доказательство того, что S_N не может быть меньше положительной постоянной.

Выше мы отмечали, что все результаты Харди и Литлвуда получаются для любого r , большего некоторого числа r_0 , зависящего от n . Легко видеть, что $G(n)$ не превосходит r_0 . Из доказательства получается поэтому вполне определенная оценка для $G(n)$, именно:

$$G(n) \leq r_0 = (n-2)2^{n-1} + 5.$$

Таким образом, главный результат Харди и Литлвуда может быть выражен так: каждое целое число, начиная с некоторого места, может быть разложено в сумму $(n-2)2^{n-1} + 5$ или менее полных n -ых степеней, причем число представлений выражается формулой (7). Это означает, что все большие числа N разлагаются в сумму не более 9 кубов, 21 биквадратов, 53 пятых степеней, и т. д. Число представлений при этом равно некоторой постоянной, умножен-

ной на $N^{\frac{r}{n}-1}$, или, как говорят, число представлений есть величина порядка $N^{\frac{r}{n}-1}$.

Заметим, что из этого результата для $G(n)$ следует также, что $g(n)$ конечно. В самом деле, так как все числа,

меньшие некоторого постоянного N_0 , выражаются суммой не более N_0 n -ых степеней, а числа большие N_0 суммой не более $G(n)$ n -ых степеней, то для $g(n)$ можно взять наибольшее из чисел $G(n)$ и N_0 . Но результат Харди и Литавуда, устанавливая существование $g(n)$, не дает однако возможности судить о его величине.

Впервые удалось получить удовлетворительную оценку для $g(n)$ из нового доказательства проблемы Варинга, предложенного в 1924 г. академиком И. М. Виноградовым. По краткости, а также по вытекающим результатам, это доказательство является исключительно важным.

В своем доказательстве И. М. Виноградов берет некоторое целое число x , отличающееся постоянным множителем от $\sqrt[n]{N}$. Тогда целое число, $\left[\frac{N}{x^n}\right]$ ближайшее к отношению $\frac{N}{x^n}$ и меньшее этого отношения, остается меньше некоторого постоянного, для сколь угодно большого N . Обозначив через m некоторое целое число, меньшее $\left[\frac{N}{x^n}\right]$, будем очевидно иметь

$$N = \left(\left[\frac{N}{x^n}\right] - m\right) x^n + (mx^n + H),$$

где

$$H = N - \left[\frac{N}{x^n}\right] x^n.$$

Таким образом, N разложено в сумму двух слагаемых, из которых первое уже представлено в виде суммы конечного числа n -ых степеней, а второе слагаемое при делении на x^n дает в остатке H .

Мы можем поэтому доказать нашу теорему не для данного числа N , а для одного из чисел вида $mx^n + H$, где множитель m может принимать значения $0, 1, 2, \dots, k$, а k хотя и конечное, но достаточно большое число. Обозначив поэтому через $I(M, n, r)$, или короче через I_n число представлений M в виде суммы r n -ых степеней, достаточно доказать, что

$$I_H + I_{x^n+H} + I_{2x^n+H} + \dots + I_{kx^n+H} \quad (8)$$

больше нуля, так как тем самым будет доказано, что по крайней мере одно слагаемое этой суммы будет больше нуля. Это весьма облегчает доказательство, так как мы можем распоряжаться произвольным множителем m . Исследование выражения (8) проводится с помощью конечных тригонометрических сумм.

В 1925 г. Ландау в специальной работе, посвященной методу И. М. Виноградова показал, что этот метод дает возможность сделать следующий вывод: для

всех значений n , больших некоторого постоянного, $g(n) \leq n^{2^n}$; другими словами, любое число N большее единицы разлагается в сумму n^{2^n} полных n -ых степеней для всех n , начиная с некоторого места. В самое последнее время ленинградскому математику М. А. Гельбке удалось доказать еще более точное соотношение: $g(n) \leq n^{2^{n-1}}$.

Для того, чтобы судить о степени точности этого результата, заметим, что еще Эйлер указал, что $g(n)$ не может быть меньше, чем $s + 2^n - 2$ где s наибольшее целое число, меньшее $\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

В этом мы можем без труда убедиться, если обратим внимание на число $(s-1)2^n + 2^n - 1$, меньшее 3^n . Это число может быть представлено лишь n -ыми степенями двоек и единиц, и для представления его требуется, следовательно, как раз $s - 1 + 2^n - 1 = s + 2^n - 2$ полных n -ых степеней.

В 1928 г. И. М. Виноградов предложил другое доказательство теоремы Варинга, из которого получаются такие же результаты, какие получены Харди и Литавудом, но доказательство И. М. Виноградова несравненно проще и естественнее. Такое упрощение чрезвычайно важно не только для облегчения изучения проблемы Варинга, но и для более удобного приложения метода к решению других аддитивных проблем. Этот метод настолько замечателен и настолько важен, что нельзя пройти мимо него, не указав хотя бы в нескольких словах идеи, легшие в его основание.

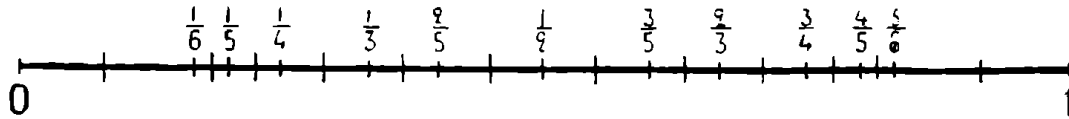
Известно, что интеграл

$$\int_0^1 e^{2\pi i y z} dz$$

равен единице, если $y = 0$, и равен нулю, если y есть целое число, отличное от нуля. Пользуясь этим, мы подставляем разность

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n - N$$

вместо y . Тогда наш интеграл обратится в единицу, если числа $x_1, x_2, \dots, x_r$ удовлетворяют уравнению Варинга (2) и обратится в нуль, если эти числа не удовлетворяют этому уравнению. Рассматриваемый интеграл является как бы



Фиг. 2.

аппаратом, автоматически отбирающим те значения $x_1, x_2, \dots, x_r$, которые удовлетворяют уравнению Варинга. Рассмотрим поэтому сумму значений этого интеграла для всевозможных систем чисел $x_1, x_2, \dots, x_r$, где каждое x принимает независимо друг от друга значения от 1 до ближайшего целого числа, большего $\sqrt[n]{N}$. Эта сумма, которая тоже представляется в виде интеграла, взятого в пределах от 0 до 1, будет равна числу представлений N в виде суммы r полных n -ых степеней.

Точно вычислить этот интеграл не представляется возможным, поэтому приходится ограничиться его приближенным вычислением. Именно, отрезок интегрирования от 0 до 1 делится на рациональные части (см. фиг. 2) подобно тому, как делилась окружность при доказательстве Харди и Литлвуда. При этом делении мы ограничиваемся дробями знаменатели которых не пре-

восходят величины $N^{\frac{n-1}{n}}$. После этого мы разбиваем весь отрезок от 0 до 1 на мелкие отрезки так, чтобы в каждом таком отрезке содержалось по одной из точек, соответствующих нанесенным дробям. И. М. Виноградов показывает, что, если мы возьмем наш интеграл не вдоль всего отрезка от 0 до 1, а лишь вдоль мелких отрезков, соответствующих дробям со знаменателями меньшими $N^{\frac{2}{n}}$, то мы допускаем сравнительно небольшую ошибку. Между тем, благодаря исключению из всего отрезка промежутков, соответствующих дробям с большими знаменателями, получается возможность свести вычисление интеграла к вычислению объема некоторой области пространства r измерений, а эта задача решается сравнительно просто.

Большого внимания заслуживают некоторые обобщения проблемы Варинга, достигнутые за последнее время. Прежде всего необходимо упомянуть теорему

Она заключается в том, что любое число N с точностью до ограниченного слагаемого может быть представлено в виде суммы ограниченного числа значений многочлена

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

если для целых x многочлен этот принимает целые значения.

Далеко идущие обобщения проблемы Варинга достигнуты И. М. Виноградовым в 1928 г. Первое обобщение заключается в том, что любое целое число может быть представлено в форме целого многочлена n -й степени, удовлетворяющего некоторым условиям, с r независимыми переменными, если $r \geq \frac{1}{2}n^2 + 1$. Во вторых, И. М. Виноградов рассматривает систему двух неопределенных уравнений

$$N = x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n$$

$$M = x_1^m + x_2^m + \dots + x_r^m,$$

и дает приближенное выражение числа их решений, при условиях $n > m$, M больше $\sqrt[n]{N^m}$ и меньше $\sqrt[n]{r^{n-m} N^m}$ и $r \geq \frac{1}{2}18n^2$.

Весьма замечательное обобщение проблемы Варинга получено Л. Г. Шнирельманом в 1930 г. Мы уже ознакомились с понятием о плотности последовательности целых чисел. И вот Л. Г. Шнирельман доказывает, что уравнение Варинга (2) может быть удовлетворено числами $x_1, x_2, \dots, x_r$ принадлежащими к любой последовательности, имеющей положительную плотность. Таким образом, решение уравнения Варинга (2) может состоять, например, из членов любой арифметической прогрессии.

К этому результату очень близко примыкает по своему характеру обобщение, недавно опубликованное английским математиком Метленд Райт (E. Maitland Wright). Его результат состоит в том, что уравнение Варинга может быть удовлетворено числами $x_1, x_2, \dots, x_r$, почти равными между собой или